SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CHRISTOPHE STRICKER

Les intervalles de constance de $\langle X, X\rangle$

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 16 (1982), p. 219-220
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__219_0>

Séminaire de Probabilités XVI
1980 / 1981

LES INTERVALLES DE CONSTANCE DE $\langle X,X\rangle$.

par C. STRICKER

Il est bien connu depuis l'article [1] que si X est une martingale locale continue , les intervalles de constance de $\langle X,X\rangle$ et de X sont les mêmes . Que se passe-t-il dans le cas où X est seulement continue à droite ?

Soit X une martingale locale continue à droite sur un espace probabilisé filtré $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t), P)$ vérifiant les conditions habituelles . Notons d'abord que si $D_r = \inf\{t>r, X_t \neq X_r\}$, $[X,X]_r = [X,X]_{D_r-}$ car on a $[X,X] = \lim \sum_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$, la limite étant prise en probabilité . Par contre si X désigne la martingale associée à un processus de Poisson, $[X,X]$ est constant en dehors des instants de sauts de X mais les intervalles de constance de X sont vides .

Examinons maintenant ce qui se passe pour le crochet oblique. Pour qu'il existe, nous devons supposer que X est localement de carré intégrable .

<u>PROPOSITION. X est constant sur les intervalles de constance de $\langle X,X\rangle$. Réciproquement si X possède la propriété de représentation prévisible, $\langle X,X\rangle$ est constant sur les intervalles de constance de X.</u>

<u>Démonstration.</u> Soit $D_r = \inf\{t>r, \langle X,X\rangle_t > \langle X,X\rangle_r\}$. On sait d'après [2] (lemme préliminaire 1.0.) qu'il existe une suite de temps d'arrêt T_n tendant en croissant vers D_r tels que $\langle X,X\rangle_{T_n} = \langle X,X\rangle_r$. Comme X est localement de carré intégrable , on peut supposer que $E[X_\infty]^2$ soit finie . Ainsi

pour tout $t \geq r$, $E[X_{t\wedge T_n} - X_r]^2 = E[\langle X,X\rangle_{t\wedge T_n} - \langle X,X\rangle_r] = 0$. Donc X est aussi constante sur $[r,D_r[$. Réciproquement supposons que X possède la propriété de représentation prévisible ; si $D_r = \inf\{t>r, X_t \neq X_r\}$, toute martingale locale est constante sur $[r,D_r[$ d'après les propriétés des intégrales stochastiques . C'est le cas en particulier de la martingale locale M = A-B où A est le processus croissant $\Delta X^2_{D_r} I_{[D_r,+\infty[}$ et B la projection duale prévisible de A . Or $\langle X,X\rangle = \langle X^r,X^r\rangle + B$ sur l'intervalle $[0,D_r]$, si bien que $\langle X,X\rangle$ est constant sur $[r,D_r[$, et la proposition est démontrée .

<u>REMARQUE</u>. On ne peut guère améliorer la réciproque de cette proposition. En effet si T est un temps d'arrêt totalement inaccessible et si $\mathcal{F}_{T-} \neq \mathcal{F}_T$ on peut construire une martingale X telle que X soit constante sur $[0,T[$, mais pas $\langle X,X\rangle$. Prenons une variable aléatoire bornée Z de $\mathcal{F}_T$ n'appartenant pas à $\mathcal{F}_{T-}$ et posons $X_t = (Z-E[Z|\mathcal{F}_{T-}])I_{\{t\geq T\}}$. X est une martingale de carré intégrable constante sur $[0,T[$, mais la projection duale prévisible de $[X,X]$, qui est continue car T est totalement inaccessible , ne peut être constante sur $[0,T]$, sinon elle serait nulle, et la martingale X serait aussi nulle sur $[0,T]$.

REFERENCES.

[1] GETOOR R.K. et SHARPE M. : Conformal Martingales. Invent. Math. 16, 1972, p. 271-308.

[2] LENGLART E., LEPINGLE D. et PRATELLI M. : Une Présentation Unifiée des Inégalités en Théorie des Martingales. Séminaire de Prob. XIV, Lecture Notes in M. 784, p. 26-48.