CLAUDE DELLACHERIE
ÉRIK LENGLART

Sur des problèmes de régularisation, de recollement et d'interpolation en théorie des processus

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 16 (1982), p. 298-313
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__298_0>

SUR DES PROBLEMES DE REGULARISATION, DE RECOLLEMENT ET D'INTERPOLATION EN THEORIE DES PROCESSUS

par C. Dellacherie et E. Lenglart

Soit $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ un espace probabilisé complet muni d'une filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$ vérifiant les conditions habituelles ; les processus que nous considérerons seront indexés par $\overline{\mathbb{R}}_+$ et à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Nous dirons qu'une partie Θ de l'ensemble $\mathcal{T}$ de tous les t.d'a. est une <u>chronologie</u> si elle contient les temps 0 , $+\infty$ et est stable pour sup et inf (finis). Etant donnée une chronologie Θ, nous dirons qu'un t.d'a. T est Θ-<u>étagé</u> s'il existe une partition finie $A_1,\dots,A_n$ de Ω et $T_1,\dots,T_n \in \Theta$ tels qu'on ait $A_i \in \underline{\underline{F}}_{T_i}$ et $T = T_i$ sur A_i pour $i = 1,\dots,n$, et nous désignerons par $\boxed{\Theta}$ l'ensemble des t.d'a. Θ-étagés : comme Θ contient $+\infty$, il est clair que le t.d'a. T est Θ-étagé ssi son graphe est contenu dans la réunion des graphes d'une suite finie d'éléments de Θ, et que $\boxed{\Theta}$ est alors la plus petite chronologie contenant Θ et stable par découpage (i.e. $T\in\boxed{\Theta}$ et $A\in\underline{\underline{F}}_T \Rightarrow T_A \in \boxed{\Theta}$). Une famille $\mathbf{X} = (X(T))_{T\in\Theta}$ de v.a. indexée par la chronologie Θ sera appelée un Θ-<u>système</u> si elle vérifie la condition de compatibilité

pour tout $S,T \in \Theta$, on a $X(S) = X(T)$ p.s. sur $\{S = T\}$

et la condition d'adaptation

pour tout $T\in\Theta$, $X(T)$ est $\underline{\underline{F}}_T$-mesurable.

Il est clair que tout Θ-système $\mathbf{X}$ admet une extension, essentiellement unique, en un $\boxed{\Theta}$-système, que nous noterons encore $\mathbf{X}$. Nous dirons enfin qu'un processus optionnel $X = (X_t)$ <u>agrège</u> le Θ-système $\mathbf{X} = (X(T))_{T\in\Theta}$ si on a $X_T = X(T)$ p.s. pour tout $T\in\Theta$. Tout processus optionnel se désagrège évidemment en un Θ-système, mais l'opération inverse est bien plus délicate. Munissons Θ et l'ensemble V des v.a. de la topologie de la convergence en probabilité ; pour que $\mathbf{X}$ soit agrégeable, il est nécessaire que $\mathbf{X}$ soit une application mesurable de Θ dans V, à valeurs dans une partie séparable de V ; c'est suffisant si $\Theta = \overline{\mathbb{R}}_+$ d'après un théorème classique de Doob et le théorème de projection optionnelle (noter que, pour $\Theta = \overline{\mathbb{R}}_+$, un Θ-système $\mathbf{X}$ est tout simplement un processus adapté, et que X agrégeant $\mathbf{X}$ est alors une modification optionnelle de $\mathbf{X}$), mais ce n'est pas suffisant si $\Theta = \mathcal{T}$ comme le montre le contre-exemple suivant de Mokobodzki : on prend $\Omega = [0,1]$, $\underline{\underline{F}}$ = tribu de Lebesgue, P = mesure de Lebesgue, $\underline{\underline{F}}_t = \underline{\underline{F}}$ pour tout t et on considère le $\mathcal{T}$-système $\mathbf{X}$ où X(T) est l'indicatrice de l'ensemble des ω tels que la loi de T charge T(ω) ; $\mathbf{X}$ ne peut alors être agrégé par un processus mesurable X car, sinon, on obtiendrait une absurdité en intégrant X par rapport à la mesure de Lebesgue produit sur $[0,1] \times \Omega$ de deux manières différentes (selon les "axes" et selon les "bissectrices"). Cependant, un théorème profond et difficile de Mokobodzki (cf [10]) assure que, si $(\mathbf{X}^n)$ est une suite de $\mathcal{T}$-systèmes agrégeables telle que lim $X^n(T)$ existe en probabilité pour tout $T \in \mathcal{T}$, alors le $\mathcal{T}$-système limite $\mathbf{X}$ est encore agrégeable (c'est trivial si on remplace la convergence en proba. par la convergence p.s.). Nous avons montré par ailleurs, dans [5], que, si Θ est une chronologie quelconque et $\mathbf{X}$ un Θ-système se comportant comme une surmartingale (resp quasimartingale, semimartingale), alors $\mathbf{X}$ peut être agrégé en une surmartingale forte (resp quasimartingale forte, semimartingale forte) – en travaillant même hors du cadre des conditions habituelles.

Etant donnée une chronologie Θ, nous allons nous occuper ici, sous les conditions habituelles, de l'agrégation d'un Θ-système s.c.s. à droite – défini précisément un peu plus loin – en un processus (à trajectoires p.s.) s.c.s. à droite : pour $\Theta = \overline{\mathbb{R}}_+$, il s'agit d'un problème de modification ; pour $\Theta = \mathcal{T}$, d'un problème de recollement (le processus agrégeant est unique à l'indistinguabilité près d'après le théorème de section optionnelle) ; dans le cas général, nous dirons qu'il s'agit d'un problème d'interpolation (d'où notre titre). D'abord quelques abréviations allant de soi pour se simplifier la vie : nous écrirons "$T_n \downarrow T$ dans Θ" (resp "$T_n \downarrow\downarrow T$ dans Θ") pour exprimer que (T_n) est une suite décroissante d'éléments de Θ convergeant vers T élément de Θ (resp et vérifiant de plus $T_n > T$ sur $\{T < +\infty\}$ pour tout n) ; si H est une partie de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, nous écrirons "$T_n \downarrow\downarrow T$ dans Θ à travers H" pour exprimer qu'on a $T_n \downarrow\downarrow T$ dans Θ et que les graphes des T_n sont contenus dans H (mais pas forcément celui de T).

DEFINITION.- <u>Un Θ-système</u> $\mathbf{X}$ <u>est dit</u> **s.c.s. à droite** <u>si pour toute suite décroissante</u> (T_n) <u>dans</u> Θ <u>on a</u> $X(T) \geq \limsup_n X(T_n)$ p.s. <u>sur l'ensemble</u> $\{T = \lim T_n\}$ <u>pour tout</u> $T \in \Theta$.

Lorsque Θ est stable par découpage (i.e. $\Theta = \widehat{\Theta}$), la condition ci-dessus s'écrit plus simplement : <u>on a</u> $X(T) \geq \limsup_n X(T_n)$ p.s. <u>chaque fois qu'on a</u> $T_n \downarrow T$ <u>dans</u> Θ. Nous verrons que, si $\Theta = \widehat{\Theta}$, alors tout Θ-système s.c.s. à droite est agrégeable par un processus s.c.s. à droite. Dans le cas $\Theta \neq \widehat{\Theta}$, c'est encore vrai si Θ est "suffisamment présente" dans $\widehat{\Theta}$ (voir le n°14), condition vérifiée par l'exemple (non trivial) $\Theta = \overline{\mathbb{R}}_+$, mais faux en général (contrairement à ce qui a été imprudemment avancé

dans [5] qui, en outre, présente une mauvaise définition de la semicontinuité à droite dans le cas $\Theta \neq \boxed{\Theta}$). Ceci dit, afin de ne pas perdre tout de suite notre rare lecteur dans un dédale de lemmes techniques, nous commencerons par l'étude des τ-systèmes s.c.s. à droite.

ÉTUDE DES τ-SYSTÈMES S.C.S. À DROITE

Rappelons d'abord un lemme simple (et crucial pour nous) de Doob (cf [8] et aussi [1]), dont nous donnerons une version sophistiquée à la fin de l'exposé. Afin de ne pas trainer un énoncé démesuré, nous dirons qu'un ensemble optionnel H est <u>idoine</u> s'il contient $\{+\infty\}\times\Omega$ mais ne contient pas le graphe dans $\mathbb{R}_+\times\Omega$ de son début ; si X est un processus optionnel et H idoine de début T, nous noterons $\overline{X}_H(T)$ l'ensemble des $(\xi,\omega)\in\overline{\mathbb{R}}\times\Omega$ tels que ξ soit valeur d'adhérence de $t\to X_t(\omega)$ quand t tend vers $T(\omega)$ en restant dans la coupe $H(\omega)$.

1. LEMME.- <u>Soient</u> X <u>un processus optionnel</u>, H <u>un ensemble optionnel idoine de début</u> T <u>et</u> x <u>une v.a.</u> $\underline{\underline{F}}_T$<u>-mesurable dont le graphe est contenu dans</u> $\overline{X}_H(T)$. <u>Il existe alors une suite</u> (T_n) <u>de t.d'a. telle que l'on ait</u> $T_n \downarrow\downarrow T$ <u>à travers</u> H <u>et que</u> $x = \lim X_{T_n}$ p.s.. <u>De plus, si</u> H <u>est la réunion des graphes d'une suite de t.d'a. appartenant à une chronologie</u> Θ, <u>on peut supposer que chaque</u> T_n <u>appartient à</u> $\boxed{\Theta}$.

DEMONSTRATION. Nous indiquons brièvement une démonstration simple de ce lemme. D'abord, quitte à remplacer X par $X/(1+|X|)$, on peut supposer X et donc x bornés. Posons $S_0 = +\infty$ et définissons par récurrence un t.d'a. S_n en prenant une section, à $\varepsilon = 2^{-n}$ près, de l'ensemble optionnel $H \cap [\![0,\inf(T+\frac{1}{n},S_{n-1})]\!] \cap \{|X-x| < \frac{1}{n}\}$; ceci fait, posons pour tout n $T_n = \inf(S_n,S_{n-1})$: il est clair que la suite (T_n) a les propriétés requises dans la première partie de l'énoncé. Maintenant, si H est la réunion des graphes des $U_m \in \Theta$, posons $U'_m = U_m$ sur l'ensemble $\{\exists n\ T_n = U_m\}$ et $U'_m = +\infty$ ailleurs, puis $T'_n = \inf(U'_1,U'_2,\dots,U'_n)$: on vérifie sans peine que (T'_n) a les propriétés requises dans la seconde partie de l'énoncé.

Voici une première application du lemme, légitimant en particulier notre définition d'un Θ-système s.c.s. à droite

2. PROPOSITION.- <u>Pour qu'un processus optionnel</u> X <u>soit s.c.s. à droite, il faut qu'on ait</u>

$$X_T \geq \limsup_n X_{T_n} \quad \text{p.s.}$$

<u>chaque fois qu'on a</u> $T_n \downarrow T$ <u>dans</u> τ, <u>et il suffit qu'on ait</u>

$$X_T \geq \lim X_{T_n} \quad \text{p.s.}$$

<u>chaque fois qu'on a</u> $T_n \downarrow\downarrow T$ <u>dans</u> τ <u>de sorte que</u> $\lim X_{T_n}$ <u>existe p.s.</u> .

DEMONSTRATION. La nécessité de la première condition est triviale.

Pour la suffisance de la seconde, considérons le processus s.c.s. à droite Y défini par $Y_t = \limsup_{s\downarrow\downarrow t} X_s$. D'après IV-90 de [6], le processus Y est progressif. En particulier, la v.a. Y_T est $\underline{\underline{F}}_T$-mesurable pour tout t.d'a. T et le lemme précédent, appliqué à $x = Y_T$ et $H = \{(t,\omega) : t > T(\omega) \text{ ou } t = +\infty\}$, entraine qu'on a $X_T \geq Y_T$ p.s. pour tout t.d'a. T. Mais, comme Y n'est que progressif en général, le théorème de section nous permet seulement d'en déduire qu'on a $X \geq Z$ où Z est la projection optionnelle de Y (se rappeler que $Y_T = Z_T$ p.s. pour tout t.d'a. T). La proposition suivante, qui nous assure qu'on a $Z \geq Y$, nous permet cependant de conclure.

Il s'agit d'un résultat de Bismut et Skalli [2] (utilisé par eux pour établir la suffisance de la première condition de notre énoncé) dont nous rappelons brièvement la démonstration.

3. PROPOSITION.- Soient Y un processus progressif s.c.s. à droite et Z sa projection optionnelle. On a $Z \geq Y$ et Z est s.c.s. à droite.

DEMONSTRATION. Comme, pour tout $a \in \overline{\mathbb{R}}$, l'ensemble $\{Z \geq a\}$ est la projection optionnelle de $\{Y \geq a\}$, on peut supposer que Y est l'indicatrice d'un fermé droit aléatoire H. D'après IV-89 de [6], le fermé aléatoire $\overline{H}$, adhérence coupe par coupe de H, est optionnel, et, si IV-89 de [6] avait été bien rédigé, on saurait aussi que la différence $\overline{H} - H$ est la réunion d'une suite de graphes de v.a. ; alors, grâce à IV-88 de [6], on sait écrire $\overline{H} - H$ comme réunion de deux ensembles disjoints U et V où U est une réunion dénombrable de graphes de t.d'a. et V un ensemble progressif rencontrant tout graphe de t.d'a. suivant un ensemble évanescent. L'ensemble $L = H \cup V$ est alors un fermé droit aléatoire (on a $H \subseteq L \subseteq \overline{H}$), optionnel (on a $L = \overline{H} - U$), égal à la projection optionnelle de H (on a $H \cap [\![T]\!] = L \cap [\![T]\!]$ pour tout t.d'a. T).

4. THEOREME.- Tout $\mathcal{T}$-système s.c.s. à droite s'agrège en un (unique) processus optionnel s.c.s. à droite.

DEMONSTRATION. Soit $\mathbf{X}$ un $\mathcal{T}$-système s.c.s. à droite. Nous dirons que $\mathbf{X}$ majore un processus progressif Y si on a $X(T) \geq Y_T$ p.s. pour tout t.d'a. T et nous désignons par E l'ensemble des processus optionnels s.c.s. à droite majorés par $\mathbf{X}$. Nous allons montrer que E admet un plus grand élément (à l'indistinguabilité près) et que ce processus agrège $\mathbf{X}$. Comme E n'est pas vide (il contient le processus constant égal à $-\infty$), pour prouver qu'il a un plus grand élément, il suffit, d'après le théorème 2 de [4], de montrer que toute suite d'éléments de E admet un majorant dans E. Soit donc (Y^n) une suite d'éléments de E et posons $Y = \sup_n Y^n$, processus optionnel majoré par $\mathbf{X}$. Puis, définissons un processus progressif Y' par $Y'_t = \limsup_{s\downarrow\downarrow t} Y_s$; si T est un t.d'a., il existe d'après le lemme une suite (T_n) de t.d'a. telle que $T_n\downarrow\downarrow T$ et $\lim Y_{T_n} = Y'_T$ p.s. si bien qu'on a, p.s.,

$$Y'_T \leq \limsup_n X(T_n) \leq X(T)$$

et donc Y' est majoré par $\mathbb{X}$. Ainsi, $\overline{Y} = \sup(Y,Y')$ est un processus progressif s.c.s. à droite majoré par $\mathbb{X}$ et majorant les Y^n, et la proposition 3 nous assure alors que la projection optionnelle de $\overline{Y}$ est un majorant de (Y^n) dans E. Ainsi E a un plus grand élément X et il reste à montrer que X recolle $\mathbb{X}$. Soit S un t.d'a. et soit

$$X' = X 1_{[\![S]\!]^c} + X(S) 1_{[\![S]\!]}$$

Le processus X' est optionnel, majore X, est majoré par $\mathbb{X}$, et est s.c.s. à droite. On a donc $X = X'$, d'où $X_S = X(S)$ p.s. . C'est fini.

Nous allons donner une version "intégrée" du théorème. Nous aurons besoin, pour le démontrer, de savoir qu'un $\mathcal{T}$-système $\mathbb{X}$ est s.c.s. à droite dès qu'on a $X(T) \geq \liminf_n X(T_n)$ p.s. lorsque $T_n\downarrow T$ dans $\mathcal{T}$. A cette fin, nous démontrons un lemme général sur les Θ-systèmes, qu'on rapprochera de la seconde partie de la proposition 2 .

5. LEMME.- Soit $\mathbb{X}$ un Θ-système. Pour que $\mathbb{X}$ soit un $\boxed{\Theta}$-système s.c.s. à droite, il suffit qu'on ait

$$X(T) \geq \lim_n X(T_n) \text{ p.s.}$$

chaque fois qu'on a $T_n\downarrow\downarrow T$ dans $\boxed{\Theta}$ de sorte que $\lim_n X(T_n)$ existe p.s.. En particulier, il suffit qu'on ait

$$X(T) \geq \liminf_n X(T_n) \text{ p.s.}$$

chaque fois qu'on a $T_n\downarrow T$ dans $\boxed{\Theta}$.

DEMONSTRATION. Soit $U_n\downarrow T$ dans $\boxed{\Theta}$; on doit montrer que l'on a p.s. $X(T) \geq \limsup_n X(U_n)$ et, comme l'ensemble $\{\omega : U_n(\omega)\downarrow\downarrow T(\omega)\}$ appartient à $\underline{\underline{F}}_T$ et que $\boxed{\Theta}$ est stable par découpage, on se ramène aussitôt au cas où l'on a $U_n\downarrow\downarrow T$ dans $\boxed{\Theta}$. Posons $x = \limsup_n X(U_n)$, v.a. $\underline{\underline{F}}_T$-mesurable, puis désignons par H la réunion des graphes des U_n et de $+\infty$, et par X le processus optionnel valant 0 hors de $H \cup [\![T]\!]$ et tel que X_T (resp X_{U_n}) soit p.s. égale à $X(T)$ (resp $X(U_n)$). Le lemme 1 entraine alors l'existence d'une suite (T_n) d'éléments de $\boxed{\Theta}$ telle qu'on ait $T_n\downarrow\downarrow T$ et que $x = \lim_n X(T_n)$ p.s.. D'où la conclusion.

REMARQUE.- Ainsi un $\boxed{\Theta}$-système continu pour la convergence en probabilité est nécessairement s.c.s. à droite (en fait, continu à droite). Mais, en général, un Θ-système $\mathbb{X}$ peut être continu pour la convergence en probabilité sans être s.c.s. à droite (pour $\Theta = \overline{\mathbb{R}}_+$, on peut trouver un tel $\mathbb{X}$ obtenu en désagrégeant un processus optionnel borné X tel que $t \to X_t$ soit continu dans L^1). Aussi nous bornerons nous à étudier les Θ-systèmes "s.c.s. à droite en espérance" dans le cas où $\Theta = \boxed{\Theta}$.

Nous dirons qu'un Θ-système $\mathbb{X}$ est s.c.s. à droite en espérance si $X(T)$ est intégrable pour tout $T\in\Theta$ et si on a

$$E[X(T)] \geq \liminf_n E[X(T_n)]$$

lorsque $T_n \downarrow T$ dans Θ .

6. THEOREME.- Soit $\mathbb{X}$ un $\mathcal{T}$-système s.c.s. à droite en espérance. Pour que $\mathbb{X}$ puisse être recollé en un processus optionnel s.c.s. à droite, il suffit que $\mathbb{X}$ majore une martingale càdlàg (jusqu'à l'infini).

DEMONSTRATION. Soustrayant de $\mathbb{X}$ le $\mathcal{T}$-système associé à une martingale càdlàg majorée par $\mathbb{X}$, on se ramène au cas où $\mathbb{X}$ est positif. Soient $T^n \downarrow T$ dans $\mathcal{T}$ et $A\in\underline{\underline{F}}_T$; des inégalités

$$E[X(T_A)] \geq \liminf_n E[X(T^n_A)] \geq E[\liminf_n X(T^n_A)]$$

on déduit

$$\int_A X(T)\, dP \geq \int_A \liminf_n X(T^n)\, dP$$

et, faisant parcourir $\underline{\underline{F}}_T$ par A, on obtient $X(T) \geq \liminf_n X(T^n)$ p.s.. Quoiqu'on ait obtenu "lim inf" au lieu de "lim sup", on peut en conclure que $\mathbb{X}$ est s.c.s. à droite grâce au lemme 5, et on peut alors appliquer le théorème 4.

7. REMARQUES.- a) Comme application, on retrouve un cas particulier du théorème 15 de [5] : toute $\mathcal{T}$-surmartingale s'agrège en une surmartingale forte (jusqu'à l'infini).

b) Nous avons démontré au passage que tout processus optionnel X de la classe (D) est s.c.s. à droite dès qu'il l'est en espérance. En effet, d'après le critère de Mertens d'appartenance à la classe (D), X majore une martingale càdlàg.

c) On peut étendre aux Θ-systèmes le critère de Mertens, à savoir, un Θ-système $\mathbb{X}$ est uniformément intégrable ssi il existe une v.a. intégrable x telle que $|\mathbb{X}|$ soit majoré par le Θ-système constitué des $E[x|\underline{\underline{F}}_T]$, T parcourant Θ. La suffisance est bien connue ; la nécessité résulte de l'existence de l'enveloppe de Snell de $|\mathbb{X}|$ (cf théorème 14 de [5]), qui se trouve être uniformément intégrable en tant que $\mathcal{T}$-système (i.e. de la classe (D) en tant que processus) si $|\mathbb{X}|$ l'est (cela résulte aisément de la démonstration du n°14 de [5]), et de l'existence de la décomposition de Mertens de cette enveloppe.

ÉTUDE DES Θ-SYSTÈMES S.C.S. À DROITE : CAS OÙ $\Theta = \Theta$

Etant donnée une chronologie Θ, nous dirons qu'un t.d'a. T est Θ-accessible si son graphe est contenu dans la réunion des graphes d'une suite d'éléments de Θ (soit encore, si T est dénombrablement Θ-étagé), et nous noterons Θ^a la chronologie de ces t.d'a.. Si T est un t.d'a. quelconque, on voit aisément qu'il existe une partition essentiellement unique de $\{T < +\infty\}$ en deux éléments A,I de $\underline{\underline{F}}_T$ tels que T_A soit Θ-accessible et T_I soit totalement Θ-inaccessible (i.e. on a

$P\{S = T_I < \infty\} = 0$ pour tout $S \in \Theta$). Par ailleurs, il est clair que tout Θ-système $\mathbf{X}$ admet une extension essentiellement unique en un Θ^a- système, que nous noterons encore $\mathbf{X}$. D'autre part, nous dirons qu'un t.d'a. T est Θ-<u>adhérent à droite</u> s'il existe des $T_n \in \Theta$ tels que $T_n \downarrow T$ dans $\mathcal{T}$, et nous noterons Θ^d la chronologie de ces t.d'a.. Enfin, nous dirons qu'un t.d'a. T est Θ-<u>approchable</u> s'il appartient à la chronologie $\boxed{\Theta}^d$ qui, d'après le lemme suivant, est la plus petite chronologie contenant Θ et stable par découpage et pour les limites des suites décroissantes.

8. LEMME.- 1) <u>On a</u> $\Theta \subseteq \Theta^a = \Theta^{aa} \subseteq \boxed{\Theta}^d$ <u>et</u> $\Theta \subseteq \Theta^d = \Theta^{dd} \subseteq \boxed{\Theta}^d$
2) <u>On a</u> $\boxed{\Theta}^d = \Theta^{ad} = \boxed{\Theta}^{da}$
<u>En particulier</u>, <u>si</u> $\Theta = \boxed{\Theta}$, <u>alors</u> $\Theta^d = \Theta^{ad} = \Theta^{da}$.

DEMONSTRATION. Nous n'insisterons pas sur 1), qui est à peu près évident (seuls $\Theta^a \subseteq \boxed{\Theta}^d$ et $\Theta^{dd} \subseteq \Theta^d$ méritent un instant de réflexion). Passons à 2). D'après 1), on a $\Theta^a \subseteq \boxed{\Theta}^d$ et donc $\Theta^{ada} \subseteq \boxed{\Theta}^{da}$; on a alors

$$\boxed{\Theta}^d \subseteq \Theta^{ad} \subseteq \Theta^{ada} \subseteq \boxed{\Theta}^{da}$$

et il ne reste plus qu'à montrer qu'on a $\boxed{\Theta}^{da} \subseteq \boxed{\Theta}^d$. Soit $T \in \boxed{\Theta}^{da}$; il existe une partition dénombrable (A^i) de Ω et une suite (T^i) dans $\boxed{\Theta}^d$ telles que $A^i \in \underline{\underline{F}}_{T^i}$ et $T = T^i$ sur A^i pour tout i. Puis, pour chaque i, il existe une suite (T^i_n) dans $\boxed{\Theta}$ telle que $T^i_n \downarrow T^i$ dans $\mathcal{T}$. Posons pour chaque i $S^i_n = T^i_n$ sur A_i et $S^i_n = +\infty$ ailleurs : on a $S^i_n \in \boxed{\Theta}$ et $S^i_n \downarrow T^i_{A^i}$ dans $\mathcal{T}$; par conséquent, si on pose $S_n = \inf_{i \leq n} S^i_n$, on obtient une suite (S_n) dans $\boxed{\Theta}$ telle que $S_n \downarrow T$ dans $\mathcal{T}$, et donc T appartient à $\boxed{\Theta}^d$.

REMARQUE.- Il résulte du lemme que, pour tout t.d'a. T, la partie $\boxed{\Theta}^d$- accessible U de T est Θ-approchable tandis que la partie totalement $\boxed{\Theta}^d$- inaccessible V de T est totalement Θ-inapprochable en ce sens que, pour tout $A \in \underline{\underline{F}}_V$, le t.d'a. $\operatorname{ess\,inf}\{S \in \Theta : S_A \geq V_A\}$ est p.s. $> V_A$ sur l'ensemble $\{V_A < \infty\}$.

Nous nous donnons désormais dans tout ce paragraphe une chronologie Θ stable par découpage, que nous noterons $\boxed{\Theta}$ pour rappeler cette hypothèse. Si T est un t.d'a. $\boxed{\Theta}$-approchable, nous noterons $\langle T \rangle$ l'ensemble des suites (T_n) dans $\boxed{\Theta}$ telles que $T_n \downarrow T$ dans $\mathcal{T}$.

9. PROPOSITION.- <u>Soit</u> $\mathbf{X}$ <u>un</u> $\boxed{\Theta}$-<u>système et posons</u>, <u>pour tout t.d'a.</u> $\boxed{\Theta}$-<u>approchable</u> T,

$$Y(T) = \operatorname{ess\,sup}_{(T_n) \in \langle T \rangle} \limsup_n X(T_n) .$$

<u>Pour chaque</u> $T \in \boxed{\Theta}^d$, <u>il existe</u> $(T_n) \in \langle T \rangle$ <u>telle que</u>

$$Y(T) = \limsup_n X(T_n) \quad \text{p.s.} ,$$

<u>la famille</u> $\mathbf{Y} = (Y(T))_{T \in \boxed{\Theta}^d}$ <u>est un</u> $\boxed{\Theta}^d$- <u>système s.c.s. à droite</u>, <u>et</u>, <u>si</u> $\mathbf{X}$ <u>est s.c.s. à droite</u>, $\mathbf{Y}$ <u>est une extension de</u> $\mathbf{X}$.

DEMONSTRATION. Nous commençons par vérifier que $\mathbb{Y}$ est un Θ^d- système. L'adaptation est évidente. Pour vérifier la compatibilité, il suffit de prouver que, pour tout $T\varepsilon\Theta^d$ et tout $A\varepsilon\underline{\underline{F}}_T$, on a $Y(T) = Y(T_A)$ p.s. sur A, et, pour ce faire, il suffit de montrer que les traces sur A de $\langle T\rangle$ et $\langle T_A\rangle$ sont les mêmes. Or, pour $(T^n)\varepsilon\langle T\rangle$, on a évidemment $(T^n_A)\varepsilon\langle T_A\rangle$ et, réciproquement, pour $(S^n)\varepsilon\langle T_A\rangle$, si, ayant choisi un élément (U^n) de $\langle T\rangle$, on pose $T^n = \inf(S^n, U^n_{A^c})$, alors on a $(T^n)\varepsilon\langle T\rangle$ et $(S^n) = (T^n_A)$. Nous vérifions maintenant que, dans la formule définissant $Y(T)$, l'ess sup est atteint sur $\langle T\rangle$. Soit donc $T\varepsilon\Theta^d$ et soit, pour tout k, un élément (T^k_n) de $\langle T\rangle$ de sorte que

$$Y(T) = \sup_k \limsup_n X(T^k_n) \text{ p.s. }.$$

Nous allons construire $(T_n)\varepsilon\langle T\rangle$ telle que $Y(T) = \lim_n X(T_n)$ p.s., ce qui est un peu mieux que ce qui nous est demandé. Posons

$$A^k_n = \{T^k_n = T \text{ et } X(T^k_n) = Y(T)\} \ , \ A = \bigcup_{k,n} A^k_n$$

L'ensemble A appartient à $\underline{\underline{F}}_T$ et, quitte à raisonner séparément sur A et sur A^c pour construire notre suite (T_n), on se ramène aux cas extrêmes où $A = \Omega$ p.s. et $A = \emptyset$ p.s.. Si $A = \Omega$, on pose $R^k_n = T^k_n$ sur A^k_n et $R^k_n = +\infty$ ailleurs, puis $T_n = \inf_{k\leq n} R^k_n$. Si $A = \emptyset$, on pose $S^k_n = +\infty$ sur $\{T = T^k_n\}$ et $S^k_n = T^k_n$ ailleurs, puis on considère l'ensemble optionnel

$$H = (\bigcup_{k,n} [\![S^k_n]\!]) \cup (\{\infty\}\times\Omega)$$

qui est "idoine" (cf lemme 1) et admet T pour début (pourquoi ?), le processus optionnel X valant 0 hors de H et tel que $X_S = X(S)$ p.s. si S est égal à un S^k_n ou à $+\infty$, et la v.a. $\underline{\underline{F}}_T$-mesurable x égale à $\sup_k \limsup_n X(T^k_n)$. Comme le graphe de x appartient à $\mathbb{X}_H(T)$ et que H est réunion des graphes d'une suite d'éléments de Θ, le lemme 1 nous assure l'existence de $(T_n)\varepsilon\langle T\rangle$ telle que $x = \lim_n X(T_n)$ p.s. . Montrons enfin que $\mathbb{Y}$ est s.c.s. à droite (le reste de l'énoncé étant évident). Soit $T^k\downarrow T$ dans Θ^d ; on doit montrer qu'on a

$$Y(T) \geq \limsup_k Y(T^k) \text{ p.s.}$$

et, quitte à remplacer T, T^k par T_A, T^k_A où $A = \{\omega : T^k(\omega)\downarrow\downarrow T(\omega)\}$, on peut supposer que $T^k\downarrow\downarrow T$ dans Θ^d. Soit, pour chaque k, un élément (T^k_n) de $\langle T^k\rangle$ tel qu'on ait $Y(T^k) = \limsup_n X(T^k_n)$ p.s. et considérons l'ensemble optionnel idoine, de début T,

$$H = (\bigcup_{k,n} [\![T^k_n]\!]) \cup (\{\infty\}\times\Omega) \ ,$$

le processus optionnel X égal à 0 hors de H et tel que $X_S = X(S)$ p.s. si S est égal à un T^k_n ou à $+\infty$, et la v.a. $\underline{\underline{F}}_T$-mesurable x égale à $\limsup_k \limsup_n X(T^k_n)$. Le lemme 1 nous fournit alors $(T_n)\varepsilon\langle T\rangle$ telle que $x = \lim_n X(T_n)$ p.s., d'où la conclusion.

Nous allons étendre maintenant le Θ^d- système s.c.s. à droite obtenu ci-dessus en un $\mathfrak{T}$-système s.c.s. à droite (lequel se recolle en un processus optionnel s.c.s. à droite d'après le théorème 4).

Si T est un t.d'a. quelconque, nous notons T^α sa partie Θ-approchable et T^ι sa partie totalement Θ-inapprochable (cf la remarque du n°8).

10. THEOREME.- Soit $\mathbb{X}$ un Θ-système et posons, pour tout t.d'a. T ,

$$Y(T) = \text{ess sup}_{(T_n)\in\langle T^\alpha\rangle} \limsup_n X(T_n)$$

sur $\{T = T^\alpha\}$ et $Y(T) = -\infty$ ailleurs. La famille $\mathbb{Y} = (Y(T))_{T\in\mathcal{T}}$ est un $\mathcal{T}$-système s.c.s. à droite, et c'est le plus petit $\mathcal{T}$-système s.c.s. à droite majorant $\mathbb{X}$ sur Θ ; nous dirons que c'est l'enveloppe s.c.s. à droite de $\mathbb{X}$. Si $\mathbb{X}$ est s.c.s. à droite, $\mathbb{Y}$ est une extension de $\mathbb{X}$.

DEMONSTRATION. Le plus gros du travail a été fait aux n°8 et n°9 . D'abord $\mathbb{Y}$ est un $\mathcal{T}$-système : l'adaptation est évidente, $\underline{\underline{F}}_T$ et $\underline{\underline{F}}_{T^\alpha}$ ayant même trace sur $\{T = T^\alpha\}$; la compatibilité résulte du n°9 et du fait que, pour $A\in\underline{\underline{F}}_T$, on a $(T^\alpha)_A = (T_A)^\alpha$ d'après le n°8. Ensuite, $\mathbb{Y}$ est s.c.s. à droite : soit $T_n\downarrow T$ dans $\mathcal{T}$ et, pour tout n, définissons $S_n\in\Theta^d$ par $S_n = \inf_{k\leq n} T_k^\alpha$; sur $A = \{\omega : S_n(\omega)\downarrow T(\omega)\}$, on a $T = T^\alpha$ et donc $Y(T) \geq \limsup_n Y(S_n) = \limsup_n Y(T_n)$ d'après le n°9 et, sur A^c, on a $T_n = T_n^\iota < \infty$ pour n grand (dépendant de ω) et donc $\limsup_n Y(T_n) = -\infty$. Le reste de l'énoncé est évident.

11. COROLLAIRE.- Tout Θ-système s.c.s. à droite peut être agrégé par un processus optionnel s.c.s. à droite.

DEMONSTRATION. Soit $\mathbb{X}$ un tel système, et soit $\mathbb{Y}$ son enveloppe s.c.s. à droite. On a $\mathbb{X} = \mathbb{Y}_{|\Theta}$ d'après le théorème précédent, et $\mathbb{Y}$ s'agrège en un processus optionnel s.c.s. à droite d'après le théorème 4 .

REMARQUE.- Disons que le Θ-système $\mathbb{X}$ est s.c.i. à droite si $-\mathbb{X}$ est s.c.s. à droite, et continu à droite s'il est à la fois s.c.i. et s.c.s. à droite. Un Θ-système $\mathbb{X}$ continu à droite peut être agrégé par un processus optionnel s.c.s. à droite Y et par un processus optionnel s.c.i. à droite Z, mais il se peut qu'il ne soit agrégeable par aucun processus optionnel continu à droite (exercice !) ; bien entendu, ce canular ne peut arriver si $\Theta = \mathcal{T}$, car, dans ce cas, on a $Y = Z$ d'après le théorème de section.

Le résultat suivant a été établi implicitement aux n°5, 6 et 7-c).

12. THEOREME.- Soit $\mathbb{X}$ un Θ-système s.c.s. à droite en espérance. Pour que $\mathbb{X}$ soit un Θ-système s.c.s. à droite, il suffit que la famille des $X^-(T)$, $T\in\Theta$, soit uniformément intégrable.

Il est alors agrégeable par un processus optionnel s.c.s. à droite d'après ce qui précède.

Pour remplir notre contrat, il reste à montrer que, sans supposer θ égale à Θ, tout θ-système s.c.s. à droite est encore un Θ-système s.c.s. à droite si θ est "suffisamment présente" dans Θ .

ÉTUDE DES Θ-SYSTÈMES S.C.S. À DROITE : CAS GÉNÉRAL

13 Etant donnée une chronologie Θ, nous posons pour tout t.d'a. T

$$\underline{\underline{D}}_\Theta(T) = \{A\in\underline{\underline{F}}_T : \exists(T^n)\ T^n\in\Theta \text{ et } T^n_A\downarrow\downarrow T_A\}$$

et, si Θ est une sous-chronologie d'une chronologie $\boldsymbol{\Theta}$, nous dirons que Θ <u>est riche dans $\boldsymbol{\Theta}$</u> <u>si on a p.s.</u>, <u>pour tout</u> $T\in\boldsymbol{\Theta}$,

$$\text{ess sup}\ \underline{\underline{D}}_\Theta(T) = \text{ess sup}\ \underline{\underline{D}}_{\boldsymbol{\Theta}}(T) \ ;$$

si tout $T\in\boldsymbol{\Theta}$ est Θ-étagé (i.e. si $\boldsymbol{\Theta}$ est incluse dans $\boxed{\Theta}$), on voit sans peine qu'il suffit de vérifier l'égalité des ess sup pour tout $T\in\Theta$. Par exemple, si $\Theta = \overline{\mathbb{R}}_+$, Θ est riche dans $\boxed{\Theta}$ (et $\boxed{\Theta}$ est riche dans $\mathcal{T}$, si bien que la relation "être riche dans" n'est pas transitive en général) ; par contre, si T est un t.d'a. totalement $\overline{\mathbb{R}}_+$-inaccessible (i.e. si la loi de T est diffuse), et si Θ est la chronologie engendrée par $\overline{\mathbb{R}}_+$ et T, alors on a ess sup $\underline{\underline{D}}_\Theta(T) = \emptyset$ p.s. et ess sup $\underline{\underline{D}}_{\boxed{\Theta}}(T) = \Omega$, si bien que Θ n'est pas riche dans $\boxed{\Theta}$.

14 Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que les trois conditions suivantes (où c) $\Rightarrow$b) $\Rightarrow$a)) sont suffisantes pour que Θ soit riche dans $\boxed{\Theta}$:

a) pour $T\in\Theta$ et $V\in\boxed{\Theta}$ tels que $T\leq V$ et $T<V$ sur $\{T<\infty\}$, il existe $U\in\Theta$ tel que $T\leq U\leq V$ et $T<U$ sur $\{T<\infty\}$

b) pour $T,U\in\Theta$, on a encore $U_{\{U>T\}}\in\Theta$

c) pour $T,U\in\Theta$, on a encore $U_{\{U<T\}}\in\Theta$.

Remarquer que c) est la condition de découpage qu'on rencontre dans le théorème général de section, et est vérifiée quand Θ est l'ensemble des t.d'a. d'une tribu de Meyer (cf [5]). Noter que c) $\Rightarrow$b) n'est pas évident.

15. THEOREME.- <u>Tout</u> Θ-<u>système</u> $\mathbf{X}$ <u>est</u> $\boxed{\Theta}$-<u>s.c.s. à droite dès qu'il est</u> Θ-<u>s.c.s. à droite ssi</u> Θ <u>est riche dans</u> $\boxed{\Theta}$.

DEMONSTRATION. D'abord, la condition est nécessaire. En effet, si Θ n'est pas riche dans $\boxed{\Theta}$, il existe $T\in\Theta$ et $A\in\underline{\underline{D}}_{\boxed{\Theta}}(T)$, non négligeable, p.s. disjoint de tout $B\in\underline{\underline{D}}_\Theta(T)$. Définissons alors un Θ-système $\mathbf{X}$ en posant, pour tout $S\in\Theta$,

$$X(S) = 0 \text{ sur } S<T \text{ et sur } \{S=T\}\cap A$$
$$X(S) = 1 \text{ sur } S>T \text{ et sur } \{S=T\}\cap A^c \ ;$$

il est clair que $\mathbf{X}$ est Θ-s.c.s. à droite sans être $\boxed{\Theta}$-s.c.s. à droite. Passons à la condition suffisante, qui n'est pas si simple à établir. D'après le n°5, il suffit de montrer qu'on a $X(T)\geq \lim_n X(T_n)$ chaque sois qu'on a $T_n\downarrow\downarrow T$ dans $\boxed{\Theta}$ de sorte que $x = \lim_n X(T_n)$ existe. On a alors ess sup $\underline{\underline{D}}_{\boxed{\Theta}}(T) = \Omega$, et donc aussi ess sup $\underline{\underline{D}}_\Theta(T) = \Omega$, Θ étant riche dans $\boxed{\Theta}$. Ainsi, il existe une partition dénombrable (Ω_k) de Ω en éléments de $\underline{\underline{F}}_T$ de sorte que, pour tout k, on puisse trouver une suite (U^k_n) dans Θ vérifiant $U^k_n\downarrow\downarrow T$ sur Ω_k. Mais, le lemme 17 (voir plus loin), appliqué pour chaque k à la restriction de notre situation à $\Omega_k\cap\{T<\infty\}$, assure alors ceci : pour chaque k, on peut supposer de plus que, pour presque tout $\omega\in\Omega_k$, la suite $(U_n^k(\omega))$ a une sous-suite en commun avec la suite $(T_n(\omega))$. Comme $X(T_n)$ converge vers x et que $\mathbb{X}$ est Θ-s.c.s. à droite, on a alors p.s. sur Ω_k

$$X(T) \geq \limsup_n X(U_n^k) \geq \lim_n X(T_n) = x$$

si bien que $\mathbb{X}$ est $\mathbb{\Theta}$-s.c.s. à droite.

Etant donné le n°11, nous en déduisons

16. COROLLAIRE.- <u>Si Θ est riche dans $\mathbb{\Theta}$, tout Θ-système s.c.s. à droite peut être agrégé par un processus optionnel s.c.s. à droite.</u>

REMARQUE.- Toute partie D de $\mathbb{R}_+$ contenant 0 et $+\infty$ est évidemment une chronologie Θ riche dans $\mathbb{\Theta}$, et la donnée d'un D-système $\mathbb{X}$ équivaut à celle d'un processus adapté $X = (X_t)_{t\in D}$ indexé par D. Le corollaire dit qu'un tel processus Y admet une modification qui peut être étendue en un processus optionnel s.c.s. à droite ssi il vérifie la condition

si on a $t_n \downarrow t$ dans D , alors on a $Y_t \geq \limsup_n Y_{t_n}$ p.s. .

Si la condition nécessaire est triviale, la condition suffisante ne l'est pas car le "p.s." peut dépendre de la suite (t_n) envisagée, et, même si D est dénombrable, il peut y avoir, pour $t\in D$, un continuum de suites (t_n), deux à deux sans sous-suite commune, décroissant vers t .

Voici le lemme-clé pour toute cette partie de l'exposé ; il va un peu au delà de nos besoins pour le n°15

17. LEMME.- <u>Soient Θ une chronologie et T un t.d'a. fini tel qu'il existe (U_n) dans Θ vérifiant $U_n \downarrow\downarrow T$. Supposons donnés un ensemble dénombrable I et, pour chaque $i\in I$, une suite (T_n^i) de t.d'a. Θ-accessibles telle que $T_n^i \downarrow\downarrow T$. Il existe alors une suite (S_n) dans Θ telle que $S_n \downarrow\downarrow T$ et que, de plus, la suite $(S_n(\omega))$ ait, pour presque tout ω, une sous-suite en commun avec chacune des suites $(T_n^i(\omega))$, $i\in I$.</u>

DEMONSTRATION. Afin d'être clair, nous commencerons par traiter le cas où, I étant réduit à un point, il n'y a qu'une suite (T_n) - c'est le cas qui nous intéresse pour le n°15. D'abord, quitte à extraire des sous-suites des suites (U_n) et (T_n) en invoquant le lemme de Borel-Cantelli, on peut supposer que, pour presque tout ω, il existe un entier $N(\omega)$ de sorte que l'on ait

$$U_{n+1}(\omega) < T_{n+1}(\omega) < U_n(\omega) < T_n(\omega)$$

pour $n \geq N(\omega)$, car, par hypothèse, on a $U_n \downarrow\downarrow T$ et $T_n \downarrow\downarrow T$. Donc, quitte à remplacer T_n par $U_n \vee (T_n \wedge U_{n-1})$, ce qui ne modifie p.s. pas les $T_n(\omega)$ pour n grand, on peut supposer qu'on a partout, pour tout n ,

$$U_{n+1} < T_{n+1} < U_n < T_n \quad .$$

Maintenant, chaque T_n est Θ-accessible et donc, par définition, a son graphe contenu dans la réunion des graphes d'une suite $(T_{n,k})$ dans Θ ;

on peut évidemment supposer qu'on a $U_{n+1} \leq T_{n+1,k} \leq U_n \leq T_{n,k}$ pour tout n et tout k. Enfin, une nouvelle application du lemme de Borel-Cantelli permet de trouver, pour chaque n, un entier noté $\underline{n}$ tel que, pour presque tout ω, $T_n(\omega)$ soit égal à l'une des valeurs $T_{n,k}(\omega)$, k variant de 1 à $\underline{n}$, pour n suffisamment grand. Par ailleurs, d'après le lemme 9 de [5], il existe pour chaque n des éléments $S_{n,1}, S_{n,2}, \dots, S_{n,\underline{n}}$ de Θ tels qu'on ait $S_{n,1} \geq \dots \geq S_{n,\underline{n}}$ et $\{S_{n,1}(\omega), \dots, S_{n,\underline{n}}(\omega)\} = \{T_{n,1}(\omega), \dots, T_{n,\underline{n}}(\omega)\}$ pour tout ω. Il ne reste plus alors qu'à poser

$S_n = S_{m+1,j}$ où $m = \sup\{i \geq 0 : \underline{1}+\dots+\underline{i} < n\}$ et $j = n - (\underline{1}+\dots+\underline{m})$

pour obtenir une suite (S_n) ayant les propriétés requises. Pour finir, voyons rapidement le cas général où I est dénombrable. Ayant choisi une application $n \to \bar{n}$ de $\mathbb{N}$ sur I telle que tout élément de I ait une infinité d'antécédents, revenons à la première étape de notre démonstration : à l'aide du lemme de Borel-Cantelli, on se ramène par extraction de sous-suites au cas où l'on a

$$U_{n+1}(\omega) < T_{n+1}^{\overline{n+1}}(\omega) < U_n(\omega) < T_n^{\bar{n}}(\omega)$$

pour presque tout ω et tout n suffisamment grand, puis au cas où l'on a

$$U_{n+1} < T_{n+1}^{\overline{n+1}} < U_n < T_n^{\bar{n}}$$

partout pour tout n. On termine alors comme ci-dessus.

Nous pourrions nous arrêter là ; nous terminerons cependant en donnant comme promis la forme "optimale" du lemme 1 comme application du n°17. Rappelons la situation du lemme 1 : on a un ensemble optionnel H idoine, i.e. contenant $\{+\infty\} \times \Omega$ mais ne contenant pas le graphe de son début T sur $\{T < \infty\}$; on considère un processus optionnel X et on note $\overline{X}_H(T)$ le fermé aléatoire des $(\xi, \omega) \in \overline{\mathbb{R}} \times \Omega$ tels que ξ soit une valeur d'adhérence de $t \to X_t(\omega)$ quand t tend vers $T(\omega)$ en restant dans $H(\omega)$. Nous commençons par établir que $\overline{X}_H(T)$ est un "bon" fermé aléatoire

18. LEMME.- L'ensemble $\overline{X}_H(T)$ appartient à $\underline{\underline{B}}(\overline{\mathbb{R}}) \times \underline{\underline{F}}_T$ et il existe une suite (x_k) de sections $\underline{\underline{F}}_T$-mesurables de $\overline{X}_H(T)$ telle que, pour tout ω, les $x_k(\omega)$ soient denses dans la coupe selon ω de $\overline{X}_H(T)$.

DEMONSTRATION. Comme l'adhérence coupe par coupe d'un élément de la tribu $\underline{\underline{B}}(\overline{\mathbb{R}}) \times \underline{\underline{F}}_T$ appartient encore à cette tribu (cf IV-89 de [6]), il suffit de démontrer la seconde partie de l'énoncé. Quitte à remplacer X par $X/(1+|X|)$, on peut supposer X borné. Soit (r_k) une énumération des rationnels et posons

$$y_k(\omega) = \inf\{\xi : \xi \geq r_k \text{ et } (\xi, \omega) \in \overline{X}_H(T)\} \quad (\inf \emptyset = +\infty)$$

On a

$$y_k(\omega) < u \Leftrightarrow \exists \xi \in [r_k, u[\quad \forall m \ \forall n \ \exists t \quad (t,\omega) \in H \cap [\![T, T+\tfrac{1}{m}]\!] \cap \{|X - \xi| < \tfrac{1}{n}\}$$

Comme $(\underline{\underline{F}}_t)$ vérifie les conditions habituelles, on en déduit sans peine que y_k est $\underline{\underline{F}}_T$-mesurable, et il ne reste plus qu'à poser $x_k = y_k$ sur $\{y_k < +\infty\}$ et $x_k = X_\infty$ sur $\{y_k = +\infty\}$.

Maintenant, si (T_n) est une suite de t.d'a. telle qu'on ait $T_n\downarrow\downarrow T$ à travers H, nous noterons $⟦T_n⟧$ l'ensemble $(\bigcup_n[\![T_n]\!])\cup(\{\infty\}\times\Omega)$: c'est un ensemble optionnel idoine, de début T, contenu dans H. Voici alors la forme optimale du lemme 1

19. THEOREME.- Soit H un ensemble optionnel idoine de début T, X un(1) processus optionnel et x une section $\underline{\underline{F}}_T$-mesurable de $\overline{X}_H(T)$.

1) Il existe deux suites (S_n) et (T_n) de t.d'a. telles qu'on ait $S_n\downarrow\downarrow T$ et $T_n\downarrow\downarrow T$ dans $\mathcal{T}$ à travers H de sorte que $\overline{X}_{⟦S_n⟧}(T)$ soit indistinguable de $\overline{X}_H(T)$ et qu'on ait $x=\lim_n X(T_n)$ p.s..

2) Si Θ est une chronologie et si H est réunion des graphes d'une suite d'éléments de Θ, alors on peut supposer que les S_n appartiennent à Θ et les T_n à $\boxed{\Theta}$.

DEMONSTRATION. L'existence des T_n vérifiant 1) et 2) a été établie au lemme 1. D'autre part, le lemme 18 nous fournit une suite (x_k) de sections $\underline{\underline{F}}_T$-mesurables de $\overline{X}_H(T)$ telle que, pour tout ω, les $x_k(\omega)$ soient denses dans la coupe de $\overline{X}_H(T)$ selon ω. Pour démontrer le reste de l'énoncé, il nous suffit donc de construire des $S_n\downarrow\downarrow T$ à travers H (avec $S_n\varepsilon\Theta$ pour le point 2)) de sorte que chacune des v.a. x_k soit une section de $\overline{X}_{⟦S_n⟧}(T)$, et, quitte à travailler sur $\{T<\infty\}$, on peut supposer T fini partout. Le lemme 1 nous fournit, pour chaque k, des $T_n^k\downarrow\downarrow T$ à travers H (avec $T_n^k\varepsilon\boxed{\Theta}$ pour le point 2)) de sorte qu'on ait $x_k=\lim_n X(T_n^k)$, et, quitte à remplacer H par $\bigcup_k⟦T_n^k⟧$ et à prendre pour Θ la chronologie engendrée par les T_n^k, on peut se contenter de démontrer le point 2). Alors H est réunion des graphes d'une suite (V_m) dans Θ, et chaque V_m est $>T$, T étant fini et H idoine. Nous pouvons supposer, quitte à remplacer Θ par une sous-chronologie, que Θ est engendrée par les V_m (cela nous assurera que tout $S\varepsilon\Theta$ majorant T a son graphe dans H) et nous posons $U_n=\inf_{m\leq n}V_m$: on obtient ainsi une suite (U_n) dans Θ telle que $U_n\downarrow\downarrow T$. Le lemme 17 nous assure alors l'existence d'une suite (S_n) dans Θ telle qu'on ait $S_n\downarrow\downarrow T$ (et cela, nécessairement à travers H) et que, pour tout k et (presque) tout ω, la suite $(S_n(\omega))$ ait une sous-suite en commun avec la suite $(T_n^k(\omega))$ et admette donc $x_k(\omega)$ comme valeur d'adhérence. C'est fini.

APPENDICE

Nous répondons ici à quelques questions posées lors de l'exposé oral, et à quelques autres qui auraient pu être posées...

----

(1) le second auteur assure que la grand-mère française n'exige pas qu'on écrive "soient" au lieu de "soit"

A. Sous-chronologie totalement ordonnée

Nous reprenons ici, sous une forme améliorée, un résultat de [3] qui complète le lemme 9 de [5]

20. PROPOSITION.- Toute chronologie dénombrable $\Theta°$ contient une sous-chronologie totalement ordonnée Θ telle que $\Theta°$ soit contenue dans $\boxed{\Theta}$.

DEMONSTRATION. Soit (U_n) une énumération des éléments de $\Theta°$ et désignons par D l'ensemble des dyadiques de (0,2). Tout $d \in D$ différent de 1 s'écrit de manière unique

$$(°) \qquad d = 1 + \sum_1^n a_k 2^{-k}$$

où n est un entier et $a_1,\dots,a_n$ un élément de $\{-1,+1\}^n$. Définissons alors une application $d \to V_d$ de D dans $\Theta°$ en posant $V_1 = U_1$ et, pour $d \neq 1$

$$V_d = (U_1 \boxed{1} (U_2 \boxed{2} (\dots(U_n \boxed{n} U_{n+1})\dots)))$$

où $\boxed{i} = \wedge$ si $a_i = -1$ et $\boxed{i} = \vee$ si $a_i = +1$ dans l'écriture (°) de d. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que $d \to V_d$ est croissante (au sens large) et que la réunion des graphes des V_d égale celle des U_n .

B. Semicontinuité et continuité

Nous donnons ici des extensions "aléatoires" du fait qu'une fonction s.c.s. est limite d'une suite décroissante de fonctions continues.

21. PROPOSITION.- 1) Un processus X est limite d'une suite décroissante de processus adaptés càdlàg (resp càglàd) ssi il est optionnel (resp prévisible) et s.c.s. à droite (resp à gauche).

2) Un processus X est limite d'une suite décroissante de processus adaptés continus ssi il est prévisible et s.c.s. .

DEMONSTRATION. Nous n'avons mentionné les conditions nécessaires que pour avoir l'occasion de rappeler qu'il existe des processus progressifs s.c.s. à droite qui ne sont pas optionnels, et des processus optionnels s.c.s. (a fortiori s.c.s. à gauche) qui ne sont pas prévisibles. Passons aux conditions suffisantes ; pour éviter de petites difficultés causées par $t = 0$ et $t = +\infty$ (dont la résolution n'apporte rien, sauf des complications typographiques), nous supposerons ici nos processus indexés par $]0,+\infty[$. D'abord, quitte à considérer un homéomorphisme de $[-\infty,+\infty]$ sur $[0,1]$, on peut supposer $0 \leq X \leq 1$. On a alors l'approximation $X = \lim_n \downarrow \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n} 1_{\{X \geq (k-1)/n\}}$, qui permet de se ramener au cas où X est l'indicatrice d'un ensemble aléatoire H . Pour tout rationnel $r > 0$ soit D^r le début de $H \cap [\![r,\infty[\![$ et posons

$$L^d = \bigcup_r [\![r,D^r[\![\quad , \quad L^g = \bigcup_r]\!]r,D^r]\!]$$

L'ensemble L^d est compris entre "l'intérieur" et "l'intérieur droit" de H^c tandis que L^g est "l'intérieur gauche" de H^c augmenté éventuellement de bouts des graphes $[\![D^r]\!]$ se trouvant dans H. Si H est un fermé droit optionnel, alors $(H^c - L^d)$ est la réunion des graphes d'une suite (S_n) de t.d'a. (cf n°3) et, T_n étant le début de $H \cap [\![S_n, \infty[\![$, on a

$$H^c = (\bigcup_r [\![r, D^r[\![) \cup (\bigcup_n [\![S_n, T_n[\![)$$

d'où la moitié du point 1) par passage au complémentaire. Pour l'autre moitié, où H est un fermé gauche prévisible, c'est $(L^g - H^c)$ qui est la réunion des graphes d'une suite (S_n) de t.d'a., prévisibles, et si, pour chaque n, (S_n^k) est une suite annonçant S_n, on a

$$H^c = \bigcup_{r,k,n} (]\!]r, D^r]\!] -]\!]S_n^k, S_n]\!])$$

d'où la conclusion. Enfin, si H est fermé et prévisible, les débuts D^r sont prévisibles et un résultat d'Emery [9] assure alors l'existence pour chaque r d'un processus croissant adapté et continu A^r, nul sur $]0,\infty[\times \{r = D^r\}$, et, sur $]0,\infty[\times \{r < D^r\}$, valant 0 sur $[\![0,r]\!]$, 1 sur $[\![D^r, \infty[\![$, et strictement croissant sur $[\![r, D^r]\!]$. On a alors

$$1_H = \inf_r \lim_n \downarrow |2A^r - 1|^n$$

et c'est fini.

REMARQUES.- a) Comme la càdlàgité (resp càgladité) d'un processus mesurable borné est conservée par projection optionnelle (resp prévisible) (cf [7]-VI-47), on obtient comme corollaire la conservation également de la semicontinuité à droite (resp à gauche). Mais cela résultait déjà des n°2 ou 6 - du moins dans le cas optionnel.

b) Voici une autre méthode pour démontrer 1). On commence par établir, mettons, la première moitié de 1) "sans" filtration, ce qui évite la manipulation de t.d'a. et fournit aussi la seconde moitié "sans" filtration en changenant t en 1/t. On retrouve alors 1), avec filtration, par projection. Noter que cette méthode ne peut fournir 2), la continuité n'étant pas conservée en général par projection.

C. Du côté gauche

On pourrait évidemment s'intéresser aux Θ-systèmes $\mathbb{X}$ s.c.s. à gauche où cette fois $\mathcal{T}$ désigne la chronologie des t.d'a. prévisibles, Θ est une sous-chronologie de $\mathcal{T}$ et X_T est $\underline{\underline{F}}_{T-}$-mesurable pour tout $T \varepsilon \Theta$, etc. Les résultats sont analogues. On peut voir cela soit directement en paraphrasant le texte (attention à la bonne version du lemme 1), soit en utilisant les procédés des remarques ci-dessus. Soit, par exemple, à démontrer qu'un $\boxed{\Theta}$-système borné $\mathbb{X}$ s.c.s. à gauche est agrégeable par un processus prévisible s.c.s. à gauche X. En raisonnant d'abord "sans" filtration et en changeant t en 1/t par deux fois, on agrège $\mathbb{X}$ par un processus mesurable Y s.c.s. à gauche grâce au n°11. On projette alors sur la tribu prévisible pour obtenir X.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BENVENISTE (A.) : Séparabilité optionnelle, d'après Doob (Sém. de Proba. X, LN 511, Springer 1976, p. 521-531)

[2] BISMUT (J.M.), SKALLI (B.) : Temps d'arrêt optimal, théorie générale des processus et processus de Markov (ZfW 39, 1977, p. 301-313)

[3] DELLACHERIE (C.) : Deux remarques sur la séparabilité optionnelle (Sém. de Proba. XI, LN 581, Springer 1977, 47-50)

[4] : Sur l'existence de certains ess.inf et ess.sup de familles de processus mesurables (Sém. de Proba XII, LN 649, Springer 1978, p. 512-514)

[5] DELLACHERIE (C.), LENGLART (E.) : Sur des problèmes de régularisation, de recollement et d'interpolation en théorie des martingales (Sém. de Proba. XV, LN 850 Springer 1981, p. 328-346)

[6] DELLACHERIE (C.), MEYER (P.A.) : Probabilités et Potentiel. Chapitres I à IV (Hermann, Paris 1975)

[7] : Probabilités et Potentiel. Chapitres V à VIII (Hermann, Paris 1980)

[8] DOOB (J.L.) : Stochastic processes measurability conditions (Ann. Inst. Fourier, 25-II, 1975, p. 163-176)

[9] EMERY (M.) : Une propriété des temps prévisibles (Sém. de Proba XIV LN 784, Springer 1980, 316-317)

[10] MEYER (P.A.) : Convergence faible de processus d'après Mokobodzki (Sém. de Proba. XI, LN 581, Springer 1977, 109-119)

Et, pour le lecteur inquiet de savoir si nos deux exposés ont eu quelques applications, citons avec reconnaissance

[11] EL KAROUI (N.) : Méthodes probabilistes en contrôle stochastique (Ecole d'été de probabilités de Saint-Flour IX, 1979, LN 876, Springer 1981, 74-239)