Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Marc Yor

Sur la transformée de Hilbert des temps locaux browniens et une extension de la formule d'Itô

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 16 (1982), p. 238-247
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__238_0>

SUR LA TRANSFORMEE DE HILBERT DES TEMPS LOCAUX BROWNIENS, ET UNE EXTENSION DE LA FORMULE D'ITÔ

M. YOR (*)

Introduction :

Ce travail a trois origines :

- d'une part, l'existence, remarquée par Itô - Mc Kean ([6], p. 72, Problem 1) de la limite p.s., lorsque a et t sont fixés, et $\varepsilon \to 0$, de :

$$I_\varepsilon(a,t) \equiv \int_0^t \frac{ds}{(B_s-a)} 1_{\{|B_s-a|\geq\varepsilon\}} \equiv \int_\varepsilon^\infty \frac{dx}{x} (L_t^{a+x} - L_t^{a-x}),$$

  où (B_t) désigne le mouvement Brownien réel, et (L_t^y) une version bicontinue de ses temps locaux. Cette remarque a déjà été utilisée par C. Yoeurp [11].

- d'autre part, l'article de T. Yamada [10], où figurent des approximations du processus continu $(A_t^f, t \geq 0)$, d'énergie nulle, défini par la "formule d'Itô" :

$$f(B_t) = f(B_o) + \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2} A_t^f, \tag{0.a}$$

  lorsque $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet une dérivée (au sens des distributions) f' dans L^2_{loc}. (voir les articles de A. Wang [9] et M. Fukushima [4] pour les premières études de A^f). En particulier, pour $f_a(x) \equiv (x-a)\log|x-a| - (x-a)$, T. Yamada [10] prouve que $A_t^{f_a} = \lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(a,t)$.

- enfin le travail de R. Bass [2] qui associe au mouvement Brownien (B_t), à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, la famille des temps locaux $(L_t^a(\theta)\ ;\ \theta \in S_{d-1},\ a \in \mathbb{R})$ des mouvements Browniens réels $(\theta\cdot B_t\ ;\ \theta \in S_{d-1})$. L'introduction de cette famille semble très prometteuse car, pour de "bonnes" fonctions $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, la fonctionnelle additive $\int_0^\cdot f(B_s)ds$ est représentable comme intégrale des temps locaux $L_\cdot^a(\theta)$, dans laquelle figure la transformée de Radon de f ,(voir [2]).

(*) Membre du Laboratoire de Probabilités - 4 Place Jussieu - Tour 56 - 3ème Etage - Couloir 56-66 - 75005 PARIS CEDEX

Retournons au cadre unidimensionnel : on montre, au paragraphe 2, l'existence d'un processus $(\tilde{L}_t^a(\omega)\ ;\ t \geq 0,\ a \in \mathbb{R})$, bicontinu, qui coïncide p.s. avec $\lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon(a,t)$. Pour cela, nous sommes amené tout d'abord à préciser les propriétés de continuité, en (a,t), des temps locaux (L_t^a) du mouvement Brownien réel.

En fait, de façon à étendre également les résultats de continuité de Bass pour la famille $\{L_t^a(\theta)\}$, nous étudions, au paragraphe 1, la continuité des temps locaux $\{L_t^a(M^x)\}$ associés à une famille $(M^x, x \in \mathbb{R}^d)$ de martingales continues qui dépendent de façon lipschitzienne de x.

Enfin, on obtient, au paragraphe 3, des résultats d'approximation du processus A^f, lorsque $f \in C^2(\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

<u>Notations</u> : $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ désigne un espace de probabilité filtré usuel.
Pour tout $p \in [1,\infty[$, et M martingale locale continue, on note $\|M\|_{H^p} = \|M^*\|_{L^p}$, avec $M^* = \sup_t |M_t|$. On associe à M la famille $(L_t^a(M)\ ;\ t \geq 0,\ a \in \mathbb{R})$ bicontinue des temps locaux de M

Enfin, les lettres c_p, C_p désignent des constantes universelles qui varient de place en place.

1. *Sur la continuité des temps locaux associés à une famille de martingales continues.*

Il est démontré en [1] que, pour tout $p \in [1,\infty[$, on a :

(1.a) $$\|L^*(M)\|_{L^p} \leq C_p \|M\|_{H^p},$$

où $L^*(M) = \sup_a L_\infty^a(M)$. Une conséquence intéressante de (1.a) est que, si M et N sont deux martingales locales continues, on a :

(1.b) $$\sup_{u \in \mathbb{R}} \|\sup_t |L_t^u(M) - L_t^u(N)|\|_{L^p} \leq C_p \|M-N\|_{H^p}^{1/2} \{\|M\|_{H^p}^{1/2} + \|N\|_{H^p}^{1/2}\}.$$

On en déduit le

<u>Théorème (1.1)</u> : <u>Soit</u> $p \in [1,\infty[$, $\lambda \in]0,1]$, <u>et</u> $(M^x, x \in \mathbb{R}^d)$ <u>une famille de martingales locales continues telle que</u> :

(1.c) $$\|M^x - M^y\|_{H^p} \leq C\, |x-y|^\lambda.$$

Alors, si $\lambda p > 2(d+1)$, il existe une version, notée $(L_t^a(x)\ ;\ t \geq 0,\ a \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^d)$ continue en (a,t,x), des temps locaux $\{L_t^a(M^x)\}$.

De plus, pour tous $A > 0$, $\rho > 0$, et $\gamma \in \left]0\ ;\ \frac{\lambda}{2} - \frac{d+1}{p}\right[$ il existe une v.a. finie $H_{A,\rho,\gamma}$ telle que : pour tous a,b, avec $|a|, |b| \leq A$, pour tous x,y, avec $|x|, |y| \leq \rho$,

$$\text{(1.d)} \qquad \sup_t |L_t^a(x) - L_t^b(y)| \leq H_{A,\rho,\gamma} \cdot \delta^\gamma,$$

où $\delta = \{(a-b)^2 + |x-y|^2\}^{1/2}$.

Démonstration : 1) D'après l'hypothèse (1.c), et l'inégalité (1.b), prise en $u = 0$, avec $M = M^x - a$, $N = M^y - b$, on a :

$$\|\sup_t |L_t^a(M^x) - L_t^b(M^y)|\|_{L^p} \leq C_{A,\rho} \quad \{|a-b| + |x-y|^\lambda\}^{1/2}$$

$$\leq C'_{A,\rho} \quad \{|a-b|^2 + |x-y|^2\}^{\lambda/4},$$

où $|a|, |b| \leq A$, $|x|, |y| \leq \rho$, et $C_{A,\rho}^{(')}$ désigne une constante qui dépend de C,A,ρ. D'après le lemme de Kolmogorov, il existe donc une version continue $L_t^a(x)$ de $\{L_t^a(M^x)\}$.

2) On obtient maintenant (1.d) par application du théorème de Garsia - Rodemich - Rumsey [5] (cf., également : Stroock - Varadhan [8], p. 47 et 60). Si B désigne une boule de $\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_a$, on a

$$\int_B dx\, da \int_B dy\, db \left(\frac{\sup_t |L_t^a(x) - L_t^b(y)|}{\delta^{\lambda'/2}} \right)^p < \infty, \quad P\text{-p.s.},$$

(on note $\delta = (|a-b|^2 + |x-y|^2)^{1/2}$) pour tout λ' tel que : $\frac{\lambda-\lambda'}{2} p + d > -1$, c'est-à-dire : $\gamma \equiv \frac{\lambda'}{2} - \frac{2(d+1)}{p} < \frac{\lambda}{2} - \frac{(d+1)}{p}$.

Il existe donc une variable aléatoire $H^{(')}$, finie P-p.s., telle que, pour tous (x,a), $(y,b) \in B$, on ait :

$$\sup_t |L_t^a(x) - L_t^b(y)| \leq H \int_0^{2\delta} \frac{du\, u^{\frac{\lambda'}{2} - 1}}{u^{2\frac{(d+1)}{p}}} = H' \cdot \delta^\gamma.$$

Corollaire (1.2) : Soit M martingale locale continue, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Il existe une version continue, notée $(L_t^a(\theta)\ ;\ t \geq 0,\ \theta \in S_{d-1},\ a \in \mathbb{R})$ des temps locaux $\{L_t^a(\theta\cdot M)\}$.

De plus, pour tout $\gamma \in]0, \frac{1}{2}[$, et tous $A > 0$, $T > 0$, il existe une v.a. finie $H_{T,A,\gamma}$ telle que : pour tous a,b, avec $|a|, |b| \leq A$, pour tous $\theta, \theta' \in S_{d-1}$,

$$\sup_{t \leq T} |L_t^a(\theta) - L_t^b(\theta')| \leq H_{A,T,\gamma}\cdot\delta^\gamma,$$

où $\delta = ((a-b)^2 + |\theta-\theta'|^2)^{1/2}$.

Démonstration : Par localisation, on peut supposer M uniformément bornée. On applique ensuite le théorème (1.1) à la famille $M^x = x\cdot M$ $(x \in \mathbb{R}^d)$, avec $\lambda = 1$, pour tout $p > 2(d+1)$.

Remarque : On obtient ainsi une famille continue $(L_t^a(x)\ ;\ a \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^d,\ t \geq 0)$ mais on peut se restreindre à prendre $x \in S_{d-1}$, car pour tout $\rho \in \mathbb{R}$, on a l'égalité :

$L_t^{\rho a}(\rho x) = \rho L_t^a(x)$, à un ensemble négligeable près.

2. *Etude de la continuité de la transformée de Hilbert des temps locaux Browniens.*

Appliquons le corollaire (1.2) aux temps locaux (L_t^a) du mouvement Brownien réel (B_t). Pour tout (t,ω), $a \to L_t^a(\omega)$ est à support compact ; en conséquence, pour tous $T > 0$, $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$, il existe une v.a. finie $H_{T,\varepsilon}$ telle que :

$$\text{(2.a)} \qquad \sup_{t \leq T} |L_t^a - L_t^b| \leq H_{T,\varepsilon}\ |a-b|^{\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

D'autre part, on déduit de l'inégalité (1.a) appliquée à la martingale $(B_{t\wedge u} - B_{s\wedge u}\ ;\ u \geq 0)$, lorsque $0 < s < t < \infty$, que, pour tout $p \geq 1$:

$$\text{(2.b)} \qquad E\left[\sup_a |L_t^a - L_s^a|^p\right] \leq C_p\ |t-s|^{p/2}.$$

Le théorème de Garsia - Rodemich - Rumsey entraîne à nouveau, pour tout $T > 0$, et $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$, l'existence d'une v.a. $K_{T,\varepsilon}$ telle que : pour tout s,t, avec $|s|, |t| \leq T$,

$$\text{(2.c)} \qquad \sup_a |L_t^a - L_s^a| \leq K_{T,\varepsilon}\ |t-s|^{\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

Remarque : Le résultat (2.c) est probablement connu ; toutefois, dans Itô - Mc Kean ([6], p. 65, 9b)), on trouve seulement : $\overline{\lim\limits_{\substack{t-s=\delta\downarrow 0\\ s<t\leq 1\\ a\in\mathbb{R}}}} \dfrac{|L_t^a - L_s^a|}{(\delta(\log\frac{1}{\delta})^2)^{\frac{1}{3}}} = 0$, p.s.

On peut maintenant énoncer le

Théorème (2.1) : Soit (L_t^a) une version bicontinue des temps locaux Browniens. Alors :

(i) $P\left[\int_0^\infty \frac{dx}{x}\,|L_t^{a+x} - L_t^{a-x}| < \infty,\ \forall a,t\right] = 1$

(ii) Si l'on note $\tilde{L}_t^a = \int_0^\infty \frac{dx}{x}\,(L_t^{a+x} - L_t^{a-x})$, il existe, pour tous $T > 0$, $A > 0$, et $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, deux variables finies $H_{T,A,\varepsilon}$ et $K_{T,A,\varepsilon}$ telles que :

(2.d) $\forall a,b : |a|, |b| \leq A, \quad \sup\limits_{t\leq T} |\tilde{L}_t^a - \tilde{L}_t^b| \leq H_{T,A,\varepsilon}\,|a-b|^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$,

(2.e) $\forall t,s : t,s \leq T, \quad \sup\limits_{|a|\leq A} |\tilde{L}_t^a - \tilde{L}_s^a| \leq K_{T,A,\varepsilon}\,|t-s|^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$.

Introduisons, en vue de la démonstration du théorème (2.1), quelques notations : pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, et tout $\alpha > 0$, notons $\Lambda_\alpha(I)$ l'espace des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ höldériennes d'ordre α, muni de la norme :

$$\|f\|_{\alpha,I} = \sup_{x\in I} |f(x)| + \sup_{\substack{x,y\in I\\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

On note encore $\Lambda_*(I) = \bigcap\limits_{\alpha<1/2} \Lambda_\alpha(I)$. (On supprime partout l'indice I lorsque $I = \mathbb{R}$).

Le théorème (2.1) découle alors des arguments suivants, sans aucun doute très familiers aux analystes (voir, par exemple, P. Koosis [12], p. 140).

1) si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est à support compact, et appartient à Λ_*, on a, pour tout $a \in \mathbb{R}$: $\int \frac{dx}{x}\,|f(a+x) - f(a-x)| < \infty$, et si $\tilde{f}(a) = \int_0^\infty \frac{dx}{x}\,(f(a+x) - f(a-x))$, alors, pour tout $A > 0$, $\tilde{f} \in \Lambda_*([-A,A])$.

De plus, pour tout $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$, on peut estimer comme suit $\|\tilde{f}\|_{\Lambda_\alpha([-A,A])}$ en fonction de $\|f\|_{\Lambda_{\alpha'}}$, pour tout $\alpha' \in]\alpha, \frac{1}{2}[$: si f est nulle hors de $[-C,C]$, et si on note $\phi_a(x) = f(a+x)-f(a-x)$, on a, pour $|a|$, $|b| \leq A$, $\alpha' \in]0, \frac{1}{2}[$, $\eta > 0$:

$$|\tilde{f}(a)-\tilde{f}(b)| \leq \int_0^\eta \frac{dx}{x} \{|\phi_a(x)| + |\phi_b(x)|\} + \int_\eta^\infty \frac{dx}{x} |\phi_a(x)-\phi_b(x)|$$

$$\leq c_{\alpha'} \|f\|_{\Lambda_{\alpha'}} \{\eta^{\alpha'} + |a-b|^{\alpha'} [\log(C+A) - \log \eta]\}.$$

On prend maintenant $\eta = |a-b|$, et on majore $\eta^{\alpha'}|\log \eta|$ par un multiple, qui dépend de A, de η^α.

2) Soit $f : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que :

- il existe $C > 0$, tel que pour tout t, $f(t,\cdot) \equiv f_t(\cdot)$ est à support dans $[-C,C]$.
- pour tout $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$, $m_\alpha \equiv \sup_{t \leq T} \|f(t,\cdot)\|_{\Lambda_\alpha} < \infty$.
- pour tout $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$, $n_\alpha \equiv \sup_a \|f(\cdot,a)\|_{\Lambda_\alpha([0,T])} < \infty$.

Alors, pour tout $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$, $A > 0$, $\sup_{|a| \leq A} \|(\tilde{f}_\cdot)(a)\|_{\Lambda_\alpha([0,T])}$ est fini, et peut être majoré à l'aide de $C, A, m_{\alpha'}$ et $n_{\alpha'}$, pour $\alpha' \in]\alpha, \frac{1}{2}[$.

La démonstration est tout à fait semblable à celle du point 1) ci-dessus. □

Le module de continuité exact, pour $t > 0$ fixé, de $(L_t^a \,;\, a \in \mathbb{R})$ est connu (cf. Itô - Mc Kean [6], p. 65). On a :

$$\text{(2.f)} \qquad \overline{\lim_{\delta \downarrow 0}} \sup_{a \in \mathbb{R}} \frac{|L_t^{a+\delta} - L_t^a|}{(\delta \log \frac{1}{\delta})^{1/2}} = 2(L_t^*)^{1/2}, \qquad P\text{-p.s.}.$$

Ceci nous permet de raffiner, pour t fixé, celui de $(\tilde{L}_t^a \,;\, a \in \mathbb{R})$.

Proposition (2.2) : On a, pour tout $A > 0$:

$$\overline{\lim_{\delta \downarrow 0}} \sup_{a \in A} \frac{|\tilde{L}_t^{a+\delta} - \tilde{L}_t^a|}{(\delta(\log \frac{1}{\delta})^3)^{1/2}} \leq 8(L_t^*)^{1/2} \qquad P\text{-p.s.}.$$

<u>Démonstration</u> : Notons $\phi_a(x) = (L_t^{a+x} - L_t^{a-x})$, et $b = a + \delta$.

On a, pour tout $\eta > 0$:

$$|\tilde{L}_t^b - \tilde{L}_t^a| \leq \int_0^\eta \frac{dx}{x} \{|\phi_b(x)| + |\phi_a(x)|\} + \int_\eta^\infty \frac{dx}{x} |\phi_b(x) - \phi_a(x)|.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha_\varepsilon > 0$ tel que : pour tout $u \in \mathbf{R}$, et tout $x \in [0,\alpha_\varepsilon]$, on ait : $|L_t^{u+x} - L_t^u| \leq (2+\varepsilon)\ (L_t^*)^{1/2}\sqrt{x \log \frac{1}{x}}$. D'où, en prenant $\eta = \delta \leq \alpha_\varepsilon$:

$$|\tilde{L}_t^b - \tilde{L}_t^a| \leq (2+\varepsilon)(L_t^*)^{1/2} \{\int_0^\delta dx\ 4\sqrt{\frac{\log 1/x}{x}} + 4\sqrt{\delta \log \frac{1}{\delta}} \int_\delta^{(B_t^*+\delta+|a|)} \frac{dx}{x}\}.$$

Notons $h(\delta) = \int_0^\delta dx \sqrt{\frac{\log 1/x}{x}} = \int_u^\infty dy\ e^{-y/2}\ y^{1/2}$, où $u = \log \frac{1}{\delta}$.

On montre aisément que, pour tout $C > 0$, il existe $u_C > 0$ tel que :

$$u \geq u_C \Longrightarrow h(\delta) = h(e^{-u}) \leq C\ u^{3/2}\ e^{-u/2} = C\sqrt{\delta(\log \tfrac{1}{\delta})^3}.$$

On a donc, pour δ suffisamment petit :

$$\frac{|\tilde{L}_t^b - \tilde{L}_t^a|}{(\delta(\log \frac{1}{\delta})^3)^{1/2}} \leq (2+\varepsilon)\ (L_t^*)^{1/2} \left[4C + 4\ (1 + \frac{\log(B_t^*+\delta+|a|)}{\log \frac{1}{\delta}})\right],$$

d'où :

$$\overline{\lim_{\delta\downarrow 0}}\ \sup_{|a|\leq A} \frac{|\tilde{L}_t^{a+\delta} - \tilde{L}_t^a|}{(\delta(\log \frac{1}{\delta})^3)^{1/2}} \leq 4\ (2+\varepsilon)\ (L_t^*)^{1/2}\ [1+C].$$

On obtient le résultat cherché en faisant tendre successivement C, puis ε, vers 0. □

En conclusion de ce paragraphe, explicitons la formule (0.a), pour $f_a(x) \equiv (x-a) \log|x-a| - (x-a)$. On montre aisément, à l'aide des régularités de $(L_t^a\ ;\ a \in \mathbf{R})$, que :

$$\tilde{L}_t^a = \lim_{\varepsilon\to 0} \int dx \frac{(x-a)L_t^x}{(x-a)^2+\varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^t ds \frac{(B_s-a)}{(B_s-a)^2+\varepsilon^2}.$$

Posons $F_\varepsilon(x) = \frac{1}{2}\int_0^x du \log(u^2 + \varepsilon^2)$ et $F(x) = x \log |x| - x$.

On a, d'après la formule d'Itô usuelle :

$$F_\varepsilon(B_t-a) = F_\varepsilon(B_o-a) + \frac{1}{2}\int_0^t \log\left[(B_u-a)^2+\varepsilon^2\right]dB_u + \frac{1}{2}\int_0^t ds\ \frac{(B_s-a)}{(B_s-a)^2+\varepsilon^2}$$

d'où l'on déduit, en faisant tendre ε vers 0 :

$$F(B_t-a) = F(B_o-a) + \int_0^t \log|B_s-a|dB_s + \frac{1}{2}\tilde{L}^a_t.$$

3. Une extension de la formule d'Itô.

On travaille toujours dans le cadre unidimensionnel. Soit $T > 0$, et S une v.a. à valeurs dans $[0,T]$. Il a été prouvé, en [3], à l'aide de la formule de Tanaka, que l'application : $f \to \sum_{i=1}^n f_i(L_S^{a_{i+1}} - L_S^{a_i})$, ainsi définie sur les fonctions étagées $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, où $f(t) = \sum_{i=1}^n f_i 1_{]a_i,a_{i+1}]}(t)$, se prolonge de façon unique en une mesure vectorielle sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $L^2(\mathcal{F},P)$. On note $\int f(a)\, d_aL^a_S$ l'intégrale de f, fonction borélienne bornée, par rapport à cette mesure vectorielle, et on a l'extension suivante de la formule d'Itô : si $F(x) = \int_0^x f(u)du$, alors :

$$F(B_S) = F(B_o) + \int_0^S f(B_u)dB_u - \frac{1}{2}\int f(a)d_aL^a_S. \tag{3.a}$$

Voici quelques remarques sur cette identité :

1) Du caractère local de l'intégrale stochastique, on déduit que, si f et g sont boréliennes bornées, et $f = g$ sur $[-n,n]$, alors : $\int f(a)\, d_aL^a_S = \int g(a)\, d_aL^a_S$, sur $\{B^*_T \le n\}$. Ceci permet d'étendre par localisation, la définition de $\int f(a)d_aL^a_S$ à toute fonction f borélienne, localement bornée.

2) D'autre part, si la variable S est telle que $\{L^a_S\ ;\ -\infty < a < \infty\}$ soit une semi-martingale, l'intégrale $\int f(a)\, d_aL^a_S$ est égale à l'intégrale stochastique de f par rapport à cette semi-martingale : ceci est une application du théorème de classe monotone, et du fait que l'intégrale stochastique par rapport à une semi-martingale est une mesure vectorielle à valeurs dans L^o.

Or, Perkins [7] vient de démontrer que, pour tout temps t constant, $\{L^a_t\ ;\ -\infty < a < \infty\}$ est une semi-martingale.

3) Ainsi, pour tout $t \geq 0$, et f localement bornée, on a : $A_t^F = -\int f(a)\, d_a L_t^a$, si (A_t^F) est le processus continu associé à $F(B_t)$ par la formule (0.a). □

La représentation (3.a) rend très intuitif le résultat d'approximation suivant, fortement inspiré par le paragraphe 2 de [10].

Proposition (3.1) : Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe C^2 hors de l'origine, telle que $F' \in L^2_{loc}$. Alors, pour tout $p \in [1,\infty[$:

(3.b) $$\lim_{\varepsilon\to 0} E\left[\sup_{t\leq T} |A_t^F - \{\int_0^t ds\, F''(B_s)\, 1_{(|B_s|\geq\varepsilon)} + L_t^\varepsilon F'(\varepsilon) - L_t^{-\varepsilon} F'(-\varepsilon)|^p\right] = 0$$

Démonstration : Notons $F' = f$, et $f_\varepsilon(u) = f(u)\, 1_{(|u|\geq\varepsilon)}$.

On peut supposer $F(0) = 0$, et donc $F(x) = \int_0^x f(u)du$. Appliquons la formule (3.a) à $F_\varepsilon(x) = \int_0^x du\, f_\varepsilon(u)$:

(3.c) $$F_\varepsilon(B_t) = \int_0^t f_\varepsilon(B_u)dB_u - \frac{1}{2}\int f_\varepsilon(a) d_a L_t^a.$$

Par intégration par parties, on a :

$$\int_\varepsilon^\infty f(a)d_a L_t^a = -f(\varepsilon)L_t^\varepsilon - \int_\varepsilon^\infty dx\, F''(x)L_t^x,$$

et donc :

$$A_t^{F_\varepsilon} = \int_0^t ds\, F''(B_s)\, 1_{(|B_s|\geq\varepsilon)} + L_t^\varepsilon F'(\varepsilon) - L_t^{-\varepsilon} F'(-\varepsilon).$$

Enfin, (3.b) découle de ce que :

$$E\left[\sup_{t\leq T} |\int_0^t f(B_u)\, 1_{(|B_u|\geq\varepsilon)}dB_u|^p + \sup_{t\leq T} |\int_0^{B_t} du\, f(u)\, 1_{|u|\leq\varepsilon}|^p\right]$$
$$\leq C_p (\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} du\, f^2(u))^{p/2}\, E\left[(L_T^*)^{p/2}\right] + (\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} du|f(u)|)^p\, E\left[(B_T^*)^p\right],$$

quantité qui tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0$.

Remarques (3.2) : 1) On aurait bien sûr pu obtenir directement la décomposition de $F_\varepsilon(B_t)$ par application de la formule d'Itô - Tanaka.

2) Enfin, d'après les résultats du paragraphe 2, si F'' est impaire, $F'' \geq 0$ sur $(0,\infty)$, et $\int_{0+} dy\, F''(y) y^{\alpha} < \infty$, pour $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$, on a :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \text{p.s.} \sup_{t\leq T} \left| A_t^F - \int_0^t ds\, F''(B_s)\, 1_{|B_s|\geq\varepsilon} \right| = 0.$$

Références :

[1] M.T. BARLOW, M. YOR : (Semi-)Martingale inequalities and Local Times. Zeitschrift für Wahr., 55, 237-254 (1981).

[2] R. BASS : A Representation of Additive Functionals of d-dimensional Brownian motion. Preprint 1981.

[3] N. BOULEAU, M. YOR : Sur la variation quadratique des temps locaux de certaines semi-martingales. C.R.A.S. Paris, t. 292 (2 Mars 1981).

[4] M. FUKUSHIMA : A decomposition of additive functionals of finite energy. Nagoya Math. J. 74, 1979, 137-168.

[5] A. GARSIA, E. RODEMICH, H. RUMSEY : A real-variable lemma and the continuity of paths of some Gaussian processes. Indiana Math. J. 20, 1970, p. 565-578.

[6] K. ITO, H.P. Mc KEAN : Diffusion processes and their sample paths. Springer (1965).

[7] E. PERKINS : Local Time is a semi-martingale. Preprint.

[8] D.W. STROOCK, S.R.S. VARADHAN : Multidimensional Diffusion Processes. Springer (1979)

[9] A.T. WANG : Quadratic variation of functionals of Brownian motion. Ann. Prob. 5, 756-769 (1977).

[10] T. YAMADA : On some representations concerning stochastic integrals. Preprint.

[11] C. YOEURP : Une décomposition multiplicative de la valeur absolue d'un mouvement brownien. Dans ce volume.

[12] P. KOOSIS : Introduction to H^p spaces. LMS Lect. Notes Series 40 (1980).

Je remercie vivement T. Yamada pour une discussion sur son travail, et J. Azéma pour m'avoir communiqué le préprint de R. Bass.