JEAN JACOD

Équations différentielles stochastiques linéaires : la méthode de variation des constantes

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 16 (1982), p. 442-446
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__442_0>

EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES LINEAIRES : LA METHODE DE VARIATION DES CONSTANTES

Jean JACOD

Considérons l'équation

$$Y_t = H_t + \int_0^t Y_{s-}\, dX_s \tag{1}$$

où X et H sont des semimartingales données, et Y est l'inconnue. Ces processus sont matriciels: $d\times n$ pour H et Y, $n\times n$ pour X. D'après les résultats classiques sur les équations à coefficients lipschitziens, il existe un processus solution et un seul (à l'indistinguabilité près).

Lorsque X, Y, H sont à valeurs réelles, une solution explicite de (1) a été donnée par Yoeurp et Yor [5]: on résoud d'abord l'équation "sans second membre" $Z = 1 + Z_{-} \bullet X$ (comme d'habitude, le "$\bullet$" désigne l'intégration stochastique; on utilise les notations usuelles, cf. [3] par exemple); la solution $Z = \mathcal{E}(X)$ est l'exponentielle de Doléans-Dade. Puis, au moins quand $\mathcal{E}(X)$ ne s'annule pas, on résoud (1) par la méthode de variation des constantes: c'est-à-dire que la solution Y se met sous la forme $Y = U\,\mathcal{E}(X)$, où U est un processus qu'on calcule explicitement en fonction de $H, X, \mathcal{E}(X)$.

Nous nous proposons de remplir le même programme dans le cas matriciel. On considère d'abord l'équation sans second membre

$$Z_t = I + \int_0^t Z_{s-}\, dX_s\,, \tag{2}$$

où I = identité $n\times n$. On note encore $Z = \mathcal{E}(X)$ la solution, qui a été étudiée par divers auteurs: Ibero [2], Emery [1], sans malheureusement qu'on ait d'expression "explicite" quand $n \geq 2$ (rien de surprenant à cela: même dans le cas déterministe on n'a pas d'expression explicite). Puis on résoud (1) en copiant la méthode de Yoeurp et Yor.

Le seul point un peu délicat de cette méthode est ce qui se passe lorsque $\mathcal{E}(X)$ s'annule (cas réel) ou cesse d'être inversible (cas matriciel). Il convient donc d'étudier le processus $V = \text{dét}(\mathcal{E}(X))$. Et la seule contribution un peu nouvelle de ce qui suit consiste à montrer que

$$V_t = 1 + \int_0^t V_{s-}\, d\hat{X}_s \tag{3}$$

où $\hat{X}$ est un processus réel qu'on calculera explicitement en fonction de X.

Cette étude est motivée, notamment, par l'examen de la dérivabilité des solutions d'équations stochastiques (non-linéaires) en fonction de la condition initiale: voir par exemple Meyer [4,§7] et [13].

Remarque: Dans (2) le produit $Z_{s-}dX_s$ n'est pas commutatif: il existe une autre équation du même type, qu'on peut écrire

$$Z_t = I + \int_0^t dX_s\, Z_{s-}\,.$$

Mais si Z' et X' sont les transposées de Z et X, on a alors $Z' = I + Z'_-\bullet X'$, donc $Z = [\mathcal{E}(X')]'$ et on se ramène à l'équation (2).

1 - L'EQUATION SANS SECOND MEMBRE. Nous considérons l'équation (2), et $V_t(\omega)$ est le déterminant de la matrice $Z_t(\omega) = \mathcal{E}(X)_t(\omega)$.

Pour tout $m \geq 1$, on note $\underline{\underline{P}}_m$ l'ensemble des permutations de $\{1,2,\ldots,m\}$ et si $a \in \underline{\underline{P}}_m$ on note $|a|$ le nombre d'inversions de a. Par définition on a

(4) $$V_t = \sum_{a\in \underline{\underline{P}}_n} (-1)^{|a|} Z_t^{1,a_1} Z_t^{2,a_2} \ldots Z_t^{n,a_n}\,.$$

Posons avec la notation "crochet" usuelle:

(5) $$\hat{X} = \sum_{i\leq n} X^{ii} + \sum_{m=2}^{n} \sum_{1\leq h_1<\ldots<h_m\leq n} \sum_{a\in \underline{\underline{P}}_m} (-1)^{|a|} [X^{h_1,h_{a_1}},[X^{h_2,h_{a_2}},[\ldots,[X^{h_{m-1},h_{a_{m-1}}},X^{h_m,h_{a_m}}]]\ldots]\,,$$

ce qui définit une semimartingale réelle $\hat{X}$.

THEOREME 1 : Avec les notations précédentes on a $V = \mathcal{E}(\hat{X})$.

Remarquer que $\Delta\hat{X} = f(\Delta X)$, avec

(6) $$f(x) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{1\leq h_1<\ldots<h_m\leq n} \sum_{a\in \underline{\underline{P}}_m} (-1)^{|a|} \prod_{j=1}^{m} x^{h_j,h_{a_j}}\,.$$

Posons $T_0 = 0$ et $T_{n+1} = \inf(t>T_n : \Delta\hat{X}_t = f(\Delta X_t) = -1)$. On a alors

COROLLAIRE: La matrice $\mathcal{E}(X)_t$ (resp. $\mathcal{E}(X)_{t-}$) est inversible pour tout $t<T_1$ (resp. $t\leq T_1$). En particulier si X est continu, $\mathcal{E}(X)_t$ et $\mathcal{E}(X)_{t-}$ sont inversibles pour tout t (résultat bien connu !)

et, plus généralement:

(7) $\mathcal{E}(X-X^{T_n})_t$ (resp. $\mathcal{E}(X-X^{T_n})_{t-}$) est inversible pour tout $t<T_{n+1}$ (resp. $t\leq T_{n+1}$).

Noter aussi qu'on déduit immédiatement de (2) que

$$\Delta V = \text{dét}(Z) - \text{dét}(Z_-) = V_-[\text{dét}(\Delta X + I) - 1]\,,$$

ce qui est cohérent avec l'expression $V = \mathcal{E}(\hat{X})$: en effet (remarque due à

Mémin) le polynôme caractéristique de la matrice x se développe ainsi: $\text{dét}(x+\lambda I) = \sum_{0\leq m\leq n} g_m(x)\lambda^m$, avec

$$g_{n-m}(x) = \sum_{1\leq h_1<\ldots<h_m\leq n} \text{dét}(\{x^{h_i,h_j}\}_{i,j\leq m})$$

(par exemple $g_n = 1$ et $g_{n-1}(x) = \text{Trace}(x)$), de sorte qu'on a $f(x) = \sum_{0\leq m\leq n-1} g_m(x) = \text{dét}(x+I)-1$.

Démonstration du théorème. Si Y est une semimartingale matricielle $n\times n$ on pose

$$C^{1,Y}(h;k) = Y^{hk}$$

$$C^{m,Y}(h_1,\ldots,h_m;k_1,\ldots,k_m) = [Y^{h_1,k_1},[\ldots[Y^{h_{m-1},k_{m-1}},Y^{h_m,k_m}]\ldots]] \quad \text{si} \quad 2\leq m\leq n,$$

de sorte que

$$(8)\quad \hat{X} = \sum_{m=1}^{n}\sum_{1\leq h_1<\ldots<h_m\leq n} \sum_{a\in \underline{\underline{P}}_m} (-1)^{|a|}\, C^{m,X}(h_1,\ldots,h_m;h_{a_1},\ldots,h_{a_m}).$$

Une application de la formule d'Ito à la fonction $g(z_1,\ldots,z_n) = \prod z_i$ montre que si $a\in\underline{\underline{P}}_n$ on a

$$\begin{aligned}\prod_{i\leq n} Z_t^{i,a_i} &= \prod_{i\leq n} Z_0^{i,a_i} + \sum_{r\leq n}(\prod_{i\neq r} Z_-^{i,a_i})\bullet Z_t^{r,a_r} \\ &\quad + \sum_{1\leq r_1<r_2\leq n}(\prod_{i\neq r_1,r_2} Z_-^{i,a_i})\bullet\langle (Z^{r_1,a_{r_1}})^c,(Z^{r_2,a_{r_2}})^c\rangle_t \\ &\quad + \sum_{s\leq t}\sum_{2\leq m\leq n}\sum_{1\leq r_1<\ldots<r_m\leq n}(\prod_{i\neq r_j} Z_{s-}^{i,a_i})(\prod_{j\leq m}\Delta Z_s^{r_j,a_{r_j}}) \\ &= \prod_{i\leq n} Z_0^{i,a_i} + \sum_{m\leq n}\sum_{1\leq r_1<\ldots<r_m\leq n}(\prod_{i\neq r_j} Z_-^{i,a_i})\bullet C^{m,Z}(r_1,\ldots,r_m;a_{r_1},\ldots,a_{r_m})_t.\end{aligned}$$

Mais Z vérifie (2), donc

$$C^{m,Z}(r_1,\ldots,r_m;a_{r_1},\ldots,a_{r_m}) = \sum_{k_i\leq n}(\prod_{j\leq m} Z_-^{r_j,k_j})\bullet C^{m,X}(k_1,\ldots,k_m;a_{r_1},\ldots,a_{r_m}).$$

Par suite, comme $V_0 = \text{dét}(I) = 1$, (4) entraine que

$$\begin{aligned}V = 1 + \sum_{a\in\underline{\underline{P}}_n}(-1)^{|a|}\sum_{m\leq n}\sum_{1\leq r_1<\ldots<r_m\leq n}\sum_{k_i\leq n} \\ \{(\prod_{i=r_j} Z_-^{i,a_i})(\prod_{j\leq m} Z_-^{r_j,k_j})\}\bullet C^{m,X}(k_1,\ldots,k_m;a_{r_1},\ldots,a_{r_m}).\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}(9)\quad V = 1 + \sum_{m\leq n}\sum_{1\leq h_1<\ldots<h_m\leq n}\sum_{k_j\leq n}\sum_{a\in\underline{\underline{P}}_n} v^{m,a}(h_1,\ldots,h_m;k_1,\ldots,k_m) \\ \bullet C^{m,X}(k_1,\ldots,k_m;h_1,\ldots,h_m),\end{aligned}$$

avec

$$(10)\qquad v^{m,a}(h_1,\ldots,h_m;k_1,\ldots,k_m) = (\prod_{i:\, a_i\neq k_j} Z_-^{i,a_i})(\prod_{j\leq m} Z_-^{a^{-1}_{h_j},k_j})$$

car si $h_1<\ldots<h_m$ et $a\in\underline{\underline{P}}_n$ sont donnés, il existe une suite et une seule

$r_1 < \dots < r_m$ telle que $\{r_i : 1 \le i \le m\} = \{a^{-1}_{h_i} : 1 \le i \le m\}$.

Fixons maintenant $m \geqslant 1$, $h_1 < \dots < h_m$, et $k_1, \dots, k_m \in \{1, \dots, n\}$. On pose $H = \{h_1, \dots, h_m\}$ et $K = \{k_1, \dots, k_m\}$. On va distinguer trois cas.

<u>1er cas</u>: $K \not\subset H$. Il existe $r \le m$ avec $k_r \notin H$, et $s \le m$ avec $h_s \notin K$. Si $a \in \underline{\underline{P}}_n$ on lui associe $a' \in \underline{\underline{P}}_n$ ainsi:

$$a'_i = \begin{cases} k_r & \text{si } a_i = h_s \\ h_s & \text{si } a_i = k_r \\ a_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après (9) il est facile de vérifier que $v^{m,a} = v^{m,a'}$, et comme $(-1)^{|a|} = -(-1)^{|a'|}$ on a

$$\text{(11)} \qquad \sum_{a \in \underline{\underline{P}}_n} (-1)^{|a|}\, v^{m,a}(h_1, \dots, h_m; k_1, \dots, k_m) = 0 .$$

<u>2ème cas</u>: $K \subset H \not\subset K$. Chaque k_j s'écrit $k_j = h_{b_j}$, et il existe $r \ne s$ avec $b_r = b_s$. Si $a \in \underline{\underline{P}}_n$ on lui associe $a' \in \underline{\underline{P}}_n$ ainsi:

$$a'_i = \begin{cases} h_s & \text{si } a_i = h_r \\ h_r & \text{si } a_i = h_s \\ a_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

Là encore il est facile de vérifier que $v^{m,a} = v^{m,a'}$ et que $(-1)^{|a|} = -(-1)^{|a'|}$, donc on a (11).

<u>3ème cas</u>: $K = H$. Il existe alors $b \in \underline{\underline{P}}_m$ avec $k_j = h_{b_j}$. A $a \in \underline{\underline{P}}_n$ on associe encore $a' \in \underline{\underline{P}}_n$ en posant

$$a'_i = \begin{cases} k_j & \text{si } i = a^{-1}_{k_j} \quad (\Longleftrightarrow\ a_i = h_j) \\ a_i & \text{si } i \ne a^{-1}_{k_j} \quad \text{pour tout } j \le m . \end{cases}$$

On a alors

$$v^{m,a}(h_1, \dots, h_m; k_1, \dots, k_m) = \prod_{i \le n} Z_-^{i,a'_i} .$$

Mais l'application: $a \rightsquigarrow a'$ est bijective sur $\underline{\underline{P}}_n$, et $(-1)^{|a|} = (-1)^{|a'|}(-1)^{|b|}$. Donc

$$\begin{aligned} \sum_{a \in \underline{\underline{P}}_n} (-1)^{|a|}\, v^{m,a} &= \sum_{a \in \underline{\underline{P}}_n} (-1)^{|a|} \prod_{i \le n} Z_-^{i,a'_i} \\ &= (-1)^{|b|} \sum_{a' \in \underline{\underline{P}}_n} (-1)^{|a'|} \prod_{i \le n} Z_-^{i,a'_i} = (-1)^{|b|}\, V_- . \end{aligned}$$

En utilisant ceci, et (11), on obtient d'après (9):

$$V = 1 + \sum_{m \le n} \sum_{1 \le h_1 < \dots < h_m \le n} \sum_{b \in \underline{\underline{P}}_m} (-1)^{|b|}\, V_- \bullet C^{m,X}(h_{b_1}, \dots, h_{b_m}; h_1, \dots, h_m) .$$

Enfin $C^{m,X}(h_{b_1}, \dots, h_{b_m}; h_1, \dots, h_m) = C^{m,X}(h_1, \dots, h_m; h_{b_1^{-1}}, \dots, h_{b_m^{-1}})$, $|b^{-1}| = |b|$

et $b \rightsquigarrow b^{-1}$ est une bijection sur $\underline{\underline{P}}_m$. On en déduit que V vérifie (3), d'où le résultat.∎

2 - L'EQUATION AVEC SECOND MEMBRE. Revenons à l'équation (1). f est définie par (6), et $T_0 = 0$, $T_{m+1} = \inf(t > T_m : f(\Delta X_t) = -1)$. On a $\lim_{(m)} \uparrow T_m = \infty$ p.s. Voici alors la généralisation, pratiquement triviale, du théorème de Yoeurp et Yor, avec la formulation qui en est donnée dans [3],§VI-1-b.

THEOREME 2 : La solution Y de (1) se calcule de la manière suivante:

$$(12)\quad \begin{cases} Y_0 = H_0, & Y_{T_m} = Y_{(T_m)-}(I + \Delta X_{T_m}) + \Delta H_{T_m} \\ Y_t = (Y_{T_m} + U(m)_t)\, Z(m)_t & \text{si } T_m \leq t < T_{m+1}, \end{cases}$$

avec

$$(13)\qquad Z(m) = \mathcal{E}(X - X^{T_m})$$

$$(14)\quad U(m)_t^{ij} = \int_{]T_m,t]} \Big\{ \sum_{k\leq n} (Z(m)_{s-}^{-1})^{kj} dH_s^{ik} - \sum_{k,r\leq n} (Z(m)_s^{-1})^{kj} d[X^{rk}, H^{ir}]_s \Big\}$$

pour $i \leq d$, $j \leq n$, $T_m \leq t < T_{m+1}$.

Remarquer que d'après (7), les processus $Z(m)^{-1}$ et $Z(m)_-^{-1}$ sont bien définis, et localement bornés sur $[\![0, T_{m+1}[\![$, donc (14) a un sens.

Démonstration. On définit Y par ces formules, et on vérifie qu'on a bien (1), en regardant séparément ce qui se passe aux temps T_m (pour lesquels la vérification est immédiate) et sur les intervalles $[\![T_m, T_{m+1}[\![$. Pour cela on applique la formule d'Ito, en remarquant qu'on peut remplacer $U(m)$ par $\tilde{U}(m)$ sans rien changer, avec

$$\tilde{U}(m)_t^{ij} = \int_{T_m}^{t\wedge T_{m+1}} \Big\{ \sum_{k\leq n} (Z(m)_{s-}^{-1})^{kj}\, dH_s^{ik} - I_{\{s<T_{m+1}\}} \sum_{k,r\leq n} (Z(m)_s^{-1})^{kj}\, d[X^{rk}, H^{ir}]_s \Big\},$$

mais maintenant $\tilde{U}(m)$ est une semimartingale: il n'y a aucune différence d'avec le cas uni-dimensionnel, auquel nous renvoyons le lecteur.∎

REFERENCES

1 M. IBERO: Intégrales stochastiques multiplicatives et construction de diffusions sur un groupe de Lie. Bull. SMF 100, 175-191, 1976.

2 M. EMERY: Stabilité des solutions des équations différentielles stochastiques, applications aux intégrales multiplicatives stochastiques. Z.W. 41, 241-262, 1978.

3 J. JACOD: Calcul stochastique et problèmes de martingales. Lect. Notes in Math. 714, 1979.

4 P.A. MEYER: Géométrie stochastique sans larmes. A paraitre.

5 C. YOEURP, M. YOR: Espace orthogonal à une semimartingale et applications.