C. DELLACHERIE

Appendice à : « Intégral de capacités fortement sous-additives »

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 16 (1982), p. 29-40

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__29_0>

APPENDICE A L'EXPOSE PRECEDENT

par C. Dellacherie

1. SOUS-MESURES PLUS OU MOINS MINCES

On se donne ici un espace mesurable "abstrait" $(E,\underline{\underline{E}})$ et on appelle <u>sous-mesure</u> sur $(E,\underline{\underline{E}})$ une application C de $\underline{\underline{E}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ nulle en $\emptyset$, croissante, montante et sous-additive. On trouvera dans [18] et [19] une méthode très intéressante pour construire des sous-mesures.

La <u>variation</u> M de la sous-mesure C est la plus petite mesure majorant C ; une extension immédiate de la proposition 1 de l'exposé montre que, si $(\underline{\underline{P}}_i)$ est une famille "filtrante" de $\underline{\underline{E}}$-partitions finies de E engendrant la tribu $\underline{\underline{E}}$, alors on a, pour tout $B\varepsilon\underline{\underline{E}}$,

$$M(B) = \sup_i \sum_{A\varepsilon \underline{\underline{P}}_i} C(A\cap B),$$

la famille $(\underline{\underline{P}}_i)$ pouvant être choisie dénombrable si $\underline{\underline{E}}$ est séparable.

La sous-mesure C est dite à <u>variation bornée</u> si M est une mesure bornée, <u>séquentiellement continue</u> si $B_n\to B$ implique $C(B_n)\to C(B)$, et <u>mince</u> (ou <u>sans épaisseur</u>) si, $\mathbb{D}$ désignant l'ensemble des familles d'éléments disjoints de $\underline{\underline{E}}$, on a

$$\forall (B_i)\varepsilon\mathbb{D} \quad \{i : C(B_i)>0\} \text{ est dénombrable.}$$

Nous voyons maintenant que, même sans "normalité" (cf la proposition 2 de l'exposé), il est possible de caractériser de manière similaire ces trois propriétés

PROPOSITION 1.- a) <u>La sous-mesure</u> C <u>est à variation bornée ssi on a</u>

$$\forall (B_i)\varepsilon\mathbb{D} \quad \sum_i C(B_i) \text{ est fini}$$

b) <u>La sous-mesure</u> C <u>est séquentiellement continue ssi on a</u>

$$\forall\varepsilon>0 \ \forall (B_i)\varepsilon\mathbb{D} \quad \{i : C(B_i)>\varepsilon\} \text{ est fini}$$

DEMONSTRATION. La nécessité des conditions est triviale. Supposons la condition de a) vérifiée et soit $(A_i)\varepsilon\mathbb{D}$ maximale telle que l'on ait $0 < M(A_i) < \infty$ pour tout i : comme $\sum_i C(A_i)$ est fini, (A_i) est dénombrable (éventuellement vide) et on voit que $\sum_i M(A_i)$ est fini en approchant $M(A_i)$ à 2^{-i} près par une somme de valeurs de C prises sur une partition finie de A_i. Donc, quitte à se restreindre au complémentaire de $\bigcup_i A_i$, on peut supposer que M ne prend que les valeurs 0 et ∞. Mais, dans ces conditions, $C(B)>0$ implique $M(B)=\infty$ et donc l'existence de B^1, B^2 disjoints dans B tels que $C(B^1)>0$ et $C(B^2)>0$. On en déduit, si M prend la valeur ∞, l'existence d'une suite décroissante (B_n) telle qu'on ait $C(B_n - B_{n+1})>0$ et donc $M(B_n - B_{n+1}) = \infty$ pour tout n. D'où, en approchant $M(B_n - B_{n+1})$ par une somme de valeurs de C prise sur une partition finie de $B_n - B_{n+1}$, on déduit l'existence de $(D_n)\in\mathbb{D}$ telle que $\sum_n C(D_n) = \infty$, ce qui contredit notre hypothèse. Supposons la condition de b) vérifiée ; elle est équivalente, grâce à la sous-additivité, à la condition

(+) $\forall\varepsilon>0\ \forall B\in\underline{\underline{E}}\ \forall(B_i)\in\mathbb{D}\ \ \{i : C(B\cup B_i) - C(B) > \varepsilon\}$ est fini

et, sans utiliser à nouveau la sous-additivité, nous allons montrer que (+) jointe à la montée de C implique la descente de C et donc finalement le résultat voulu. Fixons $B\in\underline{\underline{E}}$, posons $D(H) = C(B\cup H) - C(B)$ pour tout $H\in\underline{\underline{E}}$ et soit $B_n\downarrow B$: nous devons montrer que $D(H_n)\downarrow 0$ où $H_n = B_n - B$. Or, si on avait $\inf_n D(H_n)>\varepsilon>0$, alors, comme D est montante, on pourrait trouver une sous-suite (n_k) telle qu'on ait $D(H_{n_k} - H_{n_{k+1}}) > \varepsilon$ pour tout k ce qui contredirait (+).

REMARQUES.- 1) Il est tentant de conjecturer que, comme pour a), il est possible de trouver pour b) une borne uniforme en $(B_i)\in\mathbb{D}$ (pour ε fixé). A notre connaissance, le problème est ouvert, et une réponse négative entrainerait une solution négative à un problème de Maharam cité plus loin.

2) La propriété de minceur implique aussi une propriété apparemment plus forte, utilisée d'ailleurs dans la démonstration de la proposition 2 de l'exposé : si C est mince, alors, pour toute famille $(B_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\underline{\underline{E}}$, il existe une partie dénombrable J de I tel que l'ensemble $B_i - (\bigcup_{j\in J} B_j)$ soit C-négligeable pour tout $i\in I$. Il est remarqué dans [12] que la démonstration de cela n'utilise pas les propriétés de définition d'une sous-mesure.

3) Afin d'illustrer la richesse de la langue française, disons que $B\in\underline{\underline{E}}$ est <u>ténu</u> (resp <u>menu</u>, <u>mince</u>) relativement à une sous-mesure C si la restriction de C à $(B, \underline{\underline{E}}_{|B})$ est à variation bornée (resp séquentiellement continue, mince). Nous avons vu au cours de l'exposé que, même dans une situation très régulière, une sous-mesure C non triviale peut être séquentiellement continue (resp mince) alors que tout ensemble ténu (resp menu) est C-négligeable.

2. CONTROLE D'UNE SOUS-MESURE PAR UNE AUTRE

Rappelons que, étant données deux sous-mesures C_1 et C_2 sur l'espace mesurable $(E, \underline{\underline{E}})$, on dit que C_1 <u>contrôle</u> C_2 si $C_1(B) = 0$ implique $C_2(B) = 0$ et que le contrôle est <u>continu</u> si pour tout $\varepsilon>0$ il existe $\delta>0$ tel que $C_1(B)<\delta$ implique $C_2(B)<\varepsilon$.

En général, C_1 peut contrôler C_2 sans la contrôler continûment, même si C_2 est mince. Cependant, si C_2 est séquentiellement continue (en particulier, si C_2 est une mesure bornée), C_1 contrôle continûment C_2 dès qu'elle la contrôle (en effet, sinon, il existerait une suite (B_n) avec $C_1(B_n)<2^{-n}$ et $C_2(B_n)>\varepsilon>0$; posant $B=\limsup B_n$, on aurait alors $C_1(B)=0$ et $C_2(B)\geq\varepsilon$).

Voici le lemme-clé pour l'étude du contrôle continu, que l'on comparera au lemme 4 de l'exposé

LEMME 1.- Soient C_1 et C_2 deux sous-mesures ; on suppose C_2 finie. Pour tout entier k, il existe $A\in\underline{\underline{E}}$ tel que $C_2(A)\geq k\,C_1(A)$ et qu'on ait

$$[C_2(A\cup H)-C_2(A)]\leq k[C_1(A\cup H)-C_1(A)]$$

pour tout $H\in\underline{\underline{E}}$.

DEMONSTRATION. Nous allons montrer que, pour k fixé, il existe $A\in\underline{\underline{E}}$ vérifiant $C_2(A)\geq k\,C_1(A)$ (ce qui implique $C_1(A)<\infty$) et maximal au sens suivant : pour $H\in\underline{\underline{E}}$, la relation $C_2(A\cup H)\geq k\,C_1(A\cup H)$ implique l'égalité $C_2(A\cup H)=C_2(A)$. Alors, pour $H\in\underline{\underline{E}}$, on aura ou bien $C_2(A\cup H)=C_2(A)$, et donc trivialement l'inégalité de l'énoncé, ou bien $C_2(A\cup H)<k\,C_1(A\cup H)$, d'où l'on déduit l'inégalité de l'énoncé en retranchant $C_2(A)$ au premier membre et $k\,C_1(A)$ au second. Pour trouver A, nous désignons par I l'ensemble des ordinaux dénombrables et nous construisons par récurrence transfinie une suite transfinie croissante $(A_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\underline{\underline{E}}$ comme suit : on pose $A_0=\emptyset$; si A_i est construit, nous regardons s'il existe $B\in\underline{\underline{E}}$ contenant A_i et vérifiant

$$C_2(B)>C_2(A_i)\quad,\quad C_2(B)\geq k\,C_1(B)$$

s'il en existe, nous prenons pour A_{i+1} un de ces B et, s'il n'en existe pas, nous posons $A_{i+1}=A_i$; enfin, si j est un ordinal limite et A_i construit pour $i<j$, nous posons $A_j=\bigcup_{i<j}A_i$, la montée de C_1 assurant qu'on a encore $C_2(A_j)\geq k\,C_1(A_j)$ si on a $C_2(A_i)\geq k\,C_1(A_i)$ pour tout $i<j$. Maintenant, les $C_2(A_i)$, i parcourant I, forment une suite transfinie croissante de réels, qui est donc stationnaire à partir d'un certain ordinal dénombrable i_0 : il ne reste plus qu'à prendre $A=A_{i_0}$.

REMARQUES.- 1) La sous-additivité ne joue aucun rôle là-dedans (sauf si on veut majorer $C_1(A\cup H)-C_1(A)$ par $C_1(H)$ dans l'inégalité) et seule la montée de C_1 a été utilisée. Par ailleurs, ce lemme plus général aurait pu être utilisé dans l'exposé à la place du lemme 4 : le fait que, dans ce dernier, V soit ouvert n'intervient nulle part sérieusement (dans la démonstration du lemme 5 de l'exposé, on peut passer de V_n borélien à K_n compact par capacitabilité, f étant normale).

2) Comme on a $C_1(A)\leq C_2(E)/k$, on voit que $C_1(A)$ est petit pour k grand, et donc aussi $C_2(A)$ si C_2 est continûment contrôlée par C_1.

Comme application de ce lemme, nous donnons une nouvelle démonstration d'un résultat ancien de Mokobodzki (publié tardivement dans [24])

PROPOSITION 2.- Toute mesure bornée m contrôlée par une sous-mesure C est équivalente à une mesure bornée m' majorée par C.

DEMONSTRATION. Le contrôle étant nécessairement continu, pour $\varepsilon>0$ on peut trouver d'après le lemme un entier k et un élément A de $\underline{\underline{E}}$ tels que $m(A)<\varepsilon$, $C(A)<\infty$ et qu'on ait, pour tout $H\in\underline{\underline{E}}$ disjoint de A,

$$m(H) = m(A\cup H) - m(A) \leq k[C(A\cup H) - C(A)] \leq k\,C(H)$$

si bien que, sur A^c, la mesure m est majorée par kC. Comme on peut recommencer avec les restrictions de m et C à A, on voit que, finalement, il existe une suite d'entiers (k_n) et une suite (B_n) d'éléments disjoints de $\underline{\underline{E}}$ épuisant E pour m de sorte que la restriction m_n de m à B_n soit majorée par celle de k_nC. Il ne reste plus alors qu'à prendre pour m' la mesure $\sum_n 2^{-n}\, m_n/k_n$.

REMARQUES.- 1) Cet énoncé se trouve aussi démontré, pour C séquentiellement continue, dans [17]. On prendra garde que le mot "dominé" a des sens très différents dans [24] et dans [17].

2) On voit aisément que toute mesure bornée m est somme d'une mesure contrôlée par C et d'une mesure portée par un élément B de $\underline{\underline{E}}$ tel que $C(B)=0$ (prendre pour B un représentant de l'ess sup pour m des $H\in\underline{\underline{E}}$ tels que $m(H)>0$ et $C(H)=0$). Ainsi, si la sous-mesure C se trouve être contrôlée par une mesure bornée m (ce qui implique que C est mince), on voit que, finalement, C est contrôlée par une mesure qu'elle majore.

3. SOUS-MESURES PLUS OU MOINS NORMALES

Nous dirons qu'une sous-mesure C sur l'espace mesurable $(E,\underline{\underline{E}})$ est accessible si, pour tout $B\in\underline{\underline{E}}$ tel que $C(B)>0$, il existe une mesure bornée m contrôlée par C telle que $m(B)>0$. D'après la proposition 2, cela revient à dire que C est contrôlée par la sous-mesure C' définie par

$$C'(B) = \sup\{\, m'(B)\ ,\ m' \text{ mesure bornée} \leq C \,\}.$$

La sous-mesure C, qui majore évidemment C', est dite normale si elle est égale à C'. Toute sous-mesure à variation bornée est évidemment accessible (mais pas nécessairement normale, même pour E fini : voir par exemple [23]).

La proposition 2 de l'exposé s'étend au cas d'une sous-mesure accessible, avec la même démonstration. Nous récrivons l'énoncé

PROPOSITION 3.- Une sous-mesure accessible C est mince (resp séquentiellement continue) ssi il existe une mesure bornée m qui la contrôle (resp contrôle continûment).

Disons qu'une sous-mesure C non triviale est <u>totalement inaccessible</u> si, pour toute mesure bornée m, il existe $B\in\underline{\underline{E}}$ portant m et C-négligeable, soit encore d'après la proposition 2, si la seule mesure bornée majorée par C est la mesure triviale. Voici deux exemples de telles sous-mesures : le premier appartient au "folklore" ; le second semble peu connu alors qu'il est bien plus intéressant (nous le retrouverons aux §4 et §5)

EXEMPLES.- 1) On prend pour E un espace métrisable compact parfait (et pour $\underline{\underline{E}}$ sa tribu borélienne) et on pose, pour $B\in\underline{\underline{E}}$, $C(B)=0$ ou 1 suivant que B est maigre ou non. Il est bien connu que la sous-mesure C ainsi définie est mince et totalement inaccessible (et qu'en outre on a "bien souvent" $C(B)=1$ tandis que $C(K)=0$ pour tout compact K inclus dans B).

2) Davies et Rogers ont construit dans [20] un espace métrique compact (E,d) et une fonction croissante continue h de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ tels que la h-mesure de Hausdorff Λ^h ne prenne que les valeurs 0 et ∞ et soit totalement inaccessible. Rappelons briévement la construction de Λ^h à partir de la distance d et la fonction h. Pour $B\in\underline{\underline{E}}$ non vide, soit $\mathbb{R}_\varepsilon(B)$ l'ensemble des recouvrements dénombrables $\underline{\underline{R}}$ de B par des ensembles A de diamètre $d(A)\leq\varepsilon$, $\varepsilon>0$ fixé, et posons

$$\Lambda^h_\varepsilon(B) = \inf_{\underline{\underline{R}}\in\mathbb{R}_\varepsilon(B)} \sum_{A\in\underline{\underline{R}}} h[d(A)]$$

On définit ainsi, pour chaque $\varepsilon>0$, une sous-mesure Λ^h_ε (la sous-additivité est triviale, mais la montée est loin de l'être !) et, quand ε décroit vers 0, Λ^h_ε croît vers Λ^h, qui est une mesure. Par ailleurs, on voit aisément que les sous-mesures Λ^h_ε et la mesure Λ^h ont les mêmes ensembles négligeables. Maintenant, si $d(E)=a$, on voit aussi aisément que Λ^h_a descend sur les compacts, et est donc une capacité - nous dirons donc que c'est une <u>sous-mesure capacitaire</u>. Revenons alors à l'exemple de Davies et Rogers : Λ^h_a y est une sous-mesure capacitaire totalement inaccessible ; cependant, elle n'est pas mince.

Ainsi, il peut exister sur un espace métrisable compact une sous-mesure capacitaire totalement inaccessible. Et une telle sous-mesure C est pathologique au sens de [23],[17],[25] : la seule mesure <u>simplement</u> additive, bornée, u majorée par C est la mesure triviale (en effet, comme C est une capacité, la mesure $u^{\#}$ du lemme 3 de l'exposé, qui a même masse que u, est encore majorée par C : on a $u^{\#}\leq u$ sur les ouverts, donc $u^{\#}\leq C$ sur les ouverts, d'où sur les compacts et finalement sur les boréliens par capacitabilité).

Par contre, on ne sait toujours pas (à notre connaissance) s'il existe une sous-mesure séquentiellement continue (sur une espace abstrait, ou sur un espace métrisable compact - cela revient au même) qui ne soit pas accessible : c'est le problème des "sous-mesures de Maharam" abordé dans [23],[17],[25]. En fait, je ne connais même pas d'exemple, sur un espace métrisable compact, de sous-mesure capacitaire et mince qui ne soit pas accessible. Enfin, un problème du même genre est, à ma connaissance, toujours ouvert en théorie des mesures de Hausdorff, à savoir si, sur un espace métrique compact, une h-mesure mince est nécessairement σ-finie (ou, tout au moins, accessible).

4. NORMALITE ET FORTE SOUS-ADDITIVITE

Les lemmes 1 et 2 de l'exposé sont encore valables si on travaille sur un espace mesurable $(E,\underline{\underline{E}})$, et une démonstration analogue au début de celle de la proposition 4 de l'exposé permet d'établir le résultat (plus ou moins) bien connu suivant

PROPOSITION 4.- Une fonction croissante C de $\underline{\underline{E}}$ dans $\mathbb{R}_+$, nulle en $\emptyset$, est fortement sous-additive ssi, pour tout $A,B \in \underline{\underline{E}}$ tels que $A \subseteq B$, il existe une mesure simplement additive u majorée par C telle qu'on ait $u(A) = C(A)$ et $u(B) = C(B)$. De plus, si C est fortement sous-additive, alors, pour toute famille $(B_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\underline{\underline{E}}$ totalement ordonnée par inclusion, il existe une mesure simplement additive u majorée par C telle qu'on ait $u(B_i) = C(B_i)$ pour tout $i\in I$.

qui implique, de manière évidente,

COROLLAIRE.- Une sous-mesure finie, fortement sous-additive et séquentiellement continue, est nécessairement normale.

Supposant maintenant E métrisable compact, nous apportons quelques précisions sur "l'écart" existant entre normalité et forte sous-additivité. D'abord, étant donné le point a) de la proposition 4 de l'exposé, on voit aisément que "la plupart" des capacités normales ne sont pas fortement sous-additives : dans le cas où $C(B) = \sup (m_1(B),m_2(B))$ où m_1 et m_2 sont deux mesures distinctes de masse 1, C n'est fortement sous-additive que si m_1 et m_2 sont des mesures de Dirac. Ensuite, comme toute sous-mesure à valeurs dans $\{0,1\}$ est fortement sous-additive, il n'est pas étonnant qu'il existe des sous-mesures fortement sous-additives qui ne sont pas normales (telle est la sous-mesure associée à la catégorie de Baire au §3). Cela dit, il est quand même surprenant qu'il existe une telle sous-mesure vérifiant le théorème de capacitabilité : c'est le cas pour la sous-mesure C obtenue à partir de la sous-mesure capacitaire Λ_a^h de Davies et Rogers en posant $C(B) = 0$ ou 1 suivant que $\Lambda_a^h(B) = 0$ ou est >0 (noter que C est limite d'une suite croissante de capacités).

5. SOUS-MESURES NORMALES ET FORMES SOUS-LINEAIRES

Nous nous contenterons de considérer le cas où E est un espace métrisable compact. Notant $\mathbf{B}^+$ l'ensemble des fonctions boréliennes ≥ 0, nous dirons qu'une application p de $\mathbf{B}^+$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ est une *sous-intégrale* si elle est nulle en 0, croissante, montante et sous-linéaire, et que c'est une sous-intégrale *normale* si on a $p(f) = \sup m(f)$, $m\varepsilon\mathbf{M}$, $m\leq p$ pour tout $f\varepsilon\mathbf{B}^+$ où, évidemment, "$m\leq p$" signifie "$\forall g\varepsilon\mathbf{B}^+$ $m(g)\leq p(g)$". Enfin nous dirons que la sous-intégrale p est *capacitaire* si elle est finie et descendante sur l'ensemble $\mathbf{C}^+_\delta$ des fonctions s.c.s. ≥ 0 finies. Un argument de capacitabilité montre qu'une sous-intégrale normale ou capacitaire est uniquement déterminée par sa restriction à $\mathbf{C}^+_\delta$, et même, dans le cas capacitaire, par sa restriction à l'ensemble $\mathbf{C}^+$ des fonctions continues ≥ 0 grâce à la descente. La proposition suivante est alors une conséquence simple du théorème de Hahn-Banach

PROPOSITION 5.- *Toute sous-intégrale capacitaire* p *est normale, et l'application qui à* p *associe* $\{m\varepsilon\mathbf{M} : m\leq p\}$ *est une bijection de l'ensemble des sous-intégrales capacitaires sur celui des parties convexes compactes héréditaires de* $\mathbf{M}$.

REMARQUES.- 1) La bijection s'étend aux topologies : la topologie de la convergence simple sur $\mathbf{C}^+$ pour les sous-intégrales capacitaires (que nous avons introduite au §5 de l'exposé) correspond à la topologie de Hausdorff sur les convexes compacts héréditaires de mesures.

2) Donc, contrairement à ce qui se passait pour les sous-mesures, ici "capacitaire" implique "normale". On retrouve cependant le décalage en considérant des sous-intégrales un peu moins régulières que les capacitaires : la semi-norme "du type L_∞" associée à la h-mesure de Davies et Rogers fournit une sous-intégrale sous-modulaire, égale à la limite d'une suite croissante de "capacités fonctionnelles", et pourtant totalement inaccessible.

Toute sous-mesure normale c s'étend en une sous-intégrale normale $\bar{c}$ par $\bar{c}(f) = \sup m(f)$, $m\varepsilon\mathbf{M}$, $m\leq c$ et inversement toute sous-intégrale (normale ou non) p induit une sous-mesure $\hat{p}$ par $\hat{p}(B) = p(1_B)$. Dans un sens on a clairement $\hat{\bar{c}} = c$ et dans l'autre $\bar{\hat{p}} \geq p$ sans qu'il y ait forcément égalité : même pour p capacitaire, on peut avoir $m\leq\hat{p}$ sans avoir $m\leq p$ car il y a trop peu d'indicatrices de compacts dans $\mathbf{C}^+_\delta$. Ainsi une capacité normale c peut avoir un prolongement en une sous-intégrale capacitaire autre que $\bar{c}$: cela n'a rien d'exceptionnel comme nous allons le voir à propos des capacités fortement sous-additives.

Un autre procédé, classique depuis [4], pour étendre une capacité positive c (sans hypothèse de sous-additivité) en une "capacité fonctionnelle" $\breve{c}$ est de poser $\breve{c}(f) = \int_0^\infty c(\{f \geq t\})\,dt$ ($= \int_0^\infty c(\{f > t\})\,dt$) pour toute $f \in \underline{\underline{B}}^+$. Rappelons que cela ne fournit une fonctionnelle sous-additive, et donc une sous-intégrale, que si c est <u>fortement</u> sous-additive. Et on a alors $\breve{c}(f) = \bar{c}(f)$: comme $m(f) = \int_0^\infty m(\{f \geq t\}\,dt$ pour toute $m \in \underline{\underline{M}}$, on a $\bar{c}(f) \leq \breve{c}(f)$ dès que c est une sous-mesure normale et, si c est une capacité fortement sous-additive, la proposition 4 de l'exposé implique que pour toute $f \in \underline{\underline{C}}_\delta^+$ il existe $m \leq c$ telle que $m(\{f \geq t\}) = c(\{f \geq t\})$ pour tout t, d'où l'égalité $\bar{c}(f) = \breve{c}(f)$ pour $f \in \underline{\underline{C}}_\delta^+$ puis pour $f \in \underline{\underline{B}}^+$ par capacitabilité. Cela n'implique nullement que, pour c capacité fortement sous-additive, $\bar{c}$ en soit le seul prolongement en une sous-intégrale : les sous-intégrales capacitaires p rencontrées couramment en théorie du potentiel, qui sont du type "$p(f) = \sup m(f)$, m balayée de ε_x", induisent une capacité $\hat{p}$ alternée d'ordre infini dont, la plupart du temps, le prolongement $\bar{\hat{p}}$ est distinct de p (et moins intéressant que p !).

6. EXTENSIONS D'UNE SOUS-MESURE A L'ENSEMBLE DES PARTIES

Lorsqu'on dispose d'une sous-mesure c sur un espace mesurable $(E, \underline{\underline{E}})$, on peut l'étendre en une sous-mesure c^* sur $(E, \underline{\underline{P}}(E))$ par le procédé habituel d'extériorisation : on pose $c^*(A) = \inf c(B)$, $B \supseteq A$, $B \in \underline{\underline{E}}$ pour tout $A \in \underline{\underline{P}}(E)$. Si de plus c est normale, il existe un autre prolongement naturel de c en une sous-mesure c^+ sur $(E, \underline{\underline{P}}(E))$: il est obtenu en posant $c^+(A) = \sup m^*(A)$, $m \in \underline{\underline{M}}$, $m \leq c$ pour tout $A \in \underline{\underline{P}}(E)$. On a évidemment $c^+ \leq c^*$ mais pour tout $A \notin \underline{\underline{E}}$ il existe une sous-mesure normale c telle que $c^+(A) = 0$ et $c^*(A) \neq 0$ (il suffit de prendre pour $\{m \in \underline{\underline{M}} : m \leq c\}$ l'ensemble des mesures de Dirac ε_x où x parcourt A^c). Bien entendu, on a $c^+ = c^*$ lorsque c est une sous-mesure normale mince.

Même si c est une capacité normale sur E métrisable compact, on ne peut espérer avoir, en général, l'égalité $c^+(A) = c^*(A)$ pour toute partie universellement mesurable A (et même pour toute partie coanalytique : voir [21] pour un contre-exemple sous l'axiome V = L de Goedel). Cependant le théorème de capacitabilité assure que, dans ce cas, on a l'égalité $c^+(A) = c^*(A) = \sup c(K)$, $K \subseteq A$, $K \in \underline{\underline{K}}$ pour toute partie analytique A, et, d'après [21], ce résultat est encore vrai si on suppose seulement que c est une <u>sous-mesure analytique</u>, i.e. une sous-mesure finie telle qu'il existe une partie analytique γ de $\underline{\underline{M}}$ de sorte que $c(B) = \sup_{m \in \gamma} m(B)$ pour tout $B \in \underline{\underline{E}}$ (une telle sous-mesure est évidemment normale).

On a vu au cours du §5 de l'exposé (cf théorème 6-b)) que l'épaisseur e d'une capacité normale c est une sous-mesure analytique : on a donc $e^+(A) = e^*(A)$ pour tout analytique A. Mais l'épaisseur admet d'autres prolongements naturels que e^+ et e^* : en revenant à la définition de e au §1 de l'exposé et en y prenant $B\varepsilon\underline{\underline{P}}(E)$ quelconque (mais en y gardant les B_i boréliens), ou encore en étendant convenablement la formule de la proposition 5 de l'exposé (y remplacer c par c^+ ou c^* et l'intégrale par l'intégrale supérieure). Toutes ces extensions, distinctes en général sur $\underline{\underline{P}}(E)$, coincident sur les analytiques : elles sont toutes majorées par e^*, coincident avec e sur les compacts, et on a $e^*(A) = \sup e(K)$, $K \subseteq A$, $K\varepsilon\underline{\underline{K}}$ pour A analytique.

7. SOUS-MESURES ET SOUS-INTEGRALES ANALYTIQUES

Nous travaillons ici sur un espace métrisable compact E et, comme nous avons déjà défini ci-dessus la notion de sous-mesure analytique, nous développerons ici plutôt le côté "sous-intégrale", laissant au lecteur le soin d'ajuster vocabulaire et notations au cas des sous-mesures.

Etant donnée une sous-intégrale normale p telle que $p(1) < \infty$, nous dirons qu'une partie π de $\underline{\underline{M}}$ est une <u>assise</u> de p (et notons $p = p_\pi$) si on a $p(f) = \sup_{m\varepsilon\pi} m(f)$ pour tout $f\varepsilon\underline{\underline{B}}^+$. La sous-intégrale p admet en général de nombreuses assises et, parmi elles, une <u>assise maximale</u> $\Pi(p)$ égale à $\{m\varepsilon\underline{\underline{M}} : m \leq p\}$. Lorsque π est compact, la sous-intégrale p_π est capacitaire et, d'après le théorème de Hahn-Banach, le compact $\Pi(p)$ est l'enveloppe convexe héréditaire fermée de π ou encore, ce qui revient au même pour π compact, l'enveloppe fortement convexe héréditaire de π (rappelons qu'une partie bornée A de $\underline{\underline{M}}$ est dite fortement convexe si, pour toute probabilité Q sur $\underline{\underline{M}}$ telle que $Q^*(A) = 1$, le barycentre de Q appartient à A). Signalons au passage que p_π est séquentiellement continue ssi $\Pi(p_\pi)$ est $\underline{\underline{B}}^+$-compact - nous notons ainsi le fait d'être compact pour la topologie de la convergence simple sur $\underline{\underline{B}}^+$, topologie bien plus fine que la topologie vague (et bien moins fine que la topologie de la norme où $\|m_1 - m_2\| = \sup |m_1(f) - m_2(f)|$, $f\varepsilon\underline{\underline{C}}$, $\|f\| \leq 1$ pour $m_1, m_2 \varepsilon \underline{\underline{M}}$).

La sous-intégrale normale p est dite <u>analytique</u> si elle admet une assise analytique π. On voit sans peine que l'assise maximale $\Pi(p)$ est fortement convexe et le théorème de Hahn-Banach entraine encore qu'elle est l'enveloppe convexe héréditaire $\underline{\underline{B}}^+$- fermée de l'assise π : cela ne fait pas intervenir l'analyticité de π et, en retour, cela ne permet pas de démontrer que $\Pi(p)$ est analytique si π l'est - du moins à première vue. On a cependant le résultat suivant, dû à Mokobodzki

THEOREME 1.- <u>Si</u> π <u>est une partie analytique bornée de</u> $\underline{\underline{M}}$, <u>alors</u> $\Pi(p_\pi)$ <u>est l'enveloppe fortement convexe héréditaire normiquement fermée de</u> π. <u>Cela implique que</u> $\Pi(p_\pi)$ <u>est analytique</u>.

REMARQUES.- 1) On obtient donc une bijection naturelle entre les sous-intégrales analytiques et certaines parties convexes de $\underline{\underline{M}}$.

2) On a vu plus haut que, même pour π compact, l'assise maximale $\Gamma(c_\pi)$ de la sous-mesure c_π peut être strictement plus grande que l'assise maximale $\Pi(p_\pi)$ de la sous-intégrale p_π. Je ne sais pas si $\Gamma(c_\pi)$ est encore analytique pour π analytique.

3) La proposition 5 et le théorème 1 suggèrent fortement que, pour ce qui nous concerne, la notion de "sous-intégrale" est plus intéressante que celle de "sous-mesure". Nous avons cependant, dans l'exposé, privilégié la notion de "sous-mesure" car il eût semblé sans doute artificiel d'introduire l'épaisseur comme sous-intégrale.

Voici, pour terminer, un résultat sur l'épaisseur d'une sous-mesure analytique. L'ensemble des capacités normales y est muni de la topologie vague introduite au §5 de l'exposé

THEOREME 2.- L'épaisseur e d'une sous-mesure analytique c est elle-même une sous-mesure analytique. De plus, il existe une partie analytique G de l'espace des capacités normales telle qu'on ait

$$c(A) = \sup_{g \in G} g(A) \quad , \quad e(A) = \sup_{g\in G} e_g(A)$$

pour toute partie analytique A de E, où e_g est l'épaisseur de g.

Cela implique que les propositions 3 et 5 de l'exposé sont encore vraies si c y est une sous-mesure analytique (et B y est analytique dans E).

8. INTEGRALE DE SOUS-MESURES FORTEMENT SOUS-ADDITIVES

Les résultats du §3 de l'exposé peuvent être étendus selon deux directions : en considérant un espace mesurable abstrait $(E,\underline{\underline{E}})$ en ce qui concerne les théorèmes 3 et 4, et en considérant des sous-mesures analytiques C_ω sur E métrisable compact en ce qui concerne le théorème 5.

Voyons d'abord, rapidement, le premier type de généralisation. On a vu aux §1 et §4 de cet appendice qu'on pouvait étudier la structure des sous-mesures à variation bornée et des sous-mesures séquentiellement continues, fortement sous-additives, dans un cadre abstrait. Et le lecteur s'est sans doute aperçu que, pour démontrer les théorèmes 3 et 4 de l'exposé, il suffisait de travailler sur un espace mesurable séparable $(E,\underline{\underline{E}})$ - la séparabilité étant sans doute indispensable pour le calcul simultané des variations sur une même suite de partitions. Or, il est bien connu que, quitte à passer au quotient selon les atomes, un espace mesurable séparable a même structure qu'un espace métrisable séparable E muni de sa tribu borélienne $\underline{\underline{E}}$. Un tel espace se plonge dans un espace métrisable compact E° et une sous-mesure C sur $(E,\underline{\underline{E}})$ induit une sous-mesure C° sur $(E°,\underline{\underline{E}}°)$ en posant $C°(B) = C(B\cap E)$ pour tout $B\in\underline{\underline{E}}°$. Et C° se trouve être à variation bornée (resp séquentiellement continue, fortement sous-additive) ssi C l'est. On voit finalement qu'on peut ramener aisément la situation abstraite envisagée à la situation topologique de l'exposé. Le premier type de généralisation est donc quelque peu illusoire.

Par contre, la généralisation du théorème 5 de l'exposé, en y conservant E métrisable compact (on pourrait y prendre plus généralement E souslinien, mais ce serait en fait une "généralisation illusoire" comme ci-dessus), mais en considérant des sous-mesures analytiques C_ω est intéressante (et non triviale). Pour simplifier, nous supposerons ici que notre espace probabilisé $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ est constitué d'un espace métrisable compact Ω muni de la tribu complétée $\underline{\underline{F}}$ de sa tribu borélienne pour une probabilité P. Nous dirons alors qu'une famille $(\phi_\omega)_{\omega\in\Omega}$ de sous-mesures normales finies sur E est une <u>famille analytique de sous-mesures</u> s'il existe une partie analytique γ de $\underline{\underline{M}}\times\Omega$ telle que, pour tout $\omega\in\Omega$, la coupe $\gamma(\omega)$ soit une assise de ϕ_ω - ce qui implique que chaque ϕ_ω est une sous-mesure analytique. Nous avons vu deux exemples d'une telle famille au cours de l'exposé : à la remarque suivant le corollaire du théorème 5 (extension de la situation canonique au cas où F est une partie analytique de $E\times\Omega$), et au point b) du théorème 6. Il est vrai, sans être évident, que l'intégrale $\int\phi_\omega\, d\omega$ d'une famille analytique (ϕ_ω) de sous-mesures est une sous-mesure analytique si elle est finie.

Nous nous donnons maintenant une famille analytique $(C_\omega)_{\omega\in\Omega}$ de sous-mesures sur E. D'abord, une extension du théorème 2 de l'appendice permet de montrer que la famille $(e_\omega)_{\omega\in\Omega}$ des épaisseurs correspondantes est aussi une famille analytique de sous-mesures. Et on a alors le résultat suivant, dû à Feyel, en supposant $(C_\omega)_{\omega\in\Omega}$ intégrable

THEOREME 3.- <u>Si chaque</u> C_ω <u>est fortement sous-additive</u>, <u>alors l'épaisseur</u> e <u>de</u> $C=\int C_\omega\, d\omega$ <u>est égale à</u> $\int e_\omega\, d\omega$, <u>intégrale des épaisseurs des</u> C_ω.

9. DERNIERE MINUTE

Louveau saurait résoudre, d'une manière très précise, le problème posé à la remarque 2) suivant le théorème 5 de l'exposé (extension du théorème de Lusin-Novikov sur les boréliens à coupes dénombrables). Comme c'est "tout frais", nous n'en dirons pas plus dans ce volume.

BIBLIOGRAPHIE

Pour [1] à [16], voir la bibliographie de l'exposé précédent.

[17] CHRISTENSEN (J.P.R.) : Some results with relation to the control measure problem (L.N. n°644, p ?, Springer 1978)

[18] DAVIES (R.O.) : Measure of Hausdorff type (J london Math Soc 1, p 30-34, 1969)

[19] : Sion-Sjerve measures are of Haussdorf type (J London Math Soc 5, p 526-528, 1972)

[20] DAVIES (R.O.), ROGERS (C.A.) : The problem of subsets of finite positive measure (Bull London Math Soc 1, p 47-54, 1969)

[21] DELLACHERIE (C.) : Sur la construction des noyaux boréliens (Sém Proba X, L.N. n°511, p 545-577, Springer 1976)

[22] DELLACHERIE (C.), MOKOBODZKI (G.) : Deux propriétés des ensembles minces (Sém Proba XII, L.N. n°649, p 564-566, 1978)

[23] HERER (W.), CHRISTENSEN (J.P.R.) : On the existence of pathological submeasures and the construction of exotic topological groups (Math Ann 213, p 203-210, 1975)

[24] MOKOBODZKI (G.) : Domination d'une mesure par une capacité (Sém Proba XII, L.N. n°649, p 489-490, Springer 1978)

[25] TALAGRAND (M.) : A simple example of pathological submeasure (Math Ann 252, p 97-102, 1980)