DOMINIQUE BAKRY

Semimartingales à deux indices

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 16 (1982), p. 355-369
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__355_0>

Université de Strasbourg 1980/81

SEMIMARTINGALES A DEUX INDICES

par Dominique Bakry

Le théorème de Dellacherie-Meyer-Mokobodzky [5,VIII 80] permet de caractériser les semimartingales comme les processus adaptés, continus à droite, tels que l'intégrale stochastique des processus prévisibles élémentaires se prolonge en une mesure sur la tribu prévisible à valeurs dans l'espace L^0. On s'intéresse ici à la situation des processus à deux indices, comme mesure à valeurs dans l'espace L^p , $p\geq 1$: étant donné un espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{F}, P)$, muni de deux filtrations $(\mathbb{F}^1_s)$ et $(\mathbb{F}^2_t)$ satisfaisant à la condition de commutation (F.4) de [4], on connait quatre modèles de semimartingales à deux indices:

-Les processus à variation finie

-Les martingales de L^p , $p>1$

-Certains processus d'un modèle mixte, de la forme $E(A_t/\mathbb{F}^1_s)$, étudiés par Wong et Zakai dans [7], où le processus A_t est à variation finie, adapté à la filtration $\mathbb{F}^2_t$, et satisfait en outre à certaines conditions assez restrictives

-Evidemment, le modèle symétrique obtenu en échangeant les rôles de s et t .

Nous étudions ci dessous les processus $X_{s,t}$ adaptés qui déterminent des mesures sur la tribu prévisible à valeurs L^p . Sous l'hypothèse supplémentaire que, à s et t fixés, $X_{s,t}$ soit une semimartingales par rapport aux filtrations $\mathbb{F}^1_s$ et $\mathbb{F}^2_t$ respectivement (nous disons alors que X est régulière), nous montrons que les semimartingales de L^p se décomposent en somme de quatre processus des types précédents, puis, dans le cas où X définit une mesure sur la tribu plus large des processus 1-prévisibles, nous obtenons une décomposition plus simple, et nous étudions quelques exemples où l'hypothèse de régularité n'est pas toujours satisfaite.

Notations: nous suivons pour l'essentiel celles de [6]; tous nos processus sont indexés par $[0,1]^2$, sur lequel on définit l'ordre partiel:

$$(s,t) \leq (s',t') \text{ ssi } s \leq s' \text{ et } t \leq t'$$

La notation $(s,t) < (s',t')$ signifie que l'inégalité stricte a lieu pour les deux composantes; si z et z' sont deux points de $[0,1]^2$, les notations $]z,z']$, $[z,z']$, etc... se comprennent dès lors d'elles mêmes.

On se donne deux filtrations $(\mathbb{F}^1_s)_{s\in[0,1]}$ et $(\mathbb{F}^2_t)_{t\in[0,1]}$ vérifiant les conditions habituelles ainsi que la condition (F.4) : pour tout (s,t), les espérances conditionnelles $E(./\mathbb{F}^1_t)$ et $E(./\mathbb{F}^2_t)$ commutent; nous notons alors $\mathbb{F}_{s,t}$ la tribu $\mathbb{F}^1_s \cap \mathbb{F}^2_t$.

On note $\mathfrak{B}$ (resp. $\mathfrak{B}^1$, $\mathfrak{B}^2$) l'ensemble des processus élémentaires prévisibles (resp. 1-prévisibles, 2-prévisibles) bornés par 1 en module, i.e. l'ensemble des processus $H(\omega,s,t)$ qui s'écrivent

$$\Sigma_{i=1}^n \Sigma_{j=1}^m h_{i,j}(\omega) 1_{]s_i,s_{i+1}]}(s)\, 1_{]t_j,t_{j+1}]}(t) \quad \text{où } (s_i)_{i=1}^{n+1} \text{ et}$$

$(t_j)_{j=1}^{m+1}$ sont deux subdivisions dyadiques de $[0,1]$ et $h_{i,j}$ des variables aléatoires bornées bornées par 1 mesurables par rapport à $\mathbb{F}_{s_i,t_j}$ (resp. $\mathbb{F}^1_{s_i}$, $\mathbb{F}^2_{t_j}$). La tribu engendrée par $\mathfrak{B}$ (resp. $\mathfrak{B}^1$, $\mathfrak{B}^2$) est la tribu prévisible (resp. 1-prévisible, 2-prévisible); elle est notée P (resp. P^1, P^2).

Si H s'écrit $h1_{]s,s']}1_{]t,t']}$, on définit l'intégrale stochastique de H par rapport à X : c'est la variable aléatoire

$$H.X = h(X_{s',t'} - X_{s',t} - X_{s,t'} + X_{s,t}) \quad \text{et l'on note } H{:}X \text{ le}$$

processus $z \longrightarrow H1_{]0,z]}.X$, $z\in[0,1]^2$.

Par linéarité, cette définition se prolonge au cas où H est un élément de $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}^1$, $\mathfrak{B}^2$. Rappelons qu'un processus à deux indices est dit croissant si $1_{]z,z']}.X \geq 0$, pour tout couple de points (z,z') de $[0,1]^2$, et à variation finie s'il est différence de deux processus croissants.

Enfin, une dernière remarque avant de commencer: à plusieurs endroits, on utilisera des constantes universelles c_p et C_p, qui ne dépendent que de p; bien qu'elles puissent varier d'un bout à l'autre du texte, on ne les distinguera pas, et elles seront toujours notées de la même façon

I. Définitions et premières propriétés

Définition: Soit $p \geq 1$; on dira qu'un processus X est une semimartingale de L^p (resp. une 1-semimartingale, une 2-semimartingale) ssi:

-X est nul sur les axes: $X_{0,t} = X_{s,0} = 0$;

-X est continu à droite en probabilité: $\lim_{z' \to z, z' \geq z} X_{z'} = X_z$ (Prob.)

-X est adapté

- $\|X\|_{S_p(\text{resp.} S_p^1, S_p^2)} = (\text{déf.}) \sup_{H \in \mathfrak{B}(\text{resp.} \mathfrak{B}^1, \mathfrak{B}^2)} \|H.X\|_{L^p} < \infty$

Nous appellerons S_p (resp. S_p^1, S_p^2) l'espace vectoriel de ces processus, que nous munissons de la norme $\| \ \|_{S_p}$:

Proposition 1: S_p est un espace de Banach

Preuve: remarquons que $\|X\|_{S_p} \geq \sup_{z \in [0,1]^2} \|X_z\|_p$; donc, si X^n est une suite de Cauchy dans S_p, X_z^n converge dans L^p, uniformément en $z \in [0,1]^2$; la limite est donc un processus X, nul sur les axes, continu à droite en probabilité, adapté. De plus, si H est un élément de $\mathfrak{B}$, $H.X^n$ converge vers $H.X$ dans L^p, et donc X est un élément de S_p.

Remarque: il en va bien évidement de même pour S_p^1 et S_p^2.

Suivant Bichteler [3], nous pouvons construire l'intégrale stochastique $H.X$, pour tous les processus prévisibles bornés H, de telle manière qu'elle vérifie le théorème de convergence dominée dans L^p. Nous explicitons les premières étapes, qui nous seront utiles par la suite.

Lemme 2: Soit H_n une suite d'éléments de $\mathfrak{B}$, à supports disjoints; il existe une constante universelle C_p, telle que $\|[\Sigma_n (H_n.X)^2]^{\frac{1}{2}}\|_p \leq C_p \|X\|_{S_p}$

Preuve: elle repose sur le lemme classique de Khintchine: si $r_i(w)$ est une suite de Rademacher (v.a.i. prenant les valeurs 1 et -1 avec probabilité $\frac{1}{2}$) sur un espace de probabilité $(W, \underline{\underline{W}}, \mu)$, il existe deux constantes universelles c_p et C_p telles que, pour toute suite de nombres réels (a_i), on ait:

$$c_p(\Sigma_i a_i^2)^{\frac{1}{2}} \leq \|\Sigma_i a_i r_i(w)\|_{L^p(\mu)} \leq C_p(\Sigma_i a_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

Considérons alors, sur un espace $(W, \underline{\underline{W}}, \mu)$ auxiliaire, une suite de Rademacher r_i. Pour tout w dans W, $\Sigma_i r_i(w) H_i$ est un élément de $\mathfrak{B}$, et donc,

$\|\Sigma_i r_i(w) H_i .X\|_p \leq \|X\|_{S_p}$; intégrons par rapport à μ, intervertissons l'ordre de sommation, et appliquons l'inégalité précédente: on obtient le résultat.

Corollaire 3: Sous les hypothèses précédentes, $H_n : X \longrightarrow 0\ (S_p)$

Preuve: si tel n'est pas le cas, il existe une suite extraite H_{n_k} et des éléments K_{n_k} de $\mathfrak{B}$ tels que $\|H_{n_k}K_{n_k}.X\|_p > \varepsilon > 0$. Appliquons le lemme précédent à la suite $R_k = H_{n_k}K_{n_k}$;

$$\Sigma_k(R_k.X)^2 < \infty \text{ (p.s.), d'où } R_k.X \longrightarrow 0 \text{ (p.s.)} ;$$

d'autre part, $|R_k.X| \leq [\Sigma(R_k.X)^2]^{\frac{1}{2}}$, et donc le théorème de convergence dominée s'applique.

Corollaire 4: si A_n est une suite décroissante d'ensembles prévisibles élémentaires, $1_{A_n} : X$ converge dans S_p

Preuve: puisque S_p est complet, si $1_{A_n} : X$ ne converge pas dans S_p, il existe une sous suite A_{n_k} telle que $\|1_{A_{n_{2k+1}}-A_{n_{2k}}} : X\|_{S_p} > \varepsilon > 0$, ce qui contredit le résultat précédent.

Théorème 5: si A_n est une suite décroissante d'ensembles prévisibles élémentaires d'intersection vide, $1_{A_n} : X \longrightarrow 0$ dans S_p

Preuve: d'après le corollaire précédent, il suffit de montrer $\overbrace{\text{que } (1_{A_n} : X)_z}^{\text{pour tout } z}$ converge vers 0 en probabilité. Or, pour tout $\varepsilon > 0$, et tout ensemble prévisible élémentaire A, il existe un ensemble prévisible élémentaire B, dont l'adhérence $\bar{B}$ est incluse dans A, et qui vérifie:

$$\|1_{A-B} : X\|_{S_p} < \varepsilon$$

En effet, si A s'écrit $H \times]z,z']$, prenons $B_n = H \times]z+(\frac{1}{n},\frac{1}{n}),z']$; $1_{A-B_n} : X$ converge vers 0 en probabilité, et y converge donc dans S_p d'après le lemme précédent.

$\varepsilon > 0$ étant donné, choisissons maintenant pour tout n un ensemble B_n d'adhérence incluse dans A_n, de telle façon que $\Sigma_n \|1_{A_n - B_n} : X\|_{S_p} < \varepsilon$; Si B'_n est l'intersection des n premiers B_i, on a alors:

$\|1_{A_n - B'_n} : X\|_{S_p} < \varepsilon$. Mais B'_n est vide à partir d'un certain rang, et donc, pour tout z, $(1_{B'_n}:X)_z$ converge presque sûrement vers 0 , d'où le résultat.

Corollaire 6: Soit X une semimartingale de S_1 ; alors X s'écrit de manière unique $X = M + A$, où A est un processus à variation finie prévisible et M est une martingale faible, i.e. $E(1_{]z,z']}.M/\mathbb{F}_z) = 0$, pour tout $z < z'$;

on a, de plus:

$$\|M\|_{S_1} \leq 2\|X\|_{S_1} \quad ; \quad E(\mathrm{var}.A) \leq \|X\|_{S_1}$$

Où var.A désigne la variation totale de A : $\int_{[0,1]^2} |dA|$

Preuve: l'application $A \longrightarrow E1_A.X$, définie sur les ensembles prévisibles élémentaires, se prolonge, d'après ce qui précède, en une mesure sur la tribu prévisible, bornée par $\|X\|_{S_1}$; d'après le théorème de projection duale prévisible [1], il existe un unique processus à variation finie prévisible A , tel que, pour tout ensemble prévisible élémentaire C , on ait: $E1_C.X = E\int 1_C dA$; on a alors $E\mathrm{var}.A \leq \|X\|_{S_1}$, et $M = X-A$ est une martingale faible.

Si X est un élément de S_p $(p > 1)$, le problème se pose de savoir si la décomposition précédente se fait dans S_p ; dans le cas général, nous ne savons pas répondre à cette question, mais, comme nous allons le voir ci-dessous, la réponse est positive dans deux cas particuliers importants: les semimartingales régulières et les 1-semimartingales.

II. Semimartingales régulières

Définition: Un élément X de S_p est dit régulier si les processus $s \longrightarrow X_{s,1}$ et $t \longrightarrow X_{1,t}$ sont des semimartingales (à un indice) par rapport aux filtrations $\mathbb{F}^1_s$ et $\mathbb{F}^2_t$, respectivement.

Remarquons tout d'abord que ce sont des semimartingales spéciales; en effet, considérons une subdivision dyadique de $[0,1]$: $(0=s_0 < s_1 < \ldots < s_n=1)$, et appliquons le lemme 2 aux processus $H_i(\omega,s,t) = 1_{]s_i,s_{i=1}]}(s)$, $i=0,\ldots,n-1$;

nous obtenons: $\| [\Sigma_i(X_{s_{i+1},1}-X_{s_i,1})^2]^{\frac{1}{2}} \|_p \leq c_p \|X\|_{S_p}$, et donc $[X_{1,\cdot}]^{\frac{1}{2}}$ est dans L^p .

De même, pour tout $t<1$, le processus $s \to X_{s,t}$ est une semimartingale spéciale: en effet, considérons l'ensemble $\mathfrak{B}_t$ des processus prévisibles élémentaires à un indice, dans la filtration $\mathbb{F}_{\cdot,t}$, et désignons par $H.X_{\cdot,t}$ l'intégrale stochastique élémentaire à un indice: si H_n est une suite d'éléments de $\mathfrak{B}_t$ qui converge uniformément vers 0 , $H_n.X_{\cdot,1}$ converge vers 0 en probabilité, tandis que $H_n.(X_{\cdot,1}-X_{\cdot,t})$ converge vers 0 dans L^p , comme on peut le voir en appliquant la définition de S_p aux processus $\bar{H}_n(\omega,s,u) = H_n(\omega,s)1_{]t,1]}(u)$; $H_n.X_{\cdot,t}$ converge donc vers 0 en probabilité, ce qui suffit à montrer que c'est une semimartingale, en vertu du théorème de Dellacherie-Meyer-Mokobodski; cette semimartingale est spéciale pour les mêmes raisons que précédemment.

Soit alors M la partie martingale faible de X ; $M_{\cdot,t}$ est aussi une semimartingale spéciale dans la filtration $\mathbb{F}_{\cdot,t}$, dont la décomposition canonique peut s'écrire: $M_{\cdot,t} = M^1_{\cdot,t} + X^1_{\cdot,t}$.

Soit $t_1<t_2$; puisque M est une martingale faible, $E(M_{\cdot,t_2}-M_{\cdot,t_1}/\mathbb{F}_{\cdot,t_1})$ est une martingale de la filtration $\mathbb{F}_{\cdot,t_1}$; elle s'écrit

$$E(M^1_{\cdot,t_2}-M^1_{\cdot,t_1}/\mathbb{F}_{\cdot,t_1}) + E(X^1_{\cdot,t_2}-X^1_{\cdot,t_1}/\mathbb{F}_{\cdot,t_1})$$

Le premier terme est une martingale, grâce à la propriété (F.4), donc le second aussi; or, c'est un processus à variation finie, continu à droite en probabilité: considérons sa version à trajectoires continues à droite; c'est un processus prévisible dans la filtration $\mathbb{F}_{\cdot,t_1}$: en effet, il s'écrit $E(X^1_{\cdot,t_2}/\mathbb{F}_{\cdot,t_1}) - X^1_{\cdot,t_1}$ et c'est une autre conséquence de (F.4) que d'avoir le premier terme prévisible dans la filtration $\mathbb{F}_{\cdot,t_1}$; ce processus est donc nul, et l'on voit que le processus $t \to X_{s,t}$ est une martingale dans la filtration $\mathbb{F}_{s,t}$, où encore dans la filtration $\mathbb{F}^2_t$, ce qui revient au même.

On peut faire le même travail sur le processus $(s,t) \to M^1_{s,t}$, en échangeant les rôles de s et de t , et l'on obtient une décomposition de X de la forme: $X = M + X^1 + X^2 + A$, où, cette fois ci, M est une martingale à deux indices, A un processus prévisible à variation finie, X^1 est à variation finie prévisible par rapport à la première coordonnée, et une martingale par rapport à la seconde, et X^2 a les propriétés symétriques de celles de X^1 en échangeant les rôles des deux coordonnées; on a alors le résultat suivant:

<u>Théorème 7</u>: Dans la décomposition précédente, chacun des termes est dans S_p et y a une norme majorée par $C_p \|X\|_{S_p}$

Preuve: tout d'abord, chacun des termes est nul sur les axes, adapté, et continu à droite en probabilité. Considérons alors un élément H de $\mathfrak{B}$, et posons

$H_s(\omega,u,t) = H(\omega,u,t)1_{u\leq s}$; le processus $Y_s = H_s.X$ est une semimartingale spéciale dans la filtration $\mathbb{F}^1_s$, dont la partie martingale N est $H_s.(M+X^2)$ et la partie à variation finie prévisible $H_s.(X^1+A)$.

Soit $(s_i)_{i=1}^n$ une subdivision dyadique de $[0,1]$: appliquons le lemme 2 aux processus $(H_{s_{i+1}}-H_{s_i})_{i=1}^{n-1}$; nous obtenons:

$$\|[\Sigma_{i=1}^{n-1}(Y_{s_{i+1}}-Y_{s_i})^2]^{\frac{1}{2}}\|_p \leq C_p \|X\|_{S_p}$$

Nous en déduisons que $\|[Y]_1^{\frac{1}{2}}\|_p \leq C_p \|X\|_{S_p}$, d'où, en n'oubliant pas que la constante C_p peut varier de place en place:

$$\|[N]^{\frac{1}{2}}\|_p \leq C_p \|X\|_{S_p} \quad \text{, et donc:} \quad \|H.(M+X^2)\|_p \leq C_p \|X\|_{S_p} .$$

Par définition de S_p , cela signifie exactement que $\|M+X^2\|_{S_p} \leq C_p \|X\|_{S_p}$.
Par différence, on obtient le même résultat pour X^1+A ; échangeant les rôles des deux coordonnées, et appliquant ce résultat à la semimartingale $M+X^2$, on obtient finalement: $\|M\|_{S_p} \leq C_p \|X\|_{S_p}$, d'où, par différence $\|X^2\|_{S_p} \leq C_p \|X\|_{S_p}$;
Par symétrie, on obtient de même $\|X^1\|_{S_p} \leq C_p \|X\|_{S_p}$, et, finalement, le même résultat pour A.

<u>Remarque</u>: comme dans le cas $p=1$, il est aisé de caractériser les processus prévisibles à variation finie qui sont éléments de S_p : ce sont ceux dont la variation $\int_{[0,1]^2}|dA|$ est dans L^p; de même, nous pouvons caractériser les martingales de S_p au moyen d'une propriété qui ne dépend que de leurs trajectoires: étant donné deux subdivisions dyadiques de $[0,1]$, $\underline{s} = (s_i)_{i=1}^n$ et $\underline{t} = (t_j)_{j=1}^m$, considérons le

quadrillage $\underline{\underline{c}} = \underline{\underline{s}} \times \underline{\underline{t}}$: pour tout point $z=(s_i, t_j)$ de $\underline{\underline{c}}$, notons $\bar{z}$ son successeur (s_{i+1}, t_{j+1}), s'il existe, et $\underline{\underline{c}}^{\circ}$ l'ensemble des points de $\underline{\underline{c}}$ ayant un successeur; enfin, notons $S_{\underline{\underline{c}}}(X) = [\Sigma_{\underline{\underline{c}}^{\circ}}(1_{]z,\bar{z}]} \cdot X)^2]^{\frac{1}{2}}$:

Theorème 8: Soit $p \geq 1$; il existe des constantes universelles c_p et C_p, telles que pour toute martingale M, on ait:

$$(1) \qquad c_p \sup_{\underline{\underline{c}}} \|S_{\underline{\underline{c}}}(M)\|_p \leq \|M\|_{S_p} \leq C_p \sup_{\underline{\underline{c}}} \|S_{\underline{\underline{c}}}(M)\|_p$$

Preuve: la première inégalité est une conséquence immédiate du lemme 2, et est valable pour toute semimartingale X de S_p. Pour montrer la seconde, considérons un élément H de $\mathfrak{B}$, constant en dehors du quadrillage $\underline{\underline{c}}$; on a alors:

$S_{\underline{\underline{c}}}(H:M) \leq S_{\underline{\underline{c}}}(M)$, et il suffit donc de montrer que, pour toute martingale M, $\|M_{1,1}\|_p \leq C_p \sup_{\underline{\underline{c}}} \|S_{\underline{\underline{c}}}(M)\|_p$.

Dans le cas où $p>1$, c'est un résultat bien connu, et on a en plus équivalence entre $\|M_{1,1}\|_p$ et $\sup_{\underline{\underline{c}}} \|S_{\underline{\underline{c}}}(M)\|_p$ [6, par exemple].

Dans le cas $p=1$, la méthode utilisée dans [6] conduit au résultat: $E|M_{1,1}| \leq C \sup_{\underline{\underline{s}}} E[\Sigma_{\underline{\underline{s}}}(M_{s_{i+1},1} - M_{s_i,1})^2]^{\frac{1}{2}}$, où $\underline{\underline{s}}$ parcourt l'ensemble des subdivisions dyadiques de $[0,1]$. Une telle subdivision étant fixée, considérons deux espaces probabilisés auxiliaires, $(W,\underline{\underline{W}},\mu)$ et $(W',\underline{\underline{W}}',\mu')$, avec deux suites de Rademacher $r_i(w)$ et $r_i'(w')$; en notant $\hat{E}$ et $\hat{E}'$ les espérances sur ces espaces, on a d'après le lemme de Khintchine:

$$E[\Sigma_{\underline{\underline{s}}}(M_{s_{i+1},1} - M_{s_i,1})^2]^{\frac{1}{2}} \leq C\, \hat{E}E|\Sigma_{\underline{\underline{s}}} r_i(w)(M_{s_{i+1},1} - M_{s_i,1})|$$

Fixons alors w, et considérons la martingale, dans la filtration $\mathbb{F}_t^2$, $Y_t^w = \Sigma_{\underline{\underline{s}}} r_i(w)(M_{s_{i+1},t} - M_{s_i,t})$; on a, de nouveau:

$$E|Y_1^w| \leq C \liminf_n E[\Sigma_{\underline{\underline{t}}_n}(Y^w_{t_{i+1}} - Y^w_{t_i})^2]^{\frac{1}{2}} \qquad , \text{ où } \underline{\underline{t}}_n = (\tfrac{i}{2^n})_{i=1}^{2^n-1}$$

On peut alors utiliser le lemme de Fatou, puis une nouvelle fois le lemme de khintchine, pour obtenir:

$$\hat{E}\, E\, |Y_1^w| \leq C \sup_{\underline{\underline{s}} \times \underline{\underline{t}}} \hat{E}'\hat{E}\, E|\Sigma_{\underline{\underline{s}} \times \underline{\underline{t}}}\, r_i(w) r_i'(w') Z_{i,j}|$$

où $Z_{i,j} = 1_{](s_i,t_j),(s_{i+1},t_{j+1})]} \cdot M$

Il reste à appliquer une nouvelle fois le lemme de Khintchine, en remarquant que $r_i(w)r'_j(w')$ forment un nouveau système de Rademacher.

III 1-semimartingales

Considérons un élément X de S^1_p ; c'est en particulier un élément de S_p , et il admet une décomposition $X = M + A$, où M est une martingale faible et A un processus prévisible à variation finie. Mais, si nous appliquons le corollaire 6 au cas où la filtration $\mathbb{F}^2_\cdot$ est constamment égale à $\mathbb{F}^1_1$,nous obtenons une décomposition $X = M^1 + A^1$, où $M_{s,t}$ est une martingale en s , pour la filtration $\mathbb{F}^1_s$, et A^1 un processus à variation finie 1-prévisible.

Théorème 9: Les processus M, A, M^1, A^1 sont dans S^1_p , avec une norme majorée par

$$c_p \|X\|_{S^1_p}$$

Preuve: remarquons tout d'abord que les processus M^1 et A^1 sont adaptés; en effet, pour tout t , $X_{\cdot,t} = M^1_{\cdot,t} + A^1_{\cdot,t}$ est la décomposition canonique de la semimartingale spéciale $X_{\cdot,t}$, dans la filtration $\mathbb{F}^1_\cdot$, donc, grâce à la propriété (F.4), c'est sa décomposition spéciale dans la filtration $\mathbb{F}_{\cdot,t}$; $M^1_{s,t}$ et $A^1_{s,t}$ sont donc $\mathbb{F}_{s,t}$ adaptés.

La démonstration du théorème 7 s'applique sans changements pour montrer que $\|M^1\|_{S^1_p} \le c_p \|X\|_{S^1_p}$ et $\|A^1\|_{S^1_p} \le c_p \|X\|_{S^1_p}$.

Pour obtenir le résultat, il suffit donc de remarquer que:

$$\|A\|_{S^1_p} = \|A\|_{S^1_p} = \|\int |dA|\,\|_p \le c_p \|\int |dA^1|\,\|_p = c_p \|A^1\|_{S^1_p} ,$$

la seule chose à démontrer étant l'inégalité du milieu.

Or, pour tout élément H de $\mathcal{E}$, $E(H.A) = E(H.A^1) = E(H.X)$, donc, le processus A est la projection duale prévisible du processus A^1 ; A^1 étant lui même 1-prévisible, A est en fait sa 2-projection duale prévisible [1]. Il suffit donc de remarquer que, si A est un processus à variation finie intégrable, et $\bar{A}$ sa 2-projection duale prévisible, on a:

$$\|\int_{[0,1]^2} |d\bar{A}|\,\|_p \le c_p \|\int_{[0,1]^2} |dA|\,\|_p \quad . \tag{2}$$

On se ramène aussitôt au cas où A est croissant, nul sur les axes. $\bar{A}_{1,\cdot}$ est alors la projection duale prévisible de $A_{1,\cdot}$ dans la filtration $\mathbb{F}^2_\cdot$, et donc:

$\|\bar{A}_{1,1}\|_p \leq C_p \|A_{1,1}\|_p$, d'après les inégalités B.D.G. [5, VI, 100], ce qui est le résultat cherché.

Remarque: l'inégalité (2) est également valable lorsque $\bar{A}$ est la 1-projection duale prévisible de A , et donc aussi si c'est sa projection duale prévisible; il en va de même pour les projections duales optionnelles.

Nous allons étudier maintenant quelques exemples de 1-semimartingales, qui sont des 1-martingales (i.e. $X_{\cdot,t}$ est une martingale par rapport à la filtration $\mathbb{F}^1_\cdot$). Nous pouvons alors supposer que $\mathbb{F}^2_t = \mathbb{F}^1_1$, et nous notons alors $\mathbb{F}^1_s = \mathbb{F}_s$.

1)Etudions d'abord le cas où $A_{s,t} = E(A_t/\mathbb{F}_s)$, A_t étant un processus à variation finie.

Nous avons donné dans [2] un exemple de processus croissant A_t , $A_0=0$, $A_1=1$,et tel que $A_{s,t}$ ne soit pas un élément de S_1 (ni même de l'espace S_0 , analogue de S_1 pour la convergence en probabilité).

Notons, pour tout processus $(Y_s)_{0\leq s\leq 1}$ $Y^* = \sup_s |Y_s|$, et pour toute subdivision $\underline{t} = (t_i)_{i=0}^n$:

$$\mathrm{var}^*_{\underline{t}}(A) = \Sigma_{\underline{t}}(A_{\cdot,t_{i+1}} - A_{\cdot,t_i})^* \quad \text{et} \quad \mathrm{var}^*(A) = \sup_{\underline{t}} \mathrm{var}^*_{\underline{t}}(A) \quad ;$$

Théorème 10: Pour tout $p\geq 1$, $\|A\|_{S_p} \leq C_p \|\mathrm{var}^*(A)\|_p$

Nous nous appuierons sur le lemme suivant:

Lemme 11: Il existe deux constantes universelles c_p et C_p telles que, pour toute famille $(Y^i)_{i=1}^n$ de martingales, on ait:

$$(3) \qquad c_p \|\Sigma_i (Y^i_\cdot)^*\|_p \leq \|\Sigma_i [Y^i_\cdot]_1^{\frac{1}{2}}\|_p \leq C_p \|\Sigma_i (Y^i_\cdot)^*\|_p$$

Preuve: montrons la première partie de l'inégalité; en notant $Y_s^{i*} = \sup_{u\leq s}|Y_s^i|$; on a, pour tout temps d'arrêt T : $E(Y_1^{i*} - Y_{T-}^{i*}/\mathbb{F}_T) \leq 4E([Y^i_{\cdot}]_1^{\frac{1}{2}}/\mathbb{F}_T)$ [5, VII 91]

En sommant, on obtient, en posant $Z_s = \Sigma_i Y_s^{i*}$, $X = \Sigma_i [Y^i]_1^{\frac{1}{2}}$:

$E(Z_1 - Z_{T-}/\mathbb{F}_T) \leq 4E(X/\mathbb{F}_T)$, et, grâce au lemme de Garsia-Neveu [5,VI 99], $\|Z_1\|_p \leq 4p\,\|X\|_p$, ce qui est l'inégalité cherchée.

L'autre sens se traite de la même façon.

Preuve du théorème 10: soit $\underline{t} = (t_i)_{i=1}^n$ une subdivision de $[0,1]$, et $(H_i)_{i=1}^{n-1}$ des processus prévisibles bornés par 1, à un indice; posons $Y_s^i = A_{s,t_{i+1}} - A_{s,t_i}$, pour i=0, ..., n-1, et $\int H_s^i dY_s^i = H^i.Y^i$; on a: $[H^i.Y^i]_1 \leq [Y^i]_1$, et donc:

$$\|\Sigma_i H_i.Y^i\|_p \leq \|\Sigma_i (H_i.Y^i)^*\|_p \leq \frac{1}{c_p}\|\Sigma_i [Y^i]_1^{\frac{1}{2}}\|_p \leq \frac{C_p}{c_p}\|\Sigma_i (Y^i_{\cdot})^*\|_p$$

et la dernière quantité, par définition, est majorée par $\frac{C_p}{c_p}\|\mathrm{var}^*(A)\|_p$.

Remarque: l'inégalité inverse n'a certainement pas lieu, comme le montre l'existence d'éléments de S_p de la forme $E(X_t/\mathbb{F}_s)$, où X_t n'est pas à variation finie: nous en verront des exemples plus bas.

Un exemple intéressant de la situation du théorème précédent est le cas des semimartingales étudié par Wong et Zakai: $A_{s,t} = E(A_t/\mathbb{F}_s)$, où A_t s'écrit $A_t = \int_0^t Y_t d\mu(t)$, où μ est une mesure déterministe sur $[0,1]$, positive de masse 1 , pour fixer les idées; dans ce cas:

(4) $\|\mathrm{var}^*(A)\|_p \leq C_p \|\int_0^1 [Y_{\cdot,t}]_1^{\frac{1}{2}} d\mu(t)\|_p$, où $Y_{s,t}$ désigne la martingale $E(Y_t/\mathbb{F}_s)$

Pour le voir, nous aurons besoin d'un lemme:

Lemme 12: Soit Y_t , $t\in[0,1]$, un processus mesurable intégrable, et $Y_{s,t}$ la martingale $E(Y_t/\mathbb{F}_s)$; supposons que $E\int_0^1 [Y_{\cdot,t}]^{\frac{1}{2}} d\mu(t) < \infty$; on a alors:

(5) $[\int_0^1 Y_{\cdot,t} d\mu(t)]^{\frac{1}{2}} \leq \int_0^1 [Y_{\cdot,t}]^{\frac{1}{2}} d\mu(t)$ p.s.

Preuve: supposons d'abord Y borné; dans le cas il est étagé i.e. il s'écrit $\Sigma_{i=1}^{n} Y^i 1_{]t_i,t_{i+1}]}(t)$, ce n'est rien d'autre que l'inégalité de Kunita-Watanabé. Si Y est un processus mesurable quelconque, il existe une suite Y^n de processus étagés, tels que $E\int [Y_{\cdot,t} - Y^n_{\cdot,t}]^{\frac{1}{2}} d\mu(t) \longrightarrow 0 \ (n \longrightarrow \infty)$: cela peut se voir en utilisant le théorème des classes monotones, en remarquant que, si Y^n converge vers Y , uniformément où en croissant, alors, pour tout t , $Y^n_{\cdot,t}$ converge vers $Y_{\cdot,t}$ dans $\mathbb{H}_1$, et donc $E\int_0^1 [Y_{\cdot,t} - Y^n_{\cdot,t}]^{\frac{1}{2}} d\mu(t)$ converge vers 0 , en utilisant le théorème de convergence dominée.

Soit alors, Y borné étant donné, une suite Y^n de processus étagés tels que $\int [Y_{\cdot,t} - Y^n_{\cdot,t}]^{\frac{1}{2}} d\mu(t)$ converge vers 0 p.s. et dans L^1 . $\int_0^1 Y^n_{\cdot,t} d\mu(t)$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{H}_1$, et converge dans L^1 vers $\int_0^1 Y_{\cdot,t} d\mu(t)$; quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $[\int_0^1 Y^n_{\cdot,t} d\mu(t)]^{\frac{1}{2}}$ converge p.s. vers $[\int_0^1 Y_{\cdot,t} d\mu(t)]^{\frac{1}{2}}$, ce qui nous donne le résultat.

On passe du cas borné au cas général par troncation.

On peut maintenant prouver (4): il suffit de montrer que, pour toute subdivision dyadique $\underline{t}$ de $[0,1]$, on a: $\|\mathrm{var}^*_{\underline{t}}(A)\|_p \leq C_p \|\int_0^1 [Y_{\cdot,t}]^{\frac{1}{2}} d\mu(t)\|_p$

Si $\underline{t} = (t_i)_{i=1}^n$, posons $Z^i = A_{\cdot,t_{i+1}} - A_{\cdot,t_i}$; d'après (3), on a:

$$\|\mathrm{var}_{\underline{t}}(A)\|_p \leq C_p \|\Sigma_i [Z^i]_1^{\frac{1}{2}}\|_p \quad . \text{ Or,}$$

$[Z^i]_1^{\frac{1}{2}} = [\int_{t_i}^{t_{i+1}} Y_{\cdot,t} d\mu(t)]^{\frac{1}{2}}$ et, d'après (5), cette dernière quantité est inférieure où égale à $\int_{t_i}^{t_{i+1}} [Y_{\cdot,t}]^{\frac{1}{2}} d\mu(t)$, d'où le résultat.

2)Supposons que toutes les martingales $X_{\cdot,t}$ (t dyadique) appartiennent à l'espace stable engendré par une même martingale Y de $\mathbb{H}_1$.

Dans ce cas, $X_{s,t}$ s'écrit $\int_0^s H_{u,t}dY_s$; si X est dans S_p , $d[Y]_s dP$ -presque partout, $t \dashrightarrow H_{s,t}$ est à variation finie sur les dyadiques, et on a, en dézignant par $\mathrm{var}(H_{s,.})$ cette variation:

$$(6) \qquad c_p \, \|X\|_{S_p} \le \|\{\int_0^1 \mathrm{var}(H_{s,.})^2 d[Y]_s\}^{\frac{1}{2}}\|_p \le C_p \, \|X\|_{S_p}$$

Preuve: remarquons que, pour tout élément K de $\mathfrak{Z}$,

$$K.X = \int_0^1 \{\int_0^1 K(\omega,s,t)H_{s,dt}\} dY_s$$, l'intégrale entre parenthèses étant une intégrale élémentaire par rapport à $H_{s,.}$; les deux membres de cette égalité sont parfaitement définis lorsque $H(\omega,s,t) = \Sigma_i H^i_s(\omega) 1_{]t_i,t_{i+1}]}(t)$ $\underline{t} = (t_i)_{i=1}^n$ étant une subdivision dyadique de $[0,1]$, $(H^i)_{i=0}^{n-1}$ étant des processus prévisibles quelquonques bornés par 1, et il est clair qu'alors, les deux membres restent égaux; écrivons la pour $H^i_s = k_s \mathrm{signe}(H_{s,t_{i+1}} - H_{s,t_i})$, où k_s est un processus prévisible quelquonque; si nous notons $\mathrm{var}_{\underline{t}}(H_{s,.}) = \Sigma_{\underline{t}} |H_{s,t_{i+1}} - H_{s,t_i}|$, nous obtenons: $\|\int_0^1 k_s \mathrm{var}_{\underline{t}}(H_{s,.})dY_s\|_p \le \|X\|_{S_p}$; ceci étant valable pour tout k prévisible borné, nous avons [6, VII 104] :

$$\| [\int_0^1 \mathrm{var}_{\underline{t}}(H_{s,.})dY_s]^{\frac{1}{2}}\|_p \le C_p \, \|X\|_{S_p}$$; on en déduit la seconde partie de (6), et la première se démontre de la même manière.

<u>Remarque 1</u>: dans le cas $p=2$, la démonstration précédente montre que l'on peut prendre $c_p = C_p = 1$.

<u>Remarque 2</u>: en général, dans les semimartingales du type précédent, $X_{1,.}$ n'est pas à variation finie, comme le montre l'exemple suivant:

$(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{F}_s, P)$ est un espace vérifiant les conditions habituelles, sur lequel existe un mouvement Brownien B_s ; $X_{s,t} = \int_0^s 1_{0 \le B_u \le t} dB_u$ est, pour tout p, un élément de S_p d'après l'étude précédente, mais

$$X_{1,t} = B_1^+ \wedge t + \tfrac{1}{2}(L_1^t - L_1^0)$$

où L_s^t est le temps local en t du mouvement Brownien, et donc n'est pas à variation finie.

3) Enfin, dans le cas $p=2$, il y a une classe de semimartingales particulièrement importante: ce sont les martingales à accroissements fortement orthogonaux: pour tout $t \leq t_1 \leq t_2$, $\langle X_{\cdot,t}, X_{\cdot,t_2} - X_{\cdot,t_1} \rangle = 0$. Alors,

$$\|X\|_{S_2}^2 = EX_{1,1}^2 = E\langle X_{\cdot,1}\rangle_1 \quad .$$

En effet, dans ce cas, $(s,t) \dashrightarrow \langle X_{\cdot,t}\rangle_s$ est un processus croissant (à deux indices), et, si l'on note $\langle\mathbf{X}\rangle_{s,t}$ sa version continue à droite (qui est prévisible), on a, pour tout processus prévisible H, élémentaire ou non, borné:

$$E(H.X)^2 = E\int_{[0,1]^2} H^2 d\langle X\rangle$$

C'est la situation du processus de Wiener à deux indices $\mathbf{W}_{s,t}$ lorsque $\mathbb{F}_s$ est la tribu engendrée par $(\mathbf{W}_{u,v})_{u\leq s, v\leq 1}$, où, plus généralement, pour toutes les martingales fortes au sens de [4].

Références:

[1] Bakry, D.: Théorèmes de section et de projection pour les processus à deux indices; ZW 55, 1981, 55-71.

[2] Bakry, D.: Une remarque sur les semimartingales à deux indices; Sém. Prob. XV, 1981, L.N. 850, 671-672.

[3] Bichteler, K.: Stochastic integration and L^p-theory of semimartingales; à paraitre dans Ann. Prob..

[4] Cairoli, R.; Walsh, J.B.: Stochastic integrals in the plane; Acta Math. 134, 1975, 111-183.

[5] Dellacherie, C.; Meyer, P.A.: Probabilités et potentiel, vol. 2; Paris, Hermann, 1980.

[6] Meyer, P.A.; Théorie élémentaire des processus à deux indices; Processus aléatoires à deux indices, Colloque E.N.S.T.-C.N.E.T. 1980, L.N. 863, 1-39.

[7] Wong, E.; Zakai, M.: Weak martingales and stochastic integrals in the plane, ZW 29, 1974, 109-122.