SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN JACOD
PHILIP PROTTER

Quelques remarques sur un nouveau type d'équations différentielles stochastiques

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 16 (1982), p. 447-458
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__447_0>

QUELQUES REMARQUES SUR UN NOUVEAU TYPE D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES

Jean JACOD et Philip PROTTER

Dans certaines applications on voit s'introduire naturellement des équations différentielles stochastiques "non classiques", dans le sens où certaines composantes de la semimartingale directrice dépendent du processus-solution de manière indirecte, par le biais des caractéristiques locales.

Nous verrons par exemple au §II-c que l'équation suivante modélise certaines situations en économie:

$$X_t = K_t + \int_0^t F(X)_s \, dY_s + \int_0^t G(X)_s \, dN[\lambda(X)]_s . \tag{1}$$

Dans cette équation, $F(X)$, $G(X)$, $\lambda(X)$ sont des processus prévisibles dépendant du processus-solution X ; K et Y sont des processus donnés (Y est une semimartingale); $N[\lambda(X)]$ est un processus ponctuel qui dépend de X, dans le sens où son intensité stochastique (ou compensateur prévisible) est $\int_0^t \lambda(X)_s \, ds$.

Plus généralement, il est naturel de considérer l'équation:

$$X_t = K_t + \int_0^t F(X)_s \, dY_s + \int_0^t G(X)_s \, dZ[\zeta(X)]_s , \tag{2}$$

où $Z[\zeta(X)]$ symbolise une semimartingale qui admet des caractéristiques locales $\zeta(X)$ dépendant de X .

Dans la partie I nous commentons l'équation (2), en expliquant notamment quels sens on peut donner au mot "solution", et nous montrons comment on peut dans certains cas ramener (2) à une équation classique. Dans la partie II nous démontrons un résultat d'existence pour le cas particulier (1).

I - L'EQUATION (2).

§I-a. Notations et hypothèses. Nous utilisons les notations usuelles; pour toutes celles qui ne sont pas rappelées ici, nous renvoyons à [3] et [6].

Soit $(\Omega, \underline{\underline{F}}, (\underline{\underline{F}}_t), P)$ un espace probabilisé filtré. On note $\underline{\underline{D}}$ l'espace de tous les processus réels cadlag adaptés. On note $\mathbb{D} = \mathbb{D}(\mathbb{R}_+ ; \mathbb{R})$ l'espace de Skorokhod des fonctions cadlag sur $\mathbb{R}_+$, muni des tribus $\underline{\underline{\mathbb{D}}}_t = \sigma(x(s): s \leq t)$, et $\underline{\underline{\mathbb{D}}} = \bigvee_{(t)} \underline{\underline{\mathbb{D}}}_t$.

On note $\underline{\underline{P}}$ la tribu prévisible sur $\Omega\times\mathbb{R}_+$ et $p\underline{\underline{P}}$ l'espace des processus réels prévisibles. On note enfin $\underline{\underline{CL}}$ l'ensemble de tous les triplets (B,C,ν) qui a-priori "peuvent être les caractéristiques locales" d'une semimartingale réelle, c'est-à-dire des triplets constitués de:

- un processus prévisible à variation finie B, avec $B_0 = 0$;
- un processus adapté croissant continu C, avec $C_0 = 0$;
- une mesure aléatoire prévisible positive ν sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ qui ne charge ni $\{0\}\times\mathbb{R}$ ni $\mathbb{R}_+\times\{0\}$, qui vérifie identiquement $\nu(\omega;\{t\}\times\mathbb{R}) \leq 1$ et $\int_{\mathbb{R}} \nu(\omega;\{t\}\times dx)\, x\, I_{\{|x|\leq 1\}} = \Delta B_t(\omega)$, et

(3) $$\int_{\mathbb{R}} \nu(\omega;[0,t]\times dx)\, x^2\wedge 1 < \infty .$$

Si T est un temps d'arrêt et X un processus, on note X^T le processus arrêté en T : $X_t^T = X_{T\wedge t}$; de même si $\mathcal{C} = (B,C,\nu) \in \underline{\underline{CL}}$, on note $\mathcal{C}^T$ le triplet "arrêté": $(B^T, C^T, \nu . I_{[0,T]\times\mathbb{R}})$. Si $X \in \underline{\underline{D}}$ on note X^{T-} le processus arrêté strictement avant T : on a $X_t^{T-} = X_t$ si $t < T$, $X_t^{T-} = X_{T-}$ si $0 < T \leq t$, et $X_t^{T-} = X_0$ si $0 = T \leq t$.

On dira qu'une application H de $\underline{\underline{D}}$ dans $p\underline{\underline{P}}$ (resp. $\underline{\underline{CL}}$) est:

(4) <u>prévisible</u>: si pour tous $X, X' \in \underline{\underline{D}}$, T temps d'arrêt, si $X^{T-} = X'^{T-}$, alors $H(X)^T$ et $H(X')^T$ sont indistinguables.

(5) <u>fonctionnelle</u>: s'il existe une application $\tilde{H}$ de $\Omega\times\mathbb{D}$ dans $p\underline{\underline{P}}$ (resp. $\underline{\underline{CL}}$) telle que pour tout $X \in \underline{\underline{D}}$ on ait $H(X)(\omega) = \tilde{H}(\omega, X_{\cdot}(\omega))(\omega)$.

Revenons maintenant à l'équation (2). Les données sont:

a) un processus $K \in \underline{\underline{D}}$;

b) une semimartingale Y ;

c) deux applications prévisibles F et G de $\underline{\underline{D}}$ dans $p\underline{\underline{P}}$;

d) une application prévisible $\mathcal{C}$ de $\underline{\underline{D}}$ dans $\underline{\underline{CL}}$ (pour $X \in \underline{\underline{D}}$ on écrit $\mathcal{C}(X) = (B(X), C(X), \nu(X))$).

Emfin, $Z[\mathcal{C}(X)]$ symbolise "une" semimartingale de caractéristiques locales $\mathcal{C}(X)$.

En dehors du cas où $G = 0$, pour lequel l'équation (2) se réduit à l'équation classique:

(6) $$X_t = K_t + \int_0^t F(X)_s \, dY_s ,$$

il faut noter que (2) est fondamentalement une équation "de type faible". Dans ce sens, le cas suivant est le cas limite:

(7) Exemple: Ω est réduit à un point, donc $\underline{\underline{D}} = \mathbb{D}$; on a $K = Y = 0$ et $G(X) = 1$. L'équation s'écrit alors

$$X_t = Z[\mathcal{C}(X)]_t .$$

Ainsi, le problème se ramène à trouver une semimartingale X de caractéristiques locales $\mathcal{C}(X)$: c'est un "problème de martingales", dont les "solutions" sont les probabilités sur l'espace $\mathbb{D}$ faisant du processus canonique $X_t(x) = x(t)$ une semimartingale de caractéristiques $\mathcal{C}(x(.))$. ∎

(8) Remarque: Pour des raisons de simplicité nous ne parlons ici que du cas uni-dimensionnel. Tout ce qui suit resterait vrai (avec des notations plus compliquées) si K , Y , Z , X , étaient multi-dimensionnels. ∎

§I-b. Solutions-mesure. Dans ce paragraphe, nous faisons l'hypothèse supplémentaire que les applications F , G , $\mathcal{C}$ sont fonctionnelles, associées à $\tilde{F}$, $\tilde{G}$, $\tilde{\mathcal{C}}$ par (5). Soit

$$\begin{cases} \bar{\Omega} = \Omega\times\mathbb{D}\times\mathbb{D} , \quad \bar{\underline{\underline{F}}} = \underline{\underline{F}}\otimes\underline{\underline{\mathbb{D}}}\otimes\underline{\underline{\mathbb{D}}} , \quad \bar{\underline{\underline{F}}}_t = \bigcap_{s>t} \underline{\underline{F}}_s\otimes\underline{\underline{\mathbb{D}}}_s\otimes\underline{\underline{\mathbb{D}}}_s \\ X_s(\omega,x,z) = X_s(x) = x(s) , \quad Z_s(\omega,x,z) = Z_s(z) = z(s) . \end{cases}$$

(9) DEFINITION: Une solution-mesure de (2) est une probabilité $\bar{P}$ sur $(\bar{\Omega},\bar{\underline{\underline{F}}})$ qui vérifie:

a) $\bar{P}(A\times\mathbb{D}\times\mathbb{D}) = P(A)$ pour tout $A \in \underline{\underline{F}}$;

b) pour la probabilité $\bar{P}$, Y est une semimartingale et Z est une semimartingale de caractéristiques $\tilde{\mathcal{C}}(\omega,x)$;

c) on a $\bar{P}$-presque sûrement:

$$X_t(x) = K_t(\omega) + \int_0^t \tilde{F}(\omega,x)_s dY_s(\omega) + \int_0^t \tilde{G}(\omega,x)_s \, dZ_s(z) . \quad ∎$$

Trouver les solutions-mesure se ramène donc à un problème classique: en effet on pourrait facilement montrer, à la manière de [4], que $\bar{P}$ est solution-mesure si et seulement si $\bar{P}$ vérifie (a) ci-dessus et est solution d'un certain problème de martingales (que nous n'expliciterons pas ici) faisant intervenir K , X , Y , Z , $\tilde{F}$, $\tilde{G}$, $\tilde{\mathcal{C}}$, et les caractéristiques locales de Y . Il est vraisemblable qu'on pourrait étendre la méthode de [4] pour prouver l'existence d'une solution-mesure sous des hypothèses, relativement faibles, de continuité en x de $\tilde{F}(\omega,x)$, $\tilde{G}(\omega,x)$, $\tilde{\mathcal{C}}(\omega,x)$. Signalons aussi que le cas particulier (7) est résolu dans [2] sous certaines hypothèses.

§I-c. Solution-processus sur $(\Omega,\underline{\underline{F}},\underline{\underline{F}}_t,P)$. Dans certains cas il peut être intéressant (voire indispensable, si les applications F , G , $\mathcal{C}$, ne sont pas fonctionnelles) de résoudre le problème sans élargir l'espace de probabilité initial.

(10) DEFINITION: Une solution-processus de (2) sur $(\Omega,\underline{\underline{F}},\underline{\underline{F}}_t,P)$ est un processus $X\in\underline{\underline{D}}$ tel qu'il existe une semimartingale Z de caractéristiques locales $\mathcal{C}(X)$, et que le couple (X,Z) vérifie

(11) $$X_t = K_t + \int_0^t F(X)_s\, dY_s + \int_0^t G(X)_s\, dZ_s \;. \blacksquare$$

Remarquer que dans ce cas, si en outre F , G , $\mathcal{C}$ sont des applications fonctionnelles, la probabilité $\overline{P}$ sur $(\overline{\Omega},\overline{\underline{\underline{F}}})$ définie par

$$\overline{P}(d\omega,dx,dz) = P(d\omega)\, \varepsilon_{X_\cdot(\omega)}(dx)\, \varepsilon_{Z_\cdot(\omega)}(dz)$$

est une solution-mesure.

L'unicité de la semimartingale Z associée comme ci-dessus à une solution-processus X est exceptionnelle: même dans le cas extrême de l'équation (6) (où $G=0$), qui est un cas où on a souvent unicité pour X , il y a en général de nombreuses semimartingales de caractéristiques $\mathcal{C}(X)$.

Mais si G n'est pas identiquement nul, la non-unicité de la solution-processus X est la règle. Voici un exemple très simple, qui nous servira aussi d'introduction au paragraphe suivant:

(12) Exemple. Soit $B(X)=0$, $\nu(X)=0$, $C(X)_t = \int_0^t c(X)_s\, ds$ avec $c(X)\geq 0$. Si l'espace $(\Omega,\underline{\underline{F}},\underline{\underline{F}}_t,P)$ supporte un mouvement brownien W , toute solution-processus de l'équation "classique"

(13) $$X_t = K_t + \int_0^t F(X)_s\, dY_s + \int_0^t G(X)_s \sqrt{c(X)_s}\, dW_s$$

est aussi solution-processus de (2), avec la semimartingale associée $Z_t = \int_0^t \sqrt{c(X)_s}\, dW_s$. Toute solution-processus de

(14) $$X_t = K_t + \int_0^t F(X)_s\, dY_s - \int_0^t G(X)_s \sqrt{c(X)_s}\, dW_s$$

est aussi solution-processus de (2), et les solutions de (13) et (14) ne sont pas en général les mêmes (d'ailleurs si on remplace W par un autre mouvement brownien, on obtient encore d'autres solutions). ■

§I-d. Une méthode de résolution. Nous allons maintenant, en étendant l'exemple (12), montrer que dans certains cas (qui couvrent sans doute l'essentiel des applications potentielles) on peut ramener (2) à une équation classique.

On va faire deux types d'hypothèses:

<u>Hypothèse (H1)</u>: L'espace $(\Omega,\underline{\underline{F}},\underline{\underline{F}}_t,P)$ supporte

a) un mouvement brownien W,

b) une mesure de Poisson $m(\omega;dt\,dx)$ sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$, de compensateur (déterministe) $\overline{m}(dt\times dx) = dt\otimes dx$. ∎

<u>Hypothèse (H2)</u>: Pour tout $X\in\underline{\underline{D}}$ on a

$$(15)\qquad \begin{cases} B(X)_t = \int_0^t b(X)_s\,ds \\ C(X)_t = \int_0^t c(X)_s\,ds \\ \nu(X)(\omega;dt\,dx) = dt\times L(X,\omega,t;dx) \end{cases}$$

où b et c sont des applications prévisibles de $\underline{\underline{D}}$ dans $p\underline{\underline{P}}$, avec $c\geq 0$; et où pour chaque $X\in\underline{\underline{D}}$, $L(X)$ est une mesure de transition positive de $(\Omega\times\mathbb{R}_+,\underline{\underline{P}})$ dans $\mathbb{R}$ qui intègre la fonction $x^2\wedge 1$ et qui est "prévisible" au sens suivant: si $X, X'\in\underline{\underline{D}}$ vérifient $X^{T-}=X'^{T-}$ pour un temps d'arrêt T, on a $L(X,\omega,t;.) = L(X',\omega,t;.)$ pour tout $t\leq T(\omega)$, en dehors d'un ensemble négligeable. ∎

(16) <u>Remarque</u>: L'hypothèse (H2) peut sembler très restrictive, et on peut en effet l'affaiblir considérablement en remplaçant dans (15) la mesure de Lebesgue dt par la mesure $dA_t(\omega)$ associée à un processus croissant prévisible continu (ou même seulement continu à droite) A ; dans ce cas il convient de modifier corrélativement (H2) en imposant l'existence:

a) d'une martingale locale continue W de variation quadratique A (ou A^c si A est discontinue),

b) d'une mesure $m(\omega;dt\times dx)$ de compensateur prévisible $dA_t(\omega)\times dx$.

Toutefois, même ainsi affaiblie, (H2) reste très restrictive car elle impose l'existence d'un processus A qui "domine" $B(X)$, $C(X)$, $\nu(X)$ <u>pour tout</u> $X\in\underline{\underline{D}}$. ∎

(17) LEMME: <u>Sous (H2) il existe une application</u> $h:\ \underline{\underline{D}}\times\Omega\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ <u>qui est</u> $\underline{\underline{P}}\otimes\underline{\underline{R}}$<u>-mesurable en</u> (ω,t,x) <u>et qui vérifie</u>:

a) <u>si</u> $X, X'\in\underline{\underline{D}}$ <u>vérifient</u> $X^{T-}=X'^{T-}$ <u>pour un temps d'arrêt</u> T, <u>l'ensemble</u> $\{\omega:\exists(t,x)$ avec $t\leq T(\omega)$ et $h(X,\omega,t,x)\neq h(X',\omega,t,x)\}$ <u>est négligeable</u>;

b) <u>pour toute fonction borélienne positive</u> f <u>sur</u> $\mathbb{R}$ <u>on a</u>:

$$(18)\qquad \int_{\mathbb{R}} L(X,\omega,t;dx)\,f(x) = \int_{\mathbb{R}} dx\ f\circ h(X,\omega,t,x)\ I_{\{h(X,\omega,t,x)\neq\infty\}}\ .$$

Démonstration. La relation (18) exprime que $L(X,\omega,t;.)$ est l'image de la mesure de Lebesgue par l'application: $x \rightsquigarrow h(X,\omega,t,x)$. Le fait qu'une mesure positive finie ou σ-finie sur $\mathbb{R}$ soit l'image de la mesure de Lebesgue par une application mesurable est bien connu, ainsi que le fait de pouvoir choisir $h(X,\omega,t,x)$ $\underline{\underline{P}}\otimes\underline{\underline{\mathbb{R}}}$-mesurable en (ω,t,x) car $L(X,\omega,t;.)$ est $\underline{\underline{P}}$-mesurable en (ω,t) et intègre la fonction $x^2\wedge 1$: voir par exemple [3], lemme (14-50); si on examine la preuve de ce lemme, on voit en outre qu'il existe un procédé canonique de calcul de $h(X,\omega,t,.)$ en fonction de $L(X,\omega,t;.)$ (ce procédé n'est pas unique, bien-sûr !): donc si $L(X,\omega,t,.) = L(X',\omega,t;.)$ on a $h(X,\omega,t,x) = h(X',\omega,t,x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. On en déduit donc (a). ∎

(19) THEOREME: Soit (H1) et (H2). On suppose aussi que pour chaque $X\in\underline{\underline{D}}$, le processus $G(X)$ est localement borné. Toute solution-processus de

$$X_t = K_t + \int_0^t F(X)_s dY_s + \int_0^t G(X)_s b(X)_s\, ds + \int_0^t G(X)_s \sqrt{c(X)_s}\, dW_s$$
$$(20) \qquad + \int_0^t\int_{\mathbb{R}} G(X)_s h(X,s,x)\, I_{\{|h(X,s,x)|\le 1\}} (m-\overline{m})(ds\times dx)$$
$$+ \int_0^t\int_{\mathbb{R}} G(X)_s\, h(X,s,x)\, I_{\{|h(X,s,x)|>1\}}\, m(ds\times dx)$$

est alors solution-processus de (2). De plus la formule

$$Z_t = \int_0^t b(X)_s\, ds + \int_0^t \sqrt{c(X)_s}\, dW_s$$
$$(21) \qquad + \int_0^t\int_{\mathbb{R}} h(X,s,x)\, I_{\{|h(X,s,x)|\le 1\}} (m-\overline{m})(ds\times dx)$$
$$+ \int_0^t\int_{\mathbb{R}} h(X,s,x)\, I_{\{|h(X,s,x)|>1\}}\, m(ds\times dx)$$

définit une semimartingale Z de caractéristiques locales $\zeta(X)$, qui en outre vérifie (11) si X est solution de (20).

L'équation (20) est une équation classique (avec mesure aléatoire: voir [1] ou [3]). Si ses coefficients $F(X)$, $G(X)b(X)$, $G(X)\sqrt{c(X)}$ et $G(X)h(X)$ sont lipschitziens (par exemple) on sait qu'elle admet une solution-processus et une seule. Mais cette condition de Lipschitz est sans doute très difficile à vérifier en pratique: en effet c'est le triplet $\zeta(X)$ qui est connu en principe, et la fonction $h(X)$ dépend de $\zeta(X)$ d'une manière très compliquée (et essentiellement non unique).

On voit bien aussi dans ce théorème apparaitre la non-unicité "intrinsèque" de la solution de (2): d'une part W et m ne sont pas uniques, d'autre part $h(X)$ n'est pas unique et $\sqrt{c(X)}$ peut être remplacé par

$a(X)\sqrt{c(X)}$, où $a(X)$ prend les valeurs ± 1.

<u>Démonstration du théorème</u>. Etant donnée la définition (10), et comme $G(X)$ est localement borné, il suffit de prouver que pour tout $X \in \underline{\underline{D}}$ le second membre de (21) définit une semimartingale Z de caractéristiques $\mathcal{C}(X)$.

Considérons ce second membre. Le premier terme vaut $B(X)_t$. Le second terme est une intégrale stochastique bien définie d'après (15), et c'est une martingale locale continue de variation quadratique $C(X)$. Le troisième terme est une intégrale stochastique par rapport à $m-\bar{m}$ (voir [3]), qui est bien définie car d'après (15), (18) et (3) on a:

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}} h^2(X,s,x)\, I_{\{|h(X,s,x)|\leq 1\}}\, \bar{m}(ds\times dx) = \int_{\mathbb{R}} \nu(X)([0,t]\times dx)\, x^2\, I_{\{|x|\leq 1\}} < \infty ;$$

ce troisième terme est une martingale locale purement discontinue dont les sauts sont d'amplitude inférieure ou égale à 1. Enfin toujours d'après (15), (18) et (3), on a

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}} I_{\{|h(X,s,x)|>1\}}\, \bar{m}(ds\times dx) = \nu(X)([0,t]\times\{x:|x|>1\}) < \infty ,$$

donc le processus $\int_0^t\int_{\mathbb{R}} I_{\{|h(X,s,x)|>1\}} m(ds\times dx)$ est un processus ponctuel (avec des sauts égaux à 1) à valeurs finies. Par suite le dernier terme de (21) définit un processus à variation finie purement discontinu, dont les sauts sont d'amplitude supérieure à 1.

On en déduit que (21) définit une semimartingale Z dont les deux premières caractéristiques sont $B(X)$ et $C(X)$. Enfin la mesure μ^Z associée aux sauts de Z vérifie pour tout borélien A de $\mathbb{R}$ situé à une distance strictement positive de l'origine:

$$\mu^Z([0,t]\times A) := \sum_{s\leq t} I_A(\Delta Z_s) = \int_0^t\int_{\mathbb{R}} I_A\circ h(X,s,x)\, m(ds\times dx) .$$

Cette relation "passe" aux projections duales prévisibles, donc la troisième caractéristique de Z vérifie d'après (15) et (18):

$$\nu^Z([0,t]\times A) = \int_0^t\int_{\mathbb{R}} I_A\circ h(X,s,x)\, \bar{m}(ds\times dx) = \nu(X)([0,t]\times A) . \blacksquare$$

(22) <u>Remarque</u>: Pour chaque $X \in \underline{\underline{D}}$ la formule (21) définit une semimartingale $H(X) := Z$, qui dépend "fonctionnellement" de X. L'équation (2) se ramène donc à

$$X_t = K_t + \int_0^t F(X)_s\, dY_s + \int_0^t G(X)_s\, dH(X)_s .$$

Ce type d'équations est étudié dans [7] (toutefois, la résolution de cette équation est a-priori plus difficile que celle de (20)). $\blacksquare$

II - L'EQUATION (1).

§II-a. On se donne maintenant des applications prévisibles F, G, λ de $\underline{\underline{D}}$ dans $p\underline{\underline{P}}$, et on suppose que $\lambda(X) \geq 0$ et que $\int_0^t \lambda(X)_s ds < \infty$ pour tous $X \in \underline{\underline{D}}$, $t \in \mathbb{R}_+$.

On sait qu'une semimartingale Z est un processus ponctuel de compensateur A si et seulement si ses caractéristiques locales (B,C,ν) sont $B = A$, $C = 0$, $\nu(dt \times dx) = dA_t \otimes \varepsilon_1(dx)$. Par suite l'équation (1) se ramène à l'équation (2), à condition de prendre pour $\mathcal{E}(X)$ le triplet

$$(23) \qquad \begin{cases} B(X)_t &= \int_0^t \lambda(X)_s ds \\ C(X) &= 0 \\ \nu(X)(dt \times dx) &= \lambda(X)_t \, dt \otimes \varepsilon_1(dx) \end{cases}$$

(Noter que (H2) est vérifié avec $b = \lambda$, $c = 0$, $L = \lambda(X)_t \varepsilon_1(dx)$).

(24) THEOREME: <u>Supposons que l'espace</u> $(\Omega, \underline{\underline{F}}, \underline{\underline{F}}_t, P)$ <u>supporte une mesure aléatoire de Poisson</u> m <u>sur</u> $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ <u>de compensateur</u> $\overline{m}(dt \times dx) = dt \otimes dx$. <u>Toute solution-processus de l'équation suivante est alors solution-processus de l'équation (1)</u>:

$$(25) \qquad X_t = K_t + \int_0^t F(X)_s \, dY_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(X)_s \, I_{\{0 \leq x \leq \lambda(X)_s\}} \, m(ds \times dx),$$

<u>et pour</u> $N[\lambda(X)]$ <u>on peut alors choisir le processus</u>:

$$(26) \qquad N_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} I_{\{0 \leq x \leq \lambda(X)_s\}} \, m(ds \times dx).$$

Ce théorème peut se déduire du théorème (19) (sauf qu'ici on n'a pas besoin de faire l'hypothèse (H1)-(a), ni de supposer $G(X)$ localement borné). Il est aussi simple d'en faire une démonstration directe:

<u>Démonstration</u>. La formule (26) définit pour chaque $X \in \underline{\underline{D}}$ un processus de comptage, avec une explosion éventuelle: $T = \inf(t : N_t = \infty)$. Si $B(X)$ est donné par (23), soit $T_n = \inf(t : B(X)_t \geq n)$. On a $B(X)_{T_n} \leq n$, et

$$E(N_{T_n}) = E\left(\int_0^{T_n} \int_{\mathbb{R}} I_{\{0 \leq x \leq \lambda(X)_s\}} \, \overline{m}(ds \times dx)\right) = E[B(X)_{T_n}].$$

Il en découle que $T_n \leq T$ p.s. Comme $\lim_{(n)} \uparrow T_n = \infty$ par hypothèse, on a $T = \infty$ p.s., donc N est un processus ponctuel sans explosion, et son compensateur est clairement $B(X)$. Que (25) donne des solutions de (1) est alors évident. ∎

$\S$II-b. <u>Un théorème d'existence</u>. L'équation (25) est de type classique, avec semimartingale et mesure aléatoire directrices, mais le coefficient $G(X)\, I_{\{0\leq x\leq \lambda(X)\}}$ n'est pas lipschitzien en X, en général. Nous allons toutefois montrer que (25) admet une solution et une seule (avec explosion), sous des hypothèses relativement faibles.

On dit que la coefficient F est Y-<u>acceptable</u> si l'équation (6) admet une solution et une seule, pour toute condition initiale $K\in \underline{\underline{D}}$: voir [3] ou [5] pour des conditions impliquant que F est Y-acceptable.

(27) THEOREME: <u>Soit F, G, λ des applications prévisibles de $\underline{\underline{D}}$ dans $p\underline{\underline{P}}$; on suppose que F est Y-acceptable, et que $\lambda(X)\geq 0$ et $\int_0^t \lambda(X)_s\, ds<\infty$ pour tous $X\in \underline{\underline{D}}$, $t\in \mathbb{R}_+$. L'équation (25) admet alors une solution et une seule, avec un temps d'explosion T qui est prévisible et strictement positive.</u>

Dire que X est solution avec explosion en T signifie que X est défini et cadlag sur $[\![0,T[\![$, et que X_{T-} n'existe pas ou est infini sur l'ensemble $\{T<\infty\}$. Ainsi en général on n'a pas $X\in \underline{\underline{D}}$; l'équation (25) doit alors être comprise ainsi: si (T_n) est une suite de temps d'arrêt annonçant T, chaque X^{T_n} est dans $\underline{\underline{D}}$ et est solution de (25) sur l'intervalle $[\![0,T_n]\!]$.

<u>Démonstration</u>. a) Pour chaque $X\in \underline{\underline{D}}$ on note N^X le processus ponctuel défini par (26): sous les hypothèses faites ici, on a vu plus haut que N^X ne prend p.s. que des valeurs finies. On définit par récurrence une suite $(X(n))_{n\geq 0}$ de processus de $\underline{\underline{D}}$ et une suite strictement croissante $(T_n)_{n\geq 0}$ de temps d'arrêt: on pose $T_0=0$ et $X(0)=0$; puis

$$(28)\quad \begin{cases} X(n+1)_t = K_t + \int_0^t F[X(n+1)]_s dY_s + \sum_{i=1}^{n} G[X(n)]_{T_i}\, I_{\{T_i\leq t\}} \\ T_{n+1} = \inf(t:\ N_t^{X(n+1)} > N_{T_n}^{X(n+1)}) . \end{cases}$$

Si $X(n)$ est connu, en utilisant la Y-acceptabilité de F (dans (6) on remplace K par $K+\sum_{1\leq i\leq n} G[X(n)]_{T_i}\, I_{[\![T_i,\infty[\![}$) on voit que la première équation (28) définit un unique processus $X(n+1)\in \underline{\underline{D}}$. La seconde équation définit un temps d'arrêt $T_{n+1}\geq T_n$ qui vérifie $T_{n+1}>T_n$ sur $\{T_n<\infty\}$. Considérons les propriétés:

$$(29)\quad \begin{cases} X(n)_t = K_t + \int_0^t F[X(n)]_s\, dY_s + \sum_{i=1}^{n-1} G[X(n)]_{T_i}\, I_{\{T_i\leq t\}} \\ X(n) = X(n-1) \quad \text{sur } [\![0,T_{n-1}[\![, \end{cases}$$

trivialement vérifiées par $n=1$. Supposons les vraies pour $p\leq n$. Comme l'équation (6), avec K remplacé par $K+\sum_{1\leq i\leq n-1} G[X(n)]_{T_i} I_{[\![T_i,\infty[\![}$, admet une seule solution, en comparant (28) et (29) on voit que $X(n+1)=X(n)$ sur $[\![0,T_n[\![$. Par suite $G[X(n)]_{T_n}=G[X(n+1)]_{T_n}$ sur $\{T_n<\infty\}$, et d'après (28) encore on voit que $X(n+1)$ satisfait à (29): on a donc (29) pour tout $n\geq 1$.

On déduit aussi de la seconde relation de (29) que $\lambda[X(n)]=\lambda[X(n-1)]$ sur $[\![0,T_{n-1}]\!]$, donc $N^{X(n)}=N^{X(n-1)}$ sur $[\![0,T_{n-1}]\!]$, donc $N^{X(n)}=N^{X(p)}$ sur $[\![0,T_p]\!]$ pour $p\leq n$. Par suite les n premiers instants de saut de $N^{X(n)}$ sont exactement les temps $T_1,T_2,..,T_n$; la première relation (29) s'écrit alors aussi:

$$(30)\quad X(n)_t = K_t + \int_0^t F[X(n)]_s dY_s + \int_0^{t\wedge T_{n-1}}\int_{\mathbb{R}} G[X(n)]_s I_{\{0\leq x\leq \lambda[X(n)]_s\}} m(ds\times dx)$$

b) Le temps d'arrêt $T=\lim_{(n)}\uparrow T_n$ est prévisible et strictement positif. D'après (29) on définit X sur $[\![0,T[\![$ en posant $X=X(n)$ sur $[\![0,T_n[\![$, et d'après (30) X est solution de (25) sur l'intervalle $[\![0,T[\![$.

Nous allons montrer que T est un temps d'explosion pour X. Soit $A=\{\omega : T(\omega)<\infty,\ X_{T-}(\omega)$ existe dans $\mathbb{R}\}$. On a $A\in \underline{\underline{F}}_{T-}$, donc le temps d'arrêt $S=T$ sur A^c et $S=\infty$ sur A est prévisible, annoncé par une suite (S_n) de temps d'arrêt. Définissons le processus X' sur $[\![0,S[\![$ par $X'=X$ sur $[\![0,T[\![$, et $X'=X_{T-}$ sur $[\![T,S[\![$. On a $N_{T_p}^{X(p)}=p$ sur $\{T_p<\infty\}$, car T_p est le p-ième instant de saut de $N^{X(p)}$. Donc sur l'ensemble $\{T<\infty,\ T\leq S_n\}$ on a pour tout $p\geq 1$:

$$N_{T_p}^{X',S_n} = N_{T_p}^{X',S_n\wedge T_p} = N_{T_p}^{X(p)} = p,$$

et par suite $N_T^{X',S_n}=\infty$, ce qui contredit le fait que N^{X',S_n} ne prend que des valeurs finies. Donc $P(T<\infty, T\leq S_n)=0$ pour tout n, donc $P(T<S)=0$, donc $P(A)=0$. Par suite T est bien un temps d'explosion pour X.

c) Il reste à montrer l'unicité. Soit X' une autre solution de (25), avec un temps d'explosion prévisible T' annoncé par une suite (T'_n). D'après l'unicité vue en (a), on voit facilement par récurrence sur n que pour tous $n,p\geq 1$ on a $X(n)^{T'_p} = X'^{T_n\wedge T'_p}$. Il est alors facile d'en déduire que $T'=T$ et que $X'=X$. ∎

Il peut être intéressant de savoir que l'équation (25) admet une solution non-explosive. Voici une condition suffisante pour ceci:

(31) COROLLAIRE: <u>Si, en plus des hypothèses du théorème (27), on suppose qu'il existe un processus croissant</u> A <u>à valeurs finies tel que</u>

$\int_0^t \lambda(X)_s\, ds \leq A_t$ pour tous $X \in \underline{\underline{D}}$, $t \in \mathbb{R}_+$, alors l'équation (25) admet une solution-processus $X \in \underline{\underline{D}}$ et une seule.

(C'est le cas, par exemple, si $\lambda(X)$ est borné par une constante, uniformément en X).

Démonstration. Soit $S_n = \inf(t : A_t \geq n)$. On a $A_{S_n -} \leq n$, donc $\int_0^{S_n} \lambda(X)_s ds \leq n$ pour tout $X \in \underline{\underline{D}}$. Si on reprend la preuve de (27), on en déduit que $E(N^{X(p)}_{T_p \wedge S_n}) \leq n$, et par ailleurs $N^{X(p)}_{T_p \wedge S_n} = p$ sur l'ensemble $\{T_p < S_n\}$: donc $p P(T_p < S_n) \leq n$, donc $P(T < S_n) = 0$ pour tout n, et comme $S_n \uparrow \infty$ on a $P(T < \infty) = 0$. ∎

§ II-c. Un exemple en économie. Le problème suivant, qui motive cet article, a été proposé à l'un d'entre nous par l'économiste B. Wernerfelt.

On veut décrire l'achat d'un bien (relativement courant), qu'un client recherche dans différents points de vente (ou petites annonces,...). Ce client trouve les offres de vente selon un processus ponctuel, dont l'intensité stochastique est fonction des prix des offres précédentes (car si les prix offerts sont bas, le client fait des recherches ultérieures moins intensives).

On peut modéliser ce problème ainsi:

$X_t(\omega)$ = dernier prix observé par le client;

$Y_t(\omega) = \inf_{s \leq t} X_s(\omega)$ = prix le plus bas observé avant le temps t;

$\lambda(\omega,t,y)$ = intensité stochastique instantannée du "processus ponctuel des offres", à l'instant t, si le prix le plus bas observé avant t est y;

$g(\omega,t,x)$ = augmentation (ou diminution) du prix à l'instant t, lorsque le prix de la dernière offre est x.

L'équation qui régit l'évolution de X est alors le cas particulier suivant de l'équation (1):

$$X_t = X_0 + \int_0^t g(\omega,s,X_{s-}(\omega))\, d\mathbf{N}[\lambda(\omega,s,Y_{s-}(\omega))]_s .$$

BIBLIOGRAPHIE

1 L. GALTCHOUK: Existence et unicité pour des équations différentielles stochastiques par rapport à des martingales et des mesures aléatoires. 2d Vilnius Conf. Prob. 1, 88-91, 1977

2 B. GRIGELIONIS, R. MIKULEVICIUS: On weak convergence of semimartingales. Lit. Math. J., XXI, 3, 9-24, 1981

3 J. JACOD: Calcul stochastique et problèmes de martingales. Lect. Notes in Math. 714. 1979.

4 J. JACOD, J. MEMIN: Existence of weak solutions for stochastic differential equations with driving semimartingales. Stochastics, 4, 317-337, 1981.

5 M. METIVIER, J. PELLAUMAIL: Stochastic Integration. Ac. Press, 1980

6 P.A. MEYER: Un cours sur les intégrales stochastiques. Sém. Proba. X, Lect. Notes in Math. 511, 245-400, 1976.

7 P. PROTTER: Stochastic differential equations with feedback in the differentials. Dans ce volume.

(le travail du second auteur a été partiellement financé par: NSF Grant Nº 0464-50-13955).