SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MICHEL FLIESS
DOROTHÉE NORMAND-CYROT

Algèbres de Lie nilpotentes, formule de Baker-Campbell-Hausdorff et intégrales itérées de K.T. Chen

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 16 (1982), p. 257-267
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__257_0>

Algèbres de Lie nilpotentes, formule de Baker-Campbell-Hausdorff et intégrales itérées de K.T. Chen

Michel FLIESS
et
Dorothée NORMAND-CYROT
Laboratoire des Signaux & Systèmes
C.N.R.S. - E.S.E.
Plateau du Moulon
91190 Gif-sur-Yvette

INTRODUCTION

Yamato [19] a montré que la solution de l'équation différentielle stochastique

$$dq = A_o(q)\, dt + \sum_{i=1}^{n} A_i(q)\, db_i \tag{1}$$

est fonction C^∞ d'un nombre fini d'intégrales itérées $\int_o^t d\xi_{j_\nu} \ldots d\xi_{j_o}$ si, et seulement si, l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs $A_o, A_1, \ldots, A_n$, supposés C^∞, est nilpotente. L'équation (1) doit être interprétée au sens de Stratonovich; $b_1, \ldots, b_n$ sont des browniens. L'intégrale itérée stochastique $\int_o^t d\xi_{j_\nu} \ldots d\xi_{j_o}$ est définie par récurrence sur la longueur :

- $\xi_o(\tau) = \tau$, $\xi_i(\tau) = b_i(\tau)$ $(i=1,\ldots,n)$,
- $\int_o^t d\xi_j = \xi_j(t)$ $(j=0,1, \ldots, n$; on suppose $b_i(o) = 0$, $i = 1, \ldots, n)$,
- $\int_o^t d\xi_{j_\nu} \ldots d\xi_{j_o} = \int_o^t d\xi_{j_\nu}(\tau) \int_o^\tau d\xi_{j_{\nu-1}} \ldots d\xi_{j_o}$, où la dernière intégration

est prise au sens de Stratonovich.

Yamato note que ce résultat généralise des calculs de Gaveau [7] à propos de diffusions sur des groupes nilpotents. Comme le souligne Kunita [13], ces développements participent de la vogue actuelle de la géométrie différentielle stochastique (cf. Meyer [16]).

La démonstration originale de Yamato, qui fait appel à la théorie géométrique des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre, est complexe et, certainement, peu naturelle. C'est pourquoi, Kunita [12, 13], d'une part, Krener et Lobry [11], de l'autre, ont proposé des approches différentes qui seront analysées plus loin.

Ici, le second théorème fondamental de Lie permet de se ramener aux liens algébriques, connus depuis plus de vingt ans, entre formule de Baker-Campbell-Hausdorff et intégrales itérées de K.T. Chen. Est ainsi obtenue une expression intrinsèque de la solution, indépendante de tout choix de coordonnées. Le résultat de Yamato nous semble passablement étranger au cadre stochastique dans lequel il a, jusqu'à présent, été énoncé. Aussi commençons-nous par traiter les équations déterministes. Le cas stochastique s'en déduit par transfert[1].

Disons, pour terminer, que les intégrales itérées ont été introduites comme un instrument important en topologie par Chen [4] et qu'elles sont utilisées en [6] pour l'étude des fonctionnelles causales non linéaires.

Les auteurs tiennent à remercier I. Kupka, C. Lobry, P.A. Meyer et H.J. Sussmann pour d'utiles conversations et commentaires.

---

[1] Nous donnons, en fait, deux démonstrations. La première s'appuie sur la formule fondamentale de [6] donnant le développement fonctionnel d'une équation différentielle forcée. La seconde, qui n'est qu'esquissée à la fin de l'article, se ramène au cas matriciel en utilisant le fait que tout groupe de Lie nilpotent, simplement connexe, admet une représentation linéaire fidèle de dimension finie.

I - PROLÉGOMÈNES ALGÉBRIQUES

Considérons un chemin C_{t_o,t_1} de $\underline{R}^{n+1}$ donné par n+1 fonctions $\xi_o, \xi_1, \ldots, \xi_n$: $[t_o, t_1] \to \underline{R}$ continues, à variations bornées. On définit l'intégrale itérée $\int_{t_o}^{t} d\xi_{j_\nu} \ldots d\xi_{j_o}$ par récurrence sur la longueur

$$\int_{t_o}^{t} d\xi_j = \xi_j(t) - \xi_j(t_o) \qquad (j = 0, 1, \ldots, n)$$

$$\int_{t_o}^{t} d\xi_{j_\nu} \ldots d\xi_{j_o} = \int_{t_o}^{t} d\xi_{j_\nu}(\tau) \int_{t_o}^{\tau} d\xi_{j_{\nu-1}} \ldots d\xi_{j_o},$$ où la dernière intégration est au sens de Stieltjes.

Soit $\underline{R} \ll X \gg$ la $\underline{R}$ - algèbre des séries formelles, à coefficients réels, en les indéterminées associatives $x_j \in X$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$ (non commutatives si $n \geq 1$). Associons à C_{t_o,t_1} la série (exponentielle) de Chen [2] dans $\underline{R} \ll X \gg$:

$$e(C_{t_o,t_1}) = 1 + \sum_{\nu \geq o} \sum_{j_o,\ldots,j_\nu = o}^{n} x_{j_\nu} \ldots x_{j_o} \int_{t_o}^{t_1} d\xi_{j_\nu} \ldots d\xi_{j_o}$$

On montre (Chen [3]) que cette série caractérise le chemin C_{t_o,t_1} à une translation près.

Venons-en aux propriétés algébriques.

Fait 1 - Prenons deux chemins C_{t_o,t_1} et C_{t_1,t_2} $(t_o < t_1 < t_2)$ définis par $\xi_j^{(1)} : [t_o,t_1] \to \underline{R}$ et $\xi_j^{(2)}: [t_1,t_2] \to \underline{R}$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$ que nous mettons bout-à-bout de façon à obtenir le chemin C_{t_o,t_2} donné par

$$\xi_j(\tau) = \begin{cases} \xi_j^{(1)}(\tau) & \text{si } t_o \leq \tau \leq t_1 \\ \xi_j^{(2)}(\tau) - \xi_j^{(2)}(t_1) + \xi_j^{(1)}(t_1) & \text{si } t_1 \leq \tau \leq t_2 \end{cases}$$

La série de Chen $e(C_{t_o,t_2})$ est égale au produit $e(C_{t_1,t_2})\, e(C_{t_o,t_1})$ des séries de Chen des chemins (cf. Chen [2]). Il faut faire attention à l'ordre du produit, ce dernier étant évidemment non commutatif.

Fait 2 - Chen [2] et Ree [18][(2)] ont généralisé la formule de Baker-Campbell-Hausdorff (cf. Bourbaki [1]) en considérant le logarithme $h(C_{t_o,t_1})=\mathrm{Log}\ e(C_{t_o,t_1})$ d'une série de Chen. Cela est possible puisque toute série de Chen est de la forme $1+U$ où le terme constant de U est nul. Il vient

$$h(C_{t_o,t_1}) = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \dots,$$

où Ω_1, Ω_2, Ω_3, ... sont des polynômes de Lie homogènes de degré 1,2,3, ... On obtient

$$\Omega_1 = \sum_{j=o}^{n} x_j \int_{t_o}^{t_1} d\xi_j = \sum_{j=o}^{n} x_j(\xi_j(t_1) - \xi_j(t_o)),$$

$$\Omega_2 = \frac{1}{2} \sum_{j_o,j_1=o}^{n} [x_{j_1},x_{j_o}] \int_{t_o}^{t_1} d\xi_{j_1}\ d\xi_{j_o},$$

$$\Omega_3 = \frac{1}{6} \sum_{j_o,j_1,j_2=o}^{n} ([x_{j_2},[x_{j_1},x_{j_o}]]+[[x_{j_2},x_{j_1}],x_{j_o}]) \int_{t_o}^{t_1} d\xi_{j_2}\ d\xi_{j_1}\ d\xi_{j_o}.$$

Ici, le crochet de Lie $[x_j, x_{j'}]$ est défini par

$$[x_j, x_{j'}] = x_j\, x_{j'} - x_{j'}\, x_j\ .$$

Plus généralement, on peut écrire :

$$h(C_{t_o,t_1}) = \sum_{\nu\geq o} \sum_{j_o,\dots,j_\nu=o}^{n} L_{j_\nu\dots j_o} \int_{t_o}^{t_1} d\xi_{j_\nu} \dots d\xi_{j_o}, \tag{2}$$

où $L_{j_\nu\dots j_o}$ est une combinaison linéaire de crochets d'ordre $\nu+1$ des indéterminées x_o, x_1, ..., x_n.

---

(2) L'article de Ree qui utilise les propriétés du mélange [6] ("shuffle product" en anglais) est d'une grande richesse combinatoire.

II - ÉQUATIONS DÉTERMINISTES

a) - Présentation

Considérons le système différentiel

$$\dot{q}(t) = A_o(q) + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)\ A_i(q) \tag{3}$$

L'état q appartient à une variété Q, C^∞-différentielle, de dimension N. Les champs de vecteurs $A_o, A_1, \ldots, A_n$ sont aussi C^∞. Ils engendrent une algèbre de Lie L nilpotente de classe p : la série centrale descendante de L est nulle à partir du terme d'ordre p+1. Comme il est nécessaire de le faire dans le cas stochastique, on suppose les champs de vecteurs $A_o, A_1, \ldots, A_n$ complets, c'est-à-dire tels que les groupes à un paramètre qu'ils engendrent soient toujours définis. Les entrées $u_1, \ldots, u_n$ sont continues par morceaux.

Définissons, ici, le crochet de Lie $[A_j, A_{j'}]$ par

$$[A_j, A_{j'}] = A_{j'}\ A_j - A_j\ A_{j'}$$

La différence avec le paragraphe I s'expliquera par la suite. Le champ de vecteurs $A_{j_\nu \ldots j_o}$ s'obtient en substituant dans l'expression $L_{j_\nu \ldots j_o}$ de la formule (2) A_j à x_j. L'intégrale itérée $\int_o^t d\xi_{j_\nu} \ldots d\xi_{j_o}$ se calcule comme au paragraphe I, en posant $\xi_o(\tau) = \tau$, $\xi_i(\tau) = \int_o^\tau u_i(\sigma)\, d\sigma$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Le théorème suivant est le résultat principal de cet article.

Théorème 1 - La solution de l'équation (3) est une fonction C^∞ d'un nombre fini d'intégrales itérées, donnée par la formule

$$q(t) = \exp\Big(\sum_{\nu=o}^{p-1} \sum_{j_o,\ldots j_\nu=o}^{n} A_{j_\nu \ldots j_o} \int_o^t d\xi_{j_\nu} \ldots d\xi_{j_o}\Big).\ q(o). \tag{4}$$

D'après Palais [17], on sait que tout champ de vecteurs de L est complet. En effet, L est de dimension finie et engendrée par $A_o, A_1, \ldots, A_n$ qui sont complets. Cela montre que l'expression (4) est toujours définie. Cette formule une fois prouvée, la dépendance C^∞ en fonction des intégrales itérées découle des résultats classiques sur la dépendance paramétrique des solutions d'équations différentielles ordinaires.

b) - <u>Démonstration</u>.

L'algèbre de Lie L étant de dimension finie, on peut appliquer la globalisation, due à Palais [17](voir aussi Kobayashi [10], chap. I, § 3), du second théorème fondamental de Lie [14], chap. 25, § 111-114.

Il existe un groupe de Lie G, d'algèbre de Lie $\hat{L}$, isomorphe à L, agissant sur la variété Q de la façon C^∞ suivante :

Notons A un élément quelconque de L et $\hat{A}$ son correspondant dans $\hat{L}$. Soient e^{tA} le groupe à un paramètre engendré par A et $e^{t\hat{A}}$ l'élément de G donné par l'application exponentielle. Pour tout $q \in Q$, on pose

$$e^{t\hat{A}}.q = e^{tA}.q \,.$$

Introduisons le système différentiel sur G

$$\dot{g}(t) = \hat{A}_o(g) + \sum_{i=1}^{n} u_i(t)\, \hat{A}_i(g). \tag{5}$$

g(o) est l'élément neutre de G. Les champs de vecteurs $\hat{A}_o(g)$, $\hat{A}_1(g)$, ..., $\hat{A}_n(g)$ sont invariants à droite et correspondent à A_o, A_1, ..., A_n. Les équations (3) et (5) sont liées par la propriété fondamentale

$$q(t) = g(t).\, q(o).$$

La démonstration se ramène alors à celle du lemme suivant :

<u>Lemme</u>. - La solution de (5) est donnée par

$$g(t) = \exp\Big(\sum_{\nu=o}^{p-1} \sum_{j_o,\ldots,j_\nu=o}^{n} \hat{A}_{j_\nu\ldots j_o} \int_o^t d\xi_{j_\nu}\ldots d\xi_{j_o} \Big).$$

Notons, d'abord, qu'en vertu des faits 1 et 2 du paragraphe I, on peut écrire :

$$\exp\Big(\sum_{\nu=o}^{p-1} \sum_{j_o,\ldots,j_\nu=o}^{n} \hat{A}_{j_\nu\ldots j_o} \int_o^{t+\delta} d\xi_{j_\nu}\ldots d\xi_{j_o} \Big) =$$

$$\exp\Big(\sum_{\nu=o}^{p-1}\ \sum_{j_o,\dots j_\nu=o}^{n} \hat{A}_{j_\nu\dots j_o} \int_t^{t+\delta} d\xi_{j_\nu}\dots d\xi_{j_o}\Big).\exp\Big(\sum_{\nu=o}^{p-1}\ \sum_{j_o,\dots,j_\nu=o}^{n} \hat{A}_{j_\nu\dots j_o} \int_o^{t} d\xi_{j_\nu}\dots d\xi_{j_o}\Big)$$

Prenons sur G un système de coordonnées locales $g = (g^1, \dots g^d)$;

d'origine $g(t) = \exp\Big(\sum_{\nu=o}^{p-1}\ \sum_{j_o,\dots,j_\nu=o}^{n} \hat{A}_{j_\nu\dots j_o} \int_o^{t} d\xi_{j_\nu}\dots d\xi_{j_o}\Big)$. Comme G est analytique, il existe une formule de Taylor permettant d'écrire, pour δ suffisamment petit,

$$g^k(t+\delta) = \sum_{\mu\geq o} \frac{1}{\mu!} (\hat{A})^\mu\, g^k\big|_{g(t)} \quad (k=1, \dots, d) \tag{6}$$

où $\hat{A} = \sum_{\nu=o}^{p-1}\ \sum_{j_o,\dots,j_\nu=o}^{n} \hat{A}_{j_\nu\dots j_o} \int_t^{t+\delta} d\xi_{j_\nu}\dots d\xi_{j_o}$.(3) La barre $|_{g(t)}$ désigne l'évaluation en g(t).

Le fait 2 du paragraphe I conduit à développer (6) :

$$g^k(t+\delta) = g^k(t) + \sum_{\nu\geq o}\ \sum_{j_o,\dots,j_\nu=o}^{n} \hat{A}_{j_o}\dots\hat{A}_{j_\nu}\, g^k\big|_{g(t)} \int_t^{t+\delta} d\xi_{j_\nu}\dots d\xi_{j_o}.$$

Notons l'ordre inverse des suites $\hat{A}_{j_o}\dots\hat{A}_{j_\nu}$ et $\int_t^{t+\delta} d\xi_{j_\nu}\dots d\xi_{j_o}$, qui explique la définition du crochet de Lie prise ici. On retrouve la formule, dite fondamentale, de [6] qui exprime le développement fonctionnel de la solution d'un système différentiel forcé. g vérifie donc l'équation (5).

<u>Remarques</u> - (i) Si l'on ne supposait pas la complétude des champs de vecteurs, il suffirait d'utiliser la version originale du second théorème fondamental de Lie [14], qui est locale (voir Bourbaki [1] pour une présentation moderne). Il faut alors prendre le temps t et les entrées u_i petits.

---

(3) Nous confondons les éléments de $\hat{L}$ et les champs de vecteurs sur G, invariants à droite.

(ii) Il nous semble indispensable pour pouvoir appliquer, d'une manière ou d'une autre, la formule de Baker-Campbell-Hausdorff, d'utiliser le second théorème fondamental de Lie. Quoique Kunita le fasse en [13], il s'en abstient en [12], où sa mise en oeuvre de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff repose sur une interprétation littérale de la notion exponentielle e^{tA} pour le groupe à un paramètre associé à un champ de vecteurs A. Or, e^{tA} ne doit pas être confondue avec une "véritable" exponentielle $1 + \frac{tA}{1!} + \frac{t^2 A^2}{2!} + \dots$, surtout si A est supposé C^∞ et non analytique.

III - ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTISQUES

Reprenons l'équation différentielle stochastique (1) où q, A_o, A_1, ..., A_n obéissent aux mêmes hypothèses qu'en (3). Le principe de transfert dû à Malliavin [15], partie II, chap. I, et qui consiste à "régulariser" les browniens par des fonctions C^∞, permet d'énoncer l'équivalent stochastique du théorème 1.

Théorème 2 - La solution de l'équation (1) est une fonction C^∞ d'une nombre fini d'intégrales itérées stochastiques, donnée par la formule

$$q(t) = \exp\left(\sum_{\nu=o}^{p-1} \sum_{j_o,\dots,j_\nu=o}^{n} A_{j_\nu \dots j_o} \int_o^t d\xi_{j_\nu} \dots d\xi_{j_o} \right). q(o) .$$

Remarques - (i) Notre définition de l'intégrale itérée stochastique, donnée dans l'introduction, reprend celle de Yamato [19]. On trouvera en [5] une construction par approximations polygonales utilisant les séries de Chen. Il est clair que cette intégrale diffère de celle que l'on obtiendrait à partir de l'intégrale multiple de Wiener et Itô [9]. Pourtant, Kunita [12, 13] et Krener et Lobry [11] affirment, à notre avis à tort, employer cette dernière qui, n'obéissant pas aux règles de calcul ordinaires, ne redonnerait pas des formules identiques à celles du cas déterministe. Etayons cela en considérant le système au sens de Stratonovich

$$\begin{cases} dq^1 = db_1 \\ dq^2 = q^1 \, db_1 \end{cases} \qquad (q^1(o) = q^2(o) = o).$$

il vient $q^1(t) = \int_o^t db_1 = b_1(t)$, $q^2(t) = \int_o^t db_1(\tau) \int_o^\tau db_1(\sigma) = \frac{(b_1(t))^2}{2}$. Avec Wiener - Itô, on obtiendrait un polynôme d'Hermite.

(ii) Comme en [5], on peut employer le théorème 2 à étudier la stabilité de la solution par rapport à des approximations des browniens.

IV - DEUX EXEMPLES SIMPLES

a) Champs de vecteurs commutatifs

Supposons qu'en (1), les champs de vecteurs A_o, A_1, ..., A_n commutent deux à deux, c'est-à-dire que $[A_j, A_{j'}] = 0$. Alors le théorème 2 montre que la solution s'écrit

$$q(t) = \exp\,(tA_o + \sum_{i=1}^{n} b_i(t)\,A_i).\,q(o).$$

b) Champs de vecteurs linéaires

Soit le système différentiel au sens de Stratonovich

$$dq(t) = (M_o\,dt + \sum_{i=1}^{n} M_i\,db_i)\,q(t). \tag{7}$$

L'état q appartient à $\underline{R}^N$. Les matrices M_o, M_1, ..., M_n sont carrées, d'ordre N. Avec le formalisme des champs de vecteurs, il lui correspond une équation de type (1) où $q = (q^1, \ldots, q^N)$ et

$$A_j(q) = [\,q^1, \ldots, q^N\,]\ {}^tM_j \begin{bmatrix} \partial/\partial q^1 \\ \vdots \\ \partial/\partial q^N \end{bmatrix} \qquad (j = 0, 1, \ldots, n)$$

(${}^tM_j$ désigne la matrice transposée de M_j).

Supposons l'algèbre de Lie matricielle engendrée par M_o, M_1, ..., M_n nilpotente, de classe p. En raison de la transposition, le crochet de Lie $[M_j, M_{j'}]$ est défini , ici, par

$$[M_j, M_{j'}] = M_j\,M_{j'} - M_{j'}\,M_j\ .$$

Soit $M_{j_\nu \ldots j_o}$ la matrice obtenue en substituant M_j à x_j dans $L_{j_\nu \ldots j_o}$ de la formule (2). Le théorème 2 donne :

$$q(t) = \exp\,(\sum_{\nu=o}^{p-1}\ \sum_{j_o,\ldots,j_\nu=o}^{n} M_{j_\nu\ldots j_o} \int_o^t d\xi_{j_\nu}\ldots d\xi_{j_o}).\,q(o). \tag{8}$$

Remarques - (i) On sait (cf. [5]) pouvoir écrire la solution de (7) sous la forme

$$q(t) = \left(1 + \sum_{\nu \geq o} \sum_{j_o, \ldots, j_\nu = o}^{n} M_{j_\nu} \ldots M_{j_o} \int_o^t d\xi_{j_\nu} \ldots d\xi_{j_o}\right) . \; q(o)$$

qui est une série p.s. absolument convergente. Prenons alors le logarithme de la résolvante

$$1 + \sum_{\nu \geq o} \sum_{j_o, \ldots, j_\nu = o}^{n} M_{j_\nu} \ldots M_{j_o} \int_o^t d\xi_{j_\nu} \ldots d\xi_{j_o} \tag{9}$$

Le fait 2 du paragraphe 1 conduit à retrouver la formule (8).

Il importe de noter que l'équation (1) peut se ramener à (7). En effet, la formule de Baker-Campbell-Hausdorff permet de doter l'algèbre de Lie nilpotente L, engendrée par A_o, A_1, ..., A_n, d'une structure de groupe nilpotent, simplement connexe (cf. Bourbaki [1], chap. III, § 9.5). Ce groupe opère canoniquement sur la variété Q et, comme il est simplement connexe, admet une représentation linéaire fidèle de dimension finie (cf. Hochschild [8], chap. XVIII, § 3). Un avantage de cette méthode est qu'une fois démontrée la convergence de (9), il n'est plus besoin d'un principe de transfert général pour passer du déterministe au stochastique.

(ii) Si l'algèbre de Lie engendrée par M_o, M_1, ..., M_n est nilpotente, on sait pouvoir triangulariser simultanément ces matrices. Avec Krener et Lobry [11], on en déduit que q(t) est fonction d'un nombre fini d'intégrales itérées.

CONCLUSION

Comme Kunita [13] et Krener et Lobry [11], nous pourrions passer aux algèbres de Lie résolubles. Pour ne pas trop allonger, nous ne le ferons pas d'autant plus qu'il suffit d'employer les mêmes techniques, à savoir second théorème fondamental de Lie et intégrales itérées de Chen que, dans le cas stochastique, il ne faut point confondre avec l'intégrale multiple de Wiener - Itô.

Enfin, il est clair que l'on obtiendrait les mêmes résultats avec l'équation au sens de Stratonovich

$$dq = \sum_{j=o}^{n} A_j(q) \; d\xi_j \; ,$$

où les ξ_j sont des semi-martingales continues.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BOURBAKI (N.) - Groupes et algèbres de Lie, Chap. II et III, Hermann, Paris, 1972.

[2] CHEN (K.T.) - Integrations of paths, geometric invariants and a generalized Baker-Hausdorff formula, Ann. of Math., 65, 1957, p. 163-178.

[3] CHEN (K.T.) - Integrations of paths - a faithful representation of paths by non-commutative formal power series, Trans. Amer. Math. Soc., 89, 1958, p. 395-407.

[4] CHEN (K.T.) - Iterated path integrals, Bull. Amer. Math. Soc., 83, 1977, p. 831-879.

[5] FLIESS (M.) - Stabilité d'un type élémentaire d'équations différentielles stochastiques à bruits vectoriels, Stochastics, 4, 1981, p. 205-213.

[6] FLIESS (M.) - Fonctionnelles causales non linéaires et indéterminées non commutatives, Bull. Soc. Math. France, 109, 1981, p. 3-40.

[7] GAVEAU (B.) - Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimées sous-elliptiques sur certains groupes nilpotents, Acta Math., 139, 1977, p. 95-153.

[8] HOCHSCHILD (G.) - La structure des groupes de Lie (traduit de l'anglais), Dunod, Paris, 1968.

[9] ITÔ (K.) - On multiple Wiener integrals, J. Math. Soc. Japan, 3, 1951, p. 157-169.

[10] KOBAYASHI (S.) - Transformation groups in differential geometry, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[11] KRENER (A.J.) et LOBRY (C.) - The complexity of stochastic differential equations, Stochastics, 4, 1981, p. 193-203.

[12] KUNITA (H.) - On the representation of solutions of stochastic differential equations, in "Séminaire de Probabilités XIV 1978/79" (Réd. J. Azéma et M. Yor), Lect. Notes Math. 784, p. 282-304, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[13] KUNITA (H.) - On the decomposition of solutions of stochastic differential equations, in "Stochastic Integrals" (Réd. D. Williams), Lect. Notes Math. 851, p. 213-255, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[14] LIE (S.) - Theorie der Transformationsgruppen, 3.Bd.,Teubner, Leipzig, 1893 (Réimpression : Chelsea, New York, 1970).

[15] MALLIAVIN (P.) - Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators, in "Proc. Internat. Symp. Stochastic Differential Equations" (Réd. K. Itô), p. 195-263, Wiley, New York, 1978.

[16] MEYER (P.A.) - Géométrie stochastique sans larmes, in "Séminaire de Probabilités XV 1979/80"(Réd. J. Azéma et M. Yor), Lect. Notes Math. 850, p. 44-102, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[17] PALAIS (R.) - A global formulation of the Lie theory of transformation groups, Mem. Amer. Math. Soc. 22, Providence, R.I., 1957.

[18] REE (R.) - Lie elements and an algebra associated with shuffles, Ann. of Math., 68, 1958, p. 210-220.

[19] YAMATO (Y.) - Stochastic differential equations and nilpotent Lie algebras, Z. Wahr. verw. Geb., 47, 1979, p. 213-229.