SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

RAJAE ABOULAICH

Intégrales stochastiques généralisées

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 16 (1982), p. 380-383
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__380_0>

Séminaire de Probabilités XVI
1980-81

INTEGRALES STOCHASTIQUES GENERALISEES

par ABOULAICH Rajae

L'objet de cette note est de démontrer le lemme fondamental permettant de construire les intégrales stochastiques généralisées sans utiliser la récurrence transfinie [1]. Nous profitons aussi de cette occasion pour répondre à une question d'Emery concernant ces intégrales. Nous remercions vivement Monsieur C. Stricker pour son aide et son accueil à Strasbourg.

Un ensemble aléatoire J est appelé un intervalle optionnel (resp. prévisible) s'il est optionnel (resp. prévisible) et si toutes ses coupes $J(\omega)$ sont des intervalles (certaines coupes pouvant être fermées d'autres ouvertes, etc ...).

LEMME. Soit $\mathcal{J}$ une classe d'intervalles optionnels (resp. prévisibles) ayant les propriétés suivantes :

a) $\mathcal{J}$ est héréditaire : chaque intervalle optionnel (prévisible) contenu dans un élément de $\mathcal{J}$ appartient aussi à $\mathcal{J}$;

b) $\mathcal{J}$ est stable par réunion disjointe : si J_1 et J_2 appartiennent à $\mathcal{J}$, si leur intersection est vide et si leur réunion est un intervalle, alors leur réunion appartient aussi à $\mathcal{J}$;

c) $\mathcal{J}$ est stable par limite croissante : si (J_n) est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{J}$, sa limite appartient aussi à $\mathcal{J}$;

d) il existe dans $\mathcal{J}$ un recouvrement dénombrable de $[0,\infty[$.

Alors $[0,\infty[$ appartient aussi à $\mathcal{J}$.

DEMONSTRATION. La démonstration se fera en plusieurs étapes.

1) Si T est un temps d'arrêt (prévisible), son graphe appartient à $\mathcal{J}$,

En effet si (J_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{J}$ recouvrant $[0,\infty[$, les intervalles $A_n = [T] \cap J_n \cap (\bigcap_{m<n} J_m^c)$ appartiennent aussi à $\mathcal{J}$ car $A_n \subset J_n$. En utilisant les propriétés b) et c) on montre aisément que $[T] = \bigcup_n A_n$ appartient aussi à $\mathcal{J}$.

2) Dans le cas optionnel on désigne par $\mathcal{J}'$ les éléments de $\mathcal{J}$ qui sont prévisibles. Alors $\mathcal{J}'$ vérifie les propriétés a), b) et c). Montrons qu'il existe aussi un recouvrement dénombrable de $[0,\infty[$ par des éléments de $\mathcal{J}'$. Si (J_n) est une suite d'intervalles de $\mathcal{J}$ recouvrant $[0,\infty[$, on appelle S_n et T_n ses extrémités gauche et droite et on voit que l'intervalle prévisible $]S_n,T_n]$ appartient à $\mathcal{J}'$. Comme $(\bigcup]S_n,T_n])^c$ est prévisible et à coupes dénombrables, il existe une suite de temps d'arrêt prévisibles (U_n) qui recouvrent cet ensemble. Ainsi les intervalles $[U_n]$ et $]S_n,T_n]$ recouvrent $[0,\infty[$ et appartiennent à $\mathcal{J}'$ d'après 1).

3) Nous allons maintenant établir le lemme dans le cas prévisible et le cas optionnel s'en déduira compte tenu de 2). Si J est un intervalle de $\mathcal{J}$ ayant pour extrémités S et T, $]S,T] \cap J^c$ est le graphe d'un temps d'arrêt prévisible que nous noterons T'. D'après 1) $[T']$ appartient à $\mathcal{J}$ et d'après les propriétés a) et b) $]S,T]$ qui est contenu dans $J \cup [T']$ appartient aussi à $\mathcal{J}$. On en déduit qu'il existe un recouvrement dénombrable de $[0,\infty[$ par des intervalles de la forme $[U_n]$ et $]S_n,T_n]$. Si $]S,R]$ et $]S,T]$ sont deux intervalles de $\mathcal{J}$, $]S,R\vee T] =]S,R] \cup]R_{\{R<T\}},T]$ appartient aussi à $\mathcal{J}$ grâce aux propriétés a) et b). A chaque temps d'arrêt S nous associons la borne supérieure essentielle T' des temps d'arrêt T tels que $]S,T]$ appartienne à $\mathcal{J}$. L'ensemble précédent étant stable pour le sup., il existe une suite de temps d'arrêt (T_p) tendant en croissant vers T' telle que $]S,T_p]$ appartienne à $\mathcal{J}$ pour tout p, si bien que $]S,T']$ appartient à $\mathcal{J}$ d'après c) et 1). Nous appliquons maintenant ce procédé aux temps d'arrêt S_n définis précédemment et nous continuerons à noter $]S_n,T_n]$ les intervalles agrandis qui jouissent de la propriété suivante notée (*) : si deux tels intervalles ont une intersection non vide, leurs extrémités droites sont confondues. En effet l'intervalle

$]S_n,T_n] \cup]T_{n\{S_p<T_n\leq T_p\}},T_p]$ appartient à $\mathcal{J}$, donc $T_n = T_p$ par définition de la borne supérieure sur l'ensemble $\{S_p< T_n\leq T_p\}$. Comme T_n et T_p jouent des rôles symétriques, $T_n = T_p$ sur l'ensemble des ω où l'intersection des deux intervalles est non vide. Si on pose $T = \inf\{T_{n\{T_n>T_1\}}\}$ les intervalles $]S_{n\{S_n>T_1\}},T]$ qui appartiennent à $\mathcal{J}$, recouvrent $]T_1,T]$. Or lorsque $]S,T]$ et $]S',T]$ sont des éléments de $\mathcal{J}$, $]S\wedge S',T]$ qui est égal à $]S_{\{S<S'\}},S'] \cup]S',T]$ appartient aussi à $\mathcal{J}$. Par conséquent $]T_1,T]$ qui est la limite croissante d'une suite d'éléments de $\mathcal{J}$, appartient aussi à $\mathcal{J}$, c'est-à-dire $T_1 = T$ par définition de T_1. Appliquant le même raisonnement à chaque T_n, on en déduit que l'adhérence de l'ensemble aléatoire $A = \cup\, [T_n]$ qui est contenue dans la réunion des graphes des S_n, T_n et U_n en vertu de la propriété (*), est un parfait aléatoire dénombrable et sans points isolés, donc vide d'après le théorème de Baire. Ainsi $T_n = \infty$ p.s. pour tout n. Pour conclure la démonstration du lemme on remarque que $[0]$ appartient évidemment à $\mathcal{J}$, que $]0,\infty[$ est la limite d'une suite croissante d'éléments de $\mathcal{J}$ obtenus à partir des intervalles $]S_n,\infty[$ (cf. le raisonnement concernant $]T_1,T]$) et que $[0,\infty[$ est la réunion disjointe de $[0]$ et de $]0,\infty[$.

UN CONTRE -EXEMPLE.

Rappelons d'abord quelques notations et définitions tirées de [1]. Si f est une fonction càdlàg, on peut définir une mesure simplement additive df sur les intervalles bornés par :

$$df([0,t]) = f(t) \ ; \ df([0,t[) = f(t-)$$

et pour chaque intervalle J une nouvelle fonction $f^J = df(J\cap[0,t])$. On dira qu'un processus prévisible H est pseudo-intégrable par rapport à la semimartingale X s'il existe un processus càdlàg Y et une suite (J_n) d'intervalles optionnels recouvrant $[0,\infty[$ telle que pour tout n, H soit intégrable par rapport à la semimartingale X^{J_n} et qu'on ait l'égalité $Y^{J_n} = H.(X^{J_n})$. Le lemme précédent montre immédiatement que pour X et H donnés le processus Y est unique , ce qui nous permettra d'appeler

Y la pseudo-intégrale de H par rapport à X. Soit $(\mathcal{G}_t)$ une filtration telle que pour tout t on ait l'inclusion $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$ et que X soit aussi une semimartingale par rapport à la filtration $(\mathcal{G}_t)$. Est-ce-que H reste pseudo-intégrable par rapport à X dans la filtration $(\mathcal{G}_t)$? L'exemple 2 de [2] nous fournira une réponse négative. Soit B un mouvement brownien réel issu de 0, relativement à sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)$, rendue continue à droite et complétée. Nous désignons par (L_t) le processus du temps local de B en 0, par $(\mathcal{G}_t)$ la filtration obtenue en adjoignant à $\mathcal{F}_0$ toutes les variables aléatoires L_t. Si $X = B.B$, le processus prévisible $H = B^{-1}1_{\{B\neq 0\}}$ est intégrable par rapport à X dans la filtration $(\mathcal{F}_t)$ et l'intégrale $H.X$ est égale à B d'après l'associativité des intégrales stochastiques. Supposons que H soit pseudo-intégrable par rapport à X dans la filtration grossie (on sait d'après un résultat de Jeulin que X reste une semimartingale dans $(\mathcal{G}_t)$). Il existe alors un processus càdlàg Y et des intervalles optionnels J_n recouvrant $[0,\infty[$ tels que $Y^{J_n} = H.(X^{J_n})$. Ainsi Y sera une semimartingale dans l'ouvert aléatoire $\bigcup_n \mathring{J}_n$, $\mathring{J}_n$ désignant l'intérieur de l'intervalle J_n: en effet si $u<v$ sont deux rationnels et si la loi P est restreinte à l'ensemble des ω tels que $]u,v]$ soit contenu dans J_n, $Y^{]u,v]} = H.X^{]u,v]} = B^{]u,v]}$; en faisant varier n,u et v et en appliquant le théorème de convexité 11 de [2], on voit aisément que Y est une semimartingale dans $\bigcup_n \mathring{J}_n$ dont le complémentaire est à coupes dénombrables. La continuité de B et Y (X est une semimartingale continue) et l'égalité $B^{J_n} = Y^{J_n}$ entraînent que $B = Y$, ce qui contredit le fait que $\{B\neq 0\}$, dont le complémentaire est à coupes non dénombrables, est l'ouvert maximal dans lequel B est une semimartingale par rapport à la filtration $(\mathcal{G}_t)$.

REFERENCES

[1] EMERY M. :A generalization of stochastic integration with respect to semimartingales. A paraître dans Annals of Probability.

[2] MEYER P.A. et STRICKER C. : Sur les semimartingales au sens de L. SCHWARTZ. Math. An. and Appl. part B, Adv. in Math. Suppl. Studies, vol. 7B (1981), 577-602.