SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

M. BRANCOVAN
FRANÇOIS BRONNER
PIERRE PRIOURET

# Grandes déviations pour certains systèmes différentiels aléatoires

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 16 (1982), p. 159-183
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__159_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

# GRANDES DEVIATIONS POUR CERTAINS SYSTEMES DIFFERENTIELS ALEATOIRES

M. BRANCOVAN, F. BRONNER, P. PRIOURET

## 0 - *INTRODUCTION*.

Dans cet exposé, on considère un processus à valeurs $\mathbb{R}^d$, $x_t^\varepsilon$, solution de :

$$(0.1) \qquad dx_t^\varepsilon = F(x_t^\varepsilon, Y_{t/\varepsilon})dt, \; x_o^\varepsilon = x ,$$

où $Y_t$ est un processus à valeurs dans un espace l.c.d. E. Il s'agit d'obtenir des évaluations asymptotiques lorsque $\varepsilon$ tend vers 0 de $P[x^\varepsilon \in A]$ où $A \subset C([0,T],\mathbb{R}^d)$.

Très souvent $Y_t$ sera un processus de Markov ergodique de probabilité invariante $\bar{\mu}$, et alors (Khas'minskii [7]) $x^\varepsilon$ converge stochastiquement vers la solution $(\bar{x}_t)$ de :

$$(0.2) \qquad d\bar{x}_t = \bar{F}(\bar{x}(t))dt, \; \bar{x}(o) = 0, \text{ où } \bar{F}(x) = \int_E F(x,y)d\bar{\mu}(y).$$

L'évaluation asymptotique obtenue sera un résultat de grande déviation de $x^\varepsilon$ par rapport à $\bar{x}$.

Le travail de base sur le sujet est l'article [4] de Freidlin - voir aussi le livre de Ventcel' - Freidlin [10] - où il obtient cette évaluation sous l'hypothèse :

$$(0.3) \qquad \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \operatorname{Log} E(\exp \int_0^t (\alpha, F(x,Y_s)ds)) = H(x,\alpha)$$

existe uniformément en $x$ et est différentiable en $\alpha$.

Notre but ici est d'établir ce résultat à partir d'une hypothèse de grandes déviations pour le processus Y, c'est-à-dire l'existence d'une fonctionnelle I telle que pour tout ensemble $\Gamma$ de probabilités sur E on ait :

$$(0.4) \qquad P\left[\frac{1}{t}\int_0^t 1_{(\cdot)}(Y_s)ds \in \Gamma\right] \not\approx \exp(-\, t\, I(\Gamma)).$$

Voir Donsker - Varadhan [2].

Evidemment on sait (Varadhan [9]) que *(0.4)* implique l'existence de *(0.3)*, mais l'approche directe nous paraît présenter certains avantages : elle est plus naturelle pour un probabiliste et elle précise certains points de [4].

L'exemple type de ce genre de situation est le cas où $Y_t$ est une diffusion régulière sur une variété compacte. Une étude détaillée de ce cas se trouve dans Brancovan - Bronner - Priouret [11].

*Notations et hypothèses.*

Dans toute la suite $E$ est un espace localement compact de type dénombrable (l.c.d) et $\mathcal{E}$ sa tribu des boréliens. On note $\mathcal{M}_1(E)$ l'ensemble des probabilités sur $(E,\mathcal{E})$, que l'on munit de la topologie de la convergence étroite. On désigne par $C_{[0,T]}$ (resp. $C^x_{[0,T]}$) l'ensemble des fonctions continues $\phi$ de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}^d$ (resp. des fonctions continues $\phi \in C_{[0,T]}$ telles que $\phi(0)=x$), $(T>0$, $x$ dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1)$. On a choisi une norme notée $|\cdot|$ sur $\mathbb{R}^d$ et $C_{[0,T]}$ est muni de la topologie de la convergence uniforme, ($\|\cdot\|_T$ : la norme uniforme).

On se donne dans tout ce qui suit la fonction $F : \mathbb{R}^d \times E \to \mathbb{R}^d$ définissant le système *(0.1)*, lipschitzienne de rapport $K$ sur le produit $\mathbb{R}^d \times E$ et bornée (on pose $\|F\|_\infty = \sup\{|F(x,y)|,\ x \in \mathbb{R}^d,\ y \in E\}$).

On considère enfin le processus de Markov $Y = (\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,Y_t,P_y)$, à valeurs dans $(E,\mathcal{E})$.

On introduit pour tous $t>0$, $A$ de $\mathcal{E}$, et $\omega$ de $\Omega$, le temps de séjour moyen de la trajectoire $Y_t(\omega)$ dans $A$ :

$$L_t(\omega,A) = \frac{1}{t}\int_0^t 1_A(Y_s(\omega))ds.$$

Pour chaque $\omega$ de $\Omega$, $L_t(\omega,\cdot) \in \mathcal{M}_1(E)$ : $L_t(\cdot,\cdot)$ est une mesure aléatoire.

L'hypothèse de base sur $Y$ dans tout ce qui suit consiste alors à supposer qu'il existe des résultats de grandes déviations, uniformément en l'état initial $y$, pour la famille $(L_t,\ t \to +\infty)$, analogues à ceux de Donsker et Varadhan [2].

A partir de maintenant on fait donc l'hypothèse suivante :

Hypothèse (H) :

Il existe une fonctionnelle $I : \mathcal{M}_1(E) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ convexe et telle que

(i) Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, $\{\mu \in \mathcal{M}_1(E) \mid I(\mu) \leq a\}$ est étroitement compact; en particulier $I$ est s.c.i.

(ii) Pour tout ouvert $A$ de $\mathcal{M}_1(E)$

$$\varliminf_{t\uparrow\infty} \frac{1}{t} \operatorname{Log} P_y[L_t \in A] \geq - I(A)$$

(iii) Pour tout fermé $A$ de $\mathcal{M}_1(E)$

$$\varlimsup_{t\uparrow+\infty} \frac{1}{t} \operatorname{Log} P_y[L_t \in A] \leq - I(A)$$

pour tout $y \in E$, les deux limites étant uniformes en $y$. On a posé

$$I(A) = \begin{cases} \inf\{I(\mu),\ \mu \in A\},\ A \subset \mathcal{M}_1(E) \\ +\infty \text{ si } A \text{ est vide.} \end{cases}$$

On peut aussi introduire l'hypothèse plus complète suivante :

Hypothèse (H') :

(i) Le processus $Y$ vérifie (H).

(ii) Il existe une et une seule probabilité $\bar{\mu} \in \mathcal{M}_1(E)$ telle que $I(\bar{\mu}) = 0$.

Cette hypothèse n'est pas nécessaire pour obtenir des résultats de grandes déviations pour le système *(0.1)* : (H) suffit. Toutefois elle est vérifiée dans de nombreux cas, notamment celui d'une diffusion sur une variété compacte. D'autre part, elle est plus satisfaisante que (H) car, $\bar{\mu}$ définissant le système limite "non perturbé" *(0.2)*, la fonctionnelle $\Lambda$ que l'on va construire ne s'annule que sur les solutions de *(0.2)*. C'est alors une "vraie" fonctionnelle d'action.

## *I - CONSTRUCTION DE LA FONCTIONNELLE D'ACTION* $\Lambda$.

Dans ce paragraphe on construit la fonctionnelle d'action $\Lambda$ à partir de la fonctionnelle $I$ de l'hypothèse (H). Pour cela on introduit une fonction $\lambda : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}_+$.

### 1) Construction de $\lambda$.

*Proposition (I.1)*: En posant pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$,

$$\lambda(b,a) = \begin{cases} \inf\{I(\mu) \mid \mu \in \mathcal{M}_1(E),\ \int_E F(b,y)\,\mu(dy) = a\} \\ +\infty \text{ si l'ensemble entre accolades est vide} \end{cases} \tag{I.1}$$

on définit une fonction $\lambda : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}_+$ vérifiant :

(i) <u>Pour tout</u> b <u>de</u> $\mathbb{R}^d$, $\lambda(b,a) = +\infty$ <u>dès que</u> $|a| > \|F\|_\infty$.

(ii) <u>La fonction</u> $\lambda$ <u>est s.c.i sur</u> $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, <u>et convexe en son second argument</u>.

(iii) <u>Pour tous</u> b <u>de</u> $\mathbb{R}^d$ et $\alpha > 0$, $\{a \,;\, \lambda(b,a) \le \alpha\}$ <u>est compact</u>.

<u>Démonstration</u> :

Comme $\left|\int_E F(b,y)\,\mu(dy)\right| \le \|F\|_\infty$, pour tous $\mu$ de $\mathcal{M}_1(E)$ et b de $\mathbb{R}^d$ l'ensemble entre accolades de *(I.1)* est vide si $|a| > \|F\|_\infty$, d'où (i).

Pour montrer (ii), on remarque que si :

$$\ell_0 = \liminf_{(a',b') \to (a,b)} \lambda(b',a') < +\infty,$$

et si $\varepsilon > 0$ est donné, il existe une suite $((a_n,b_n),\, n > 0)$ de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ et une suite $(\mu_n)_{n>0}$ de $\mathcal{M}_1(E)$, telles que, pour tout n, on ait

$$\lim (a_n,b_n) = (a,b) \ , \quad \lambda(b_n,a_n) \le \ell_0 + \frac{\varepsilon}{2} \, ,$$

ainsi que

$$\int_E F(b_n,y)\ \mu_n(dy) = a_n$$

et

$$\lambda(b_n,a_n) \le I(\mu_n) \le \lambda(b_n,a_n) + \frac{\varepsilon}{2} \, .$$

Par suite, $\mu_n$ appartient à $\{\mu \in \mathcal{M}_1(E) \mid I(\mu) \le \ell_0 + \varepsilon\}$. Cet ensemble étant compact d'après l'hypothèse (H), il vient, pour toute valeur d'adhérence $\mu$ de la suite $(\mu_n)$, $I(\mu) \le \ell_0 + \varepsilon$ et $\int_E F(b,y)\,\mu(dy) = a$. Il en résulte que $\lambda(b,a) \le I(\mu) \le \ell_0 + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, soit $\lambda(b,a) \le \ell_0$, ce qui est bien la semi-continuité de $\lambda$.

On notera que (iii) découle aussitôt de (i) et de la semi-continuité de $\lambda$.
Enfin, la convexité par rapport au second argument se déduit facilement de la définition *(I.1)* et de convexité de I.

On pose maintenant pour tout couple $(\phi,\psi)$ de fonctions boréliennes de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}^d$,

$$(I.2) \qquad \Lambda(\phi,\psi) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^T \lambda(\phi_s,\dot\psi_s)ds & \text{si } \psi \text{ est absolument continue} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonctionnelle d'action pour le système *(0.1)* est alors

*(I.2')* $\qquad \Lambda(\phi) = \Lambda(\phi,\phi)$.

Avant de voir que $\phi \to \Lambda(\phi)$ vérifie bien les propriétés de régularité que l'on souhaite, on va comparer cette fonctionnelle avec celle de Freidlin [4].

2) Lien avec la fonctionnelle de Freidlin.

Pour tous $b$ et $c$ de $\mathbb{R}^d$ on considère, lorsqu'elle existe, la limite

*(I.3)* $$h(b,c) = \lim_{t \uparrow +\infty} \frac{1}{t} \operatorname{Log} E_y\left[\exp \int_0^t c\cdot F(b,Y_s)ds\right] \qquad (y \in E)$$

(le point désigne le produit scalaire de $\mathbb{R}^d$).

Dans [9] Varadhan démontre que l'hypothèse (H) implique l'existence de la limite *(I.3)*. En fait Varadhan ne suppose pas que les limites (ii) et (iii) de (H) sont uniformes; cependant, lorsqu'elles le sont, la limite *(I.3)* est aussi uniforme : cela se voit facilement en reprenant la démonstration de [9]. On a de plus :

*(I.3')* $$h(b,a) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_1(E)} \left[\int c\cdot F(b,z)\, \mu(dz) - I(\mu)\right].$$

La proposition suivante fait le lien entre les fonctions $\lambda$ et $h$.

*Proposition (I.2)* : Sous l'hypothèse (H), pour tout $b$ de $\mathbb{R}^d$, $\lambda(b,\cdot)$ est la transformée de Legendre $h^*(b,\cdot)$ de $h(b,\cdot)$, i.e.

$$\lambda(b,a) = h^*(b,a) = \sup_{c \in \mathbb{R}^d} (c\cdot a - h(b,c)).$$

Démonstration :

On note $\lambda^*(b,\cdot)$ la transformée de Legendre de $\lambda(b,\cdot)$.
Comme $\lambda(b,\cdot)$ est positive, s.c.i. et convexe, sa bi-transformée $\lambda^{**}(b,\cdot)$ est $\lambda(b,\cdot)$ (cf. Ekeland et Temam [3]). Il suffit donc de vérifier que, pour tout $b$, $\lambda^*(b,\cdot) = h(b,\cdot)$. Or,

$$\begin{aligned}
\lambda^*(b,a) &= \sup_c\, (c\cdot a - \lambda(b,c)) \\
&= \sup_c\, (c\cdot a - \operatorname{Inf}\{I(\mu) \mid \mu \in \mathcal{M}_1(E),\ \int_E F(b,y)\, \mu(dy) = c\}) \\
&= \sup_c\, \sup\, \{(c\cdot a - I(\mu)) \mid \mu \in \mathcal{M}_1(E),\ \int F(b,y)\, \mu(dy) = c\} \\
&= \sup_c\, \sup\, \{\int_E a\cdot F(b,y)\, \mu(dy) - I(\mu) \mid \mu \in \mathcal{M}_1(E),\ \int F(b,y)\, \mu(dy) = c\} \\
&= \sup\{\int a\cdot F(b,y)\, \mu(dy) - I(\mu) \mid \mu \in \mathcal{M}_1(E)\} \\
&= h(b,a).
\end{aligned}$$

Freidlin dans [4] démontre des résultats de grandes déviations pour le système différentiel *(0.1)* en prenant pour hypothèse, lorsque $Y$ est un Markov, l'existence de la limite *(I.3)* uniformément en $y$ de $E$, et en supposant de plus que, pour tout $b$ de $\mathbb{R}^d$, $h(b,\cdot)$ est différentiable.

Il contrôle alors les grandes déviations de *(0.1)* par la fonctionnelle

$$S(\phi) = \begin{cases} \int_0^T h^*(\phi_s,\dot{\phi}_s)ds & \text{si } \phi \text{ est absolument continue,} \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

qui coïncide avec $\Lambda(\cdot)$ d'après la proposition *(I.2)*.

L'hypothèse de différentiabilité de $h(b,\cdot)$ revient à supposer que $h^*(b,\cdot) = \lambda(b,\cdot)$ est strictement convexe, ce qui n'est pas nécessaire dans la démarche du présent exposé; cela est cependant vrai, comme on peut facilement le voir, pour une diffusion sur une variété compacte.

3) <u>Propriétés de régularité de $\Lambda$.</u>

*<u>Proposition (I.3)</u>*: <u>L'application</u> $(\phi,\psi) \to \Lambda(\phi,\psi)$ <u>définie par la formule</u> *(I.2)* <u>est s.c.i., pour la topologie de la convergence uniforme, sur l'ensemble des couples</u> $(\phi,\psi)$ <u>de fonctions boréliennes bornées.</u>

<u>Démonstration</u> :

Elle repose sur le théorème suivant, qui se trouve pour l'essentiel dans Ioffe et Tikhomirov [6], et que l'on démontrera succintement en appendice pour la commodité du lecteur.

*<u>Théorème (A.1)</u>* : <u>Soit</u> $\lambda : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}_+$ <u>une fonction s.c.i., convexe en son second argument et vérifiant, pour un</u> $B > 0$ <u>et pour tout</u> $x$ de $\mathbb{R}^d$, $\lambda(x,y) = +\infty$ <u>dès que</u> $|y| > B$.

<u>On suppose de plus que pour tout</u> $x_0 \in \mathbb{R}^d$ <u>il existe un voisinage</u> $V$ <u>de</u> $x_0$ <u>et une fonction</u> $\psi : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ <u>tels que</u> :

(i) <u>Pour tous</u> $x$ <u>de</u> $V$ <u>et</u> $y$ <u>de</u> $\mathbb{R}^d$, $\lambda(x,y) \geq \psi(y)$.

(ii) <u>La transformée de Legendre</u> $\psi^*$ <u>de</u> $\psi$ <u>est partout</u> $< +\infty$ .

<u>Alors l'application</u> $\Lambda$, <u>définie sur les couples</u> $(\phi,\psi)$ <u>de fonctions boréliennes bornées par</u> :

$$\Lambda(\phi,\psi) = \begin{cases} \int_0^T \lambda(\phi_s,\dot{\psi}_s)ds & \underline{\text{si}} \ \psi \ \underline{\text{est absolument continue}}, \\ +\infty & \text{sinon}, \end{cases}$$

<u>est s.c.i. du couple pour la topologie de la convergence uniforme</u>.

Il suffit donc de vérifier que l'application $\lambda$ définie par *(I.1)* satisfait aux hypothèses de la proposition *(A.1)*. Il y a juste pour cela à construire une fonction $\psi$ vérifiant (i) et (ii). Or si on pose, pour $\varepsilon > 0$,

$$K^{\varepsilon}(x_0,y) = \{\mu \in \mathcal{M}_1(E) \mid |\int_E F(x_0,z)\ \mu(dz) - y| \leq \varepsilon\},$$

on peut prendre pour $\psi$ :

$$\psi(y) = \inf\ \{I(\mu)\ ;\ \mu \in K^{\varepsilon}(x_0,y)\},\ (+\infty \quad \text{si} \quad K^{\varepsilon}(x_0,y) = \emptyset).$$

En effet,

$$\lambda(x,y) = \inf\ \{I(\mu) \mid \mu \in \mathcal{M}_1(E),\ \int F(x,z)\ \mu(dz) = y\}\ ;$$

mais $\{\mu \in \mathcal{M}_1(E) \mid \int F(x,z)\ \mu(dz) = y\} \subset K^{\varepsilon}(x_0,y)$ dès que $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{K}$

($K$ étant la constante de Lipschitz de $F$), par suite,

$$\lambda(x,y) \geq \psi(y).$$

Mais, d'un autre côté, $K^{\varepsilon}(x_0,y)$ est vide dès que $|y| > \|F\|_{\infty} + \varepsilon$, donc, comme $\psi$ est positive,

$$\psi^*(z) = \sup_{|y| \leq \|F\|_{\infty} + \varepsilon} [y\cdot z - \psi(y)] \leq |z|(\|F\|_{\infty} + \varepsilon) < +\infty.$$

*Corollaire (I.4)* : <u>La fonctionnelle</u> $\phi \to \Lambda(\phi) = \Lambda(\phi,\phi)$ <u>est s.c.i. sur</u> $C^x_{[0,T]}$; <u>de plus, pour tout</u> $\alpha > 0$,

$$K_{\alpha} = \{\phi \in C^x_{[0,T]} \mid \Lambda(\phi) \leq \alpha\}$$

<u>est compact</u>.

Il reste à vérifier que $K_{\alpha}$ est relativement compact. Mais, si $\phi$ est dans $K_{\alpha}$, $\lambda(\phi_s,\dot{\phi}_s) < +\infty$ p.p., d'où $\|\dot{\phi}\|_{\infty} \leq \|F\|_{\infty}$. Il en résulte que $K_{\alpha}$ est un ensemble équi-continu de fonctions, et il suffit donc d'appliquer le théorème d'Ascoli.

Pour terminer ce paragraphe, on va montrer que, sous l'hypothèse (H'), $\Lambda$ ne s'annule que sur les solutions du système déterministe *(0.2)*, ce qui justifie le terme "fonctionnelle d'action".

*Proposition (I.5)* : On suppose que le processus Y vérifie l'hypothèse (H'); alors $\Lambda(\phi)=0$ si et seulement si la fonction $\phi$ est continûment différentiable sur $[0,T]$ et est solution du système

$$(0.2) \qquad \dot{\phi}_t = \bar{F}(\phi_t) \qquad (\text{où } \bar{F}(x) = \int_E F(x,y)\,\bar{\mu}(dy)).$$

Démonstration :

On remarque d'abord que $\lambda(b,a)=0$ si et seulement si $a=\bar{F}(b)$. En effet, il existe $\mu$ telle que $\int F(b,y)\,\mu(dy)=a$ et $I(\mu)=\lambda(b,a)$, et $\bar{\mu}$ est la seule probabilité telle que $I(\mu)=0$. Il est donc facile de voir que si $\phi$ est solution de $\dot{\phi}_t=\bar{F}(\phi_t)$ $(t\in[0,T])$, alors $\Lambda(\phi)=0$. Inversement, si $\Lambda(\phi)=0$, $\phi$ est absolument continue, et, comme $\lambda(\phi_s,\dot{\phi}_s)=0$ pour presque tout s, on a presque partout $\dot{\phi}_s=\bar{F}(\phi_s)$. D'où, comme $s\to\bar{F}(\phi_s)$ est continue sur $[0,T]$, $\phi : t\to\phi_t=\phi_0+\int_0^t \bar{F}(\phi_s)ds$ est de classe $C^1$ et solution de $\dot{\phi}_t=F(\phi_t)$ pour tout $t\in[0,T]$.

## *II - GRANDES DEVIATIONS POUR LES PROCESSUS $X^{\varepsilon,\phi}$, $\phi$ EN ESCALIER.*

On pose

$$X_t^{\varepsilon,\phi} = x + \int_0^t F(\phi_s, Y_{\frac{s}{\varepsilon}})ds$$

pour toute fonction en escalier $\phi = \sum_{k=0}^{n-1} \phi_k \, 1_{(t_k,t_{k+1})}$, $(\phi_k\in\mathbb{R}^d)$,

où $(t_k, k=0,\dots,n)$ est une subdivision de $[0,T]$. On donne maintenant, à l'aide de la fonctionnelle $\Lambda$ du paragraphe *I*, des résultats de grandes déviations pour le processus $X^{\varepsilon,\phi}$.

*PROPOSITION (II.1)* : Pour tout état initial y de Y :

(i) Pour toute fonction $\psi\in C^x_{[0,T]}$ et tout réel $\delta>0$

$$(II.1) \qquad \underline{\lim}_{\varepsilon\downarrow 0}\ \varepsilon \operatorname{Log} P_y\,[\|X^{\varepsilon,\phi}-\psi\|<\delta] \geq -\Lambda(\phi,\psi)$$

(ii) Pour tout fermé A de $C^x_{[0,T]}$

$$(II.2) \qquad \overline{\lim}_{\varepsilon\downarrow 0}\ \varepsilon \operatorname{Log} P_y[X^{\varepsilon,\phi}\in A] \leq -\inf\{\Lambda(\phi,\psi)\mid \psi\in A\},$$

les deux limites étant uniformes en $y\in E$.

Il s'agit donc de passer des grandes déviations de $Y$ aux grandes déviations de $X^{\varepsilon,\phi}$. On a pour cela à effectuer des transformations préliminaires.

1) Transformations préliminaires.

Posons, $f$ étant une fonction continue bornée de $E$ dans $\mathbb{R}^d$ et $\Gamma$ un borélien de $\mathbb{R}^d$,

$$A(t,f,\Gamma) = \{\mu \in \mathcal{M}_1(E) \mid t\mu(f) \in \Gamma\}.$$

L'ensemble $A(t,f,\Gamma)$ est ouvert (resp. fermé) si $\Gamma$ est ouvert (resp. fermé) et, pour tout $t>0$,

$$\{\int_0^t f(Y_{\frac{s}{\varepsilon}})ds \in \Gamma\} = \{L_{t/\varepsilon} \in A(t,f,\Gamma)\}.$$

Plus généralement, pour $(t_k,\ k=0,\dots,n)$ une subdivision de $[0,T]$, $(\Gamma_k,\ k=0,\dots,n-1)$ une famille de boréliens de $\mathbb{R}^d$ et $(f_k,\ k=0,\dots,n-1)$ une famille de fonctions continues bornées de $E$ dans $\mathbb{R}^d$, on pose $A_k = A(t_{k+1}-t_k,\ f_k,\ \Gamma_k)$. Alors,

*Lemme (II.2)* : Quel que soit $y$ dans $E$ on a :

(i) Pour toute famille d'ouverts $(\Gamma_k,\ k=0,\dots,n-1)$ de $\mathbb{R}^d$,

$$\underline{\lim}_{\varepsilon\downarrow 0}\ \varepsilon \operatorname{Log} P_y\left[(\int_{t_k}^{t_{k+1}} f_k(Y_{\frac{s}{\varepsilon}})ds \in \Gamma_k),\ k=0,\dots,n-1\right]$$

$$\geq -\sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1}-t_k)\ I(A_k).$$

(ii) Pour toute famille de fermés $(\Gamma_k,\ k=0,\dots,n-1)$ de $\mathbb{R}^d$

$$\overline{\lim}_{\varepsilon\downarrow 0}\ \varepsilon \operatorname{Log} P_y\left[(\int_{t_k}^{t_{k+1}} f_k(Y_{\frac{s}{\varepsilon}})ds \in \Gamma_k),\ k=0,\dots,n-1\right]$$

$$\leq -\sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1}-t_k)\ I(A_k),$$

les deux limites étant uniformes en $y \in E$.

Démonstration :

En notant $\delta_k = t_{k+1}-t_k$ et $\Phi$ l'événement considéré, il vient,

$$\Phi = \{\int_0^{\delta_k} f_k(Y_{\frac{t_k+s}{\varepsilon}})ds \in \Gamma_k\ ;\ k=0,\dots,n-1\}.$$

On en déduit

$$P_y[\Phi] = E_y\left[ 1_{\{\int_0^{\delta_k} f_k(Y_{\frac{t_k}{\varepsilon}+s})ds\in\Gamma_k\ ;\ k=0,\dots,n-2\}} P_y\left[\int_0^{\delta_{n-1}} f_{n-1}(Y_{\frac{t_{n-1}}{\varepsilon}+s})ds\in\Gamma_{n-1} \,\Big|\, \mathcal{F}_{\frac{t_{n-1}}{\varepsilon}}\right]\right].$$

En appliquant la propriété de Markov, on obtient

$$P_y\left[\int_0^{\delta_{n-1}} f_{n-1}(Y_{\frac{t_{n-1}}{\varepsilon}+s})ds \in \Gamma_{n-1} \,\Big|\, \mathcal{F}_{\frac{t_{n-1}}{\varepsilon}}\right] =$$

$$= P_{Y_{\frac{t_{n-1}}{\varepsilon}}}\left[\int_0^{\delta_{n-1}} f_{n-1}(Y_{\frac{s}{\varepsilon}})ds \in \Gamma_{n-1}\right] = P_{Y_{\frac{t_{n-1}}{\varepsilon}}}\left[L_{\frac{\delta_{n-1}}{\varepsilon}} \in A_{n-1}\right].$$

Lorsque les $\Gamma_k$ sont ouverts, la limite (ii) de (H) montre que pour tout $\eta > 0$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, si $\varepsilon < \varepsilon_0$, on ait pour tout $y$ de $E$, donc pour $y = Y_{\frac{t_{n-1}}{\varepsilon}}(\omega)$ :

$$P_{Y_{\frac{t_{n-1}}{\varepsilon}}(\omega)}\left[L_{\frac{\delta_{n-1}}{\varepsilon}} \in A_{n-1}\right] \geq \exp(-\frac{\delta_{n-1}}{\varepsilon}(I(A_{n-1}) + \eta)).$$

Par suite, pour tout $y$ de $E$ :

$$P_y[\Phi] \geq P_y\left[\int_0^{\delta_k} f_k(Y_{\frac{t_k}{\varepsilon}+s})ds \in \Gamma_k\ ;\ k=0,\dots,n-2\right] \exp(-\frac{\delta_{n-1}}{\varepsilon}(I(A_{n-1}) + \eta)).$$

En raisonnant de proche en proche et en faisant tendre $\eta$ vers zéro, on obtient la minoration (i).

Par une démarche analogue on obtient la majoration (ii) lorsque les $\Gamma_k$ sont fermés.

Avant de démontrer la proposition *(II.1)* on va modifier l'écriture de l'inégalité (ii) du lemme *(II.2)*. Avec $f_k = F(\phi_k,\cdot)$, il vient,

$$I(A_k) = \inf\{I(\mu) \mid \mu \in \mathcal{M}_1(E),\ \delta_k \int_E F(\phi_k,y)\,\mu(dy) \in \Gamma_k\}$$

$$= \inf\{\lambda(\phi_k,a_k) \mid a_k \in \mathbb{R}^d,\ \delta_k\, a_k \in \Gamma_k\}$$

et, par suite,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1}-t_k)\, I(A_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \delta_k \inf\{\lambda(\phi_k,a_k) \mid a_k \in \mathbb{R}^d,\ \delta_k\, a_k \in \Gamma_k\}$$

$$= \inf\{\sum_{k=0}^{n-1} \delta_k\, \lambda(\phi_k,a_k) \mid (a_k)_{k=0,\dots,n-1}\ ;\ \delta_k\, a_k \in \Gamma_k\ ,\ k=0,\dots,n-1\}.$$

Si l'on pose $\psi = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, 1_{(t_k,t_{k+1})}$, faire varier la famille $(a_k)$ revient à faire varier $\psi$ parmi toutes les fonctions en escalier adaptées à la subdivision $(t_k)$. On peut donc récrire la majoration (ii) du lemme sous la forme

$$\overline{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}}\ \varepsilon \operatorname{Log} P_y\Big[\int_{t_k}^{t_{k+1}} F(\phi_k,Y_{\frac{s}{\varepsilon}})ds \in \Gamma_k\ ,\ k=0,\dots,n-1\Big]$$

*(II.3)*

$$\le -\inf\{\int_0^T \lambda(\phi_s,\psi_s)ds \mid \psi \text{ en } (t_k) \text{ escalier, } \int_{t_k}^{t_{k+1}} \psi_s\, ds \in \Gamma_k,$$
$$k=0,\dots,n-1\}$$

($\psi$ en $(t_k)$ escalier signifie que $\psi$ est constante sur les intervalles de la subdivision $(t_k)$).

2) Démonstration de la minoration *(II.1)*.

Soit $\delta>0$ fixé et $\psi \in C^x_{[0,T]}$ une fonction telle que $\Lambda(\phi,\psi)<+\infty$ (sinon la minoration *(II.1)* est évidente). Alors $\psi$ est absolument continue et, pour presque tout $s$, $\lambda(\phi_s,\dot\psi_s)<+\infty$. Il en résulte que $\|\dot\psi\|_\infty \le \|F\|_\infty$ ($\dot\psi$ considéré comme une classe de $L^\infty$).

Maintenant, on peut choisir la subdivision $(t_k)$ de $[0,T]$ adaptée à $\phi$ telle que $\sup_k |t_{k+1}-t_k| \le \delta' = \frac{\delta}{4\|F\|_\infty} \wedge \frac{\delta}{2}$. Dans ces conditions, comme pour $t \in [t_k,t_{k+1}]$

$$|X_t^{\varepsilon,\phi}-\psi_t| = \Big|\int_0^t [F(\phi_s,Y_{\frac{s}{\varepsilon}})-\dot\psi_s]ds\Big| \le \Big|\int_0^{t_k} (F(\phi_s,Y_{\frac{s}{\varepsilon}})-\dot\psi_s)ds\Big| + 2\,\|F\|_\infty (t-t_k),$$

on a,

$$A_\varepsilon^\delta = \{\|X^{\varepsilon,\phi}-\psi\|_T<\delta\} \supset \{\sup_{1\le k\le n-1} \Big|\int_0^{t_k} (F(\phi_s,Y_{\frac{s}{\varepsilon}})-\dot\psi_s)ds\Big| < \delta'\}.$$

Mais,

$$\{\sup_{1\le k\le n-1}\Big|\int_0^{t_k} [F(\phi_s,Y_{\frac{s}{\varepsilon}})-\dot\psi_s]ds\Big| < \delta'\} \supset \{\Big|\int_{t_k}^{t_{k+1}} [F(\phi_k,Y_{\frac{s}{\varepsilon}})-\dot\psi_s]ds\Big| \le \frac{\delta'}{n}\ ,\ k=0,\dots,n-1\}.$$

Par conséquent, en posant $\Gamma_k = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x-\int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot\psi_s ds| < \frac{\delta'}{n}\}$, on obtient finalement

$$A_\varepsilon^\delta \supset \{\int_{t_k}^{t_{k+1}} F(\phi_k, Y_{\frac{s}{\varepsilon}})ds \in \Gamma_k \ , \ k=0,\dots,n-1\}.$$

Mais $\Gamma_k$ est ouvert; on peut donc appliquer le lemme *(II.2)*, minoration (i), pour obtenir, uniformément en $y \in E$

$$\varliminf_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \text{ Log } P_y[A_\varepsilon^\delta] \geq - \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k)\ I(A_k),$$

où

$$A_k = \{\mu \in \mathcal{M}_1(E) \mid \ |(t_{k+1} - t_k) \int_E F(\phi_k, y)\ \mu(dy) - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{\psi}_s ds| < \frac{\delta'}{n}\}.$$

D'un autre côté, il résulte de la définition de $I(A_k)$ que, pour tout $k=0,\dots,n-1$, on a

$$I(A_k) \leq \inf\{I(\mu) \mid \mu \in \mathcal{M}_1(E),\ \int F(\phi_k, y)\ \mu(dy) = \frac{1}{t_{k+1} - t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{\psi}_s ds\} =$$

$$= \lambda(\phi_k, \frac{1}{t_{k+1} - t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{\psi}_s ds).$$

La fonction $\lambda(\phi_k, \cdot)$ étant convexe, on en déduit

$$I(A_k) \leq \frac{1}{t_{k+1} - t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \lambda(\phi_k, \dot{\psi}_s) ds,$$

ce qui donne

$$\varliminf_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon \text{ Log } P_y[A_\varepsilon^\delta] \geq - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \lambda(\phi_k, \dot{\psi}_s) ds = - \Lambda(\phi, \psi)$$

uniformément en $y \in E$. Ceci est bien la minoration *(II.1)*.

3) Démonstration de la majoration *(II.2)*.

Comme la fonction $F$ est bornée, on a pour toute fonction borélienne $\phi$ de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}^d$

$$|X_t^{\varepsilon,\phi} - X_s^{\varepsilon,\phi}| \leq \|F\|_\infty\ |t-s| \qquad (0 \leq s \leq t \leq T).$$

Il en résulte que, lorsque $\omega$ parcourt $\Omega$ et $\phi$ l'ensemble des fonctions boréliennes de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}^d$, la famille des trajectoires $(t \to X_t^{\varepsilon,\phi}(\omega), t \leq T)$ reste dans un compact $\Gamma$ de $C^x_{[0,T]}$. On peut donc supposer le fermé $A$ de *(II.2)* compact.

Pour tous $\psi$ de $C^x_{[0,T]}$ et $\delta > 0$ on note $\bar{B}(\psi,\delta)$ la boule fermée $\{\theta \in C^x_{[0,T]} \mid \ \|\theta - \psi\|_T \leq \delta\}$. Soit $(t_k)$ une subdivision adaptée à $\phi$.

Pour toute $\psi \in C^x_{[0,T]}$ absolument continue,

$$\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}} [F(\phi_k,Y_{\frac{s}{\varepsilon}}) - \dot{\psi}_s]ds\right| \leq 2 \sup_{t\leq T}\left|\int_0^t (F(\phi_s,Y_{\frac{s}{\varepsilon}}) - \dot{\psi}_s)ds\right| = 2\,\|X^{\varepsilon,\phi} - \psi\|_T .$$

Il en résulte que, si $\psi$ est absolument continue, pour tout $y \in E$,

$$P_y[X^{\varepsilon,\phi} \in \bar{B}(\psi,\delta)] \leq P_y\left[\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}} [F(\phi_k,Y_{\frac{s}{\varepsilon}}) - \dot{\psi}_s]ds \leq 2\delta,\ k=0,\dots,n-1\right]\right. .$$

En appliquant la formule *(II.3)* il vient, uniformément en $y \in E$ :

$$\overline{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}}\ \varepsilon \operatorname{Log} P_y[X^{\varepsilon,\phi} \in \bar{B}(\psi,\delta)] \leq -\operatorname{Inf}\{\Lambda(\phi,\sigma) \mid \sigma \in B^\delta_\psi\},$$

où l'on a posé

$$B^\delta_\psi = \{\sigma : [0,T] \to \mathbf{R}^d \mid \sigma(0) = x,\ \Lambda(\phi,\sigma) < \infty,\ \dot{\sigma} \text{ en } (t_k) \text{ escalier et } \left|\int_{t_k}^{t_{k+1}} (\dot{\sigma}-\dot{\psi})(s)ds\right| \leq 2\delta\}.$$

Si on montre que, étant donné $\alpha > 0$, l'ensemble $B^\delta_\psi$ est contenu dans la boule $\bar{B}(\psi,\alpha)$ dès que $\delta$ et le pas de la subdivision $(t_k)$ sont assez petits, on pourra déduire de la semi-continuité de $\Lambda(\phi,\cdot)$ qu'il existe pour tout $a < \Lambda(\phi,\psi)$ un $\delta_\psi > 0$ tel que

$$\overline{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}}\ \varepsilon \operatorname{Log} P_y[X^{\varepsilon,\phi} \in \bar{B}(\psi,\delta_\psi)] \leq -a. \tag{II.4}$$

En effet, si $\alpha_\psi$ est tel que $\Lambda(\phi,\sigma) \geq a$ dès que $\|\sigma - \psi\|_T \leq \alpha_\psi$ (s.c.i. de $\Lambda(\phi,\cdot)$), il suffit de prendre $\alpha = \alpha_\psi$ et de choisir $\delta = \delta_\psi$ et le pas de $(t_k)$ pour que $B^{\delta_\psi}_\psi \subset B(\psi,\alpha_\psi)$.

Soit donc $(t_k)$ une subdivision adaptée à $\phi$, $\sigma$ une fonction de $B^\delta_\psi$. On remarque d'abord que, puisque $\Lambda(\phi,\sigma) < +\infty$, $\|\dot{\sigma}\|_\infty \leq \|F\|_\infty$. Alors, si $\rho = \sup_{0\leq k\leq n-1} (t_{k+1} - t_k)$ et si $t$ est dans $[t_k,t_{k+1}[$ ,

$$|\sigma(t) - \psi(t)| \leq |\sigma(t) - \sigma(t_k)| + |\sigma(t_k) - \psi(t_k)| + |\psi(t_k) - \psi(t)|,$$

d'où

$$\|\sigma - \psi\|_T \leq \|F\|_\infty \rho + 2n\delta + \sup(|\psi(t) - \psi(s)|,\ |t-s| < \rho).$$

On choisit d'abord $\rho$ assez petit pour que le premier et le troisième termes soient majorés par $\frac{\alpha}{3}$, puis, la subdivision fixée, $\delta_\psi$ pour que $2n\delta_\psi < \frac{\alpha}{3}$.

Il reste à déduire la majoration *(II.2)* de *(II.4)*. Comme on peut supposer $A$ compact dans *(II.2)*, cela résulte du lemme suivant :

*Lemme (II.3)* : Soit $(Z_t^\varepsilon,\ t\in[0,T],\ \varepsilon>0)$ une famille de processus sur $(\Omega,\mathcal{F},P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et d'état initial $x$. On suppose qu'il existe une fonctionnelle $\Lambda$ sur $C^x_{[0,T]}$ telle que, pour toute fonction $\psi$ de $C^x_{[0,T]}$ et tout $a<\Lambda(\psi)$ il existe $\delta_\psi>0$ tel que

$$\overline{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}}\ \varepsilon \operatorname{Log} P[\|Z^\varepsilon-\psi\|_T \le \delta_\psi] \le -a.$$

Alors, pour tout compact $A$ de $C^x_{[0,T]}$

$$\overline{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}}\ \varepsilon \operatorname{Log} P[Z^\varepsilon\in A] \le -\inf\{\Lambda(\psi),\ \psi\in A\}.$$

Démonstration :

Si $b=\inf\{\Lambda(\psi),\ \psi\in A\}=0$, le lemme est évident. Sinon, soit $a\in]0,b[$ et $\delta_\psi$ associé à $\psi$ et $a$. Du recouvrement du compact $A$ par les boules $B(\psi,\delta_\psi)$, $\psi$ parcourant $A$, on extrait un recouvrement fini $(B(\psi_i,\delta_{\psi_i}),\ i=1,\dots,p)$. Alors,

$$P[Z^\varepsilon\in A] \le P[Z^\varepsilon\in \bigcup_{i=1}^p B(\psi_i,\delta_{\psi_i})] \le p \sup_{1\le i\le p} P[Z^\varepsilon\in B(\psi_i,\delta_{\psi_i})].$$

D'où

$$\overline{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}}\ \varepsilon \operatorname{Log} P[Z^\varepsilon\in A] \le -a.$$

## *III - GRANDES DEVIATIONS POUR LE SYSTEME (0.1).*

### 1) Enoncé des résultats.

On donne ici les résultats de grandes déviations pour les solutions $x^\varepsilon$ (lorsque $\varepsilon$ tend vers 0) du système

$$(0.1)\qquad dx_t^\varepsilon = F(x_t^\varepsilon, Y_{\frac{t}{\varepsilon}})dt, \qquad x_0^\varepsilon = x\in\mathbb{R}^d,$$

où $F$ est lipschitzienne bornée.

*Théorème (III.1)* : Si le processus $Y$ vérifie l'hypothèse (H), on a, pour tout $y$ de $E$, les limites, uniformes en $y$, suivantes :

(i) Pour tout ouvert $A$ de $C^x_{[0,T]}$,

$$(III.1)\qquad \underline{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}}\ \varepsilon \operatorname{Log} P_y[x^\varepsilon\in A] \ge -\inf\{\Lambda(\phi)\ ;\ \phi\in A\}$$

(ii) Pour tout fermé $A$ de $C^x_{[0,T]}$, *(III.2)* $$\overline{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}}\ \varepsilon \operatorname{Log} P_y[x^\varepsilon \in A] \leq -\inf\{\Lambda(\phi)\ ;\ \phi\in A\},$$

<u>où</u> $\Lambda$ <u>est la fonctionnelle définie par</u> *(I.2')*.

Comme conséquence de la majoration *(III.2)* on a, sous l'hypothèse (H'), un résultat de convergence :

*<u>Théorème (III.2)</u>* : <u>Si le processus</u> $Y$ <u>vérifie l'hypothèse (H'), pour tout</u> $\delta>0$, <u>il existe</u> $\gamma>0$ <u>et</u> $\varepsilon_0>0$ <u>tels que, quels que soient</u> $\varepsilon\leq\varepsilon_0$ <u>et</u> $y$ <u>de</u> $E$, <u>on ait</u>

$$P_y[\|x^\varepsilon-\bar{x}\|_T\geq\delta] \leq \exp(-\frac{\gamma}{\varepsilon}).$$

2) <u>Démonstration de la minoration *(III.1)*</u>.

On va d'abord montrer que pour toute fonction $\phi$ de $C^x_{[0,T]}$ et tout $\delta>0$

*(III.3)* $$\underline{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}}\ \varepsilon \operatorname{Log} P_y[\|x^\varepsilon-\phi\|_T<\delta] \geq -\Lambda(\phi)$$

uniformément en $y$.

Pour cela, on utilise le lemme suivant, démontré en fin de paragraphe pour plus de commodité.

*<u>Lemme (III.3)</u>* : <u>Soit</u> $\phi$ <u>et</u> $\psi$ <u>deux fonctions de</u> $C^x_{[0,T]}$ <u>telles que</u> $\Lambda(\phi,\psi)<+\infty$. <u>Pour toute suite</u> $(\phi^n)$ <u>de fonctions en escalier convergeant uniformément vers</u> $\phi$, <u>il existe une suite</u> $(\psi^n)$ <u>de fonctions de</u> $C^x_{[0,T]}$ <u>convergeant uniformément vers</u> $\psi$ <u>et telle que</u>

(i) $\Lambda(\phi^n,\psi^n) \leq \Lambda(\phi,\psi) < +\infty$

(ii) $\lim_n \Lambda(\phi^n,\psi^n) = \Lambda(\phi,\psi)$.

Ce lemme (appliqué au cas $\psi=\phi$) entraîne facilement *(III.3)*. Soit, en effet, $(\phi^n)$ une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers $\phi$, et $(\psi^n)$ la suite donnée par le lemme. On a :

$$|x^\varepsilon_t-\phi_t| \leq |x^\varepsilon_t - X^{\varepsilon,\phi}_t| + |X^{\varepsilon,\phi}_t - X^{\varepsilon,\phi^n}_t| + |X^{\varepsilon,\phi^n}_t-\psi^n_t| + |\psi^n_t-\phi_t|$$

$$\leq K\int_0^t |x^\varepsilon_s-\phi_s|ds + KT\,\|\phi-\phi^n\|_T + \|X^{\varepsilon,\phi^n}-\psi^n\|_T + \|\psi^n-\phi\|_T.$$

Soit, avec Gromwall,

$$\|x^\varepsilon-\phi\|_T \leq e^{KT}\,[KT\,\|\phi-\phi^n\|_T + \|X^{\varepsilon,\phi^n}-\psi^n\|_T + \|\psi^n-\phi\|_T].$$

Pour $n$ assez grand, on a donc, d'après la proposition *(II.1)*, uniformément en $y$,

$$\underline{\lim}_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon \operatorname{Log} P_y [\|x^\varepsilon - \phi\|_T < \delta] \geq - \Lambda(\phi^n, \psi^n).$$

En faisant tendre $n$ vers $+\infty$ on obtient, compte tenu du lemme *(III.3)*, la formule *(III.3)*.

Il reste à passer de *(III.3)* à *(III.1)*. Soit donc $A$ un ouvert de $C^x_{[0,T]}$. Pour toute $\phi$ de $A$ il existe $\delta > 0$ tel que $\{\theta \in C^x_{[0,T]}, \|\theta - \phi\|_T < \delta\} \subset A$ ; alors, pour toute $\phi$ de $A$, uniformément en $y$,

$$\underline{\lim}_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon \operatorname{Log} P_y[x^\varepsilon \in A] \geq \underline{\lim}_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon \operatorname{Log} P_y [\|x^\varepsilon - \phi\| < \delta] \geq - \Lambda(\phi),$$

ce qui donne bien *(III.1)*.

3) <u>Démonstration de la majoration *(III.2)*.</u>

On peut se limiter au cas où $A$ est compact dans $C^x_{[0,T]}$, puisque l'ensemble des trajectoires $(x^\varepsilon_t,\ t \in [0,T],\ \varepsilon > 0)$ est équi-continu. On peut alors utiliser le lemme *(II.3)* à condition de montrer que pour toute fonction $\psi$ de $C^x_{[0,T]}$ et tout $a < \Lambda(\psi)$ il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\overline{\lim}_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon \operatorname{Log} P_y [\|x^\varepsilon - \psi\|_T \leq \delta] \leq - a.$$

Mais $\Lambda(\cdot,\cdot)$, définie sur les couples $(\phi,\theta)$ de fonctions boréliennes bornées, est s.c.i. au point $(\psi,\psi)$. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que $\Lambda(\phi,\theta) \geq a$ dès que $\|\phi - \psi\|_T \leq \alpha$ et $\|\theta - \psi\|_T \leq \alpha$. Si on pose $\delta = \frac{\alpha}{2KT+1}$ (K constante de Lipschitz de F), il vient, en choisissant $\phi$ en escalier, telle que $\|\phi - \psi\|_T \leq \delta$ :

$$\begin{aligned} \|x^{\varepsilon,\phi} - \psi\|_T &\leq \|x^{\varepsilon,\phi} - x^{\varepsilon,\psi}\|_T + \|x^{\varepsilon,\psi} - x^\varepsilon\|_T + \|x^\varepsilon - \psi\|_T \\ &\leq KT\delta + (KT+1)\|x^\varepsilon - \psi\|_T , \end{aligned}$$

ce qui donne bien, compte tenu de la formule *(II. 2)*

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon \operatorname{Log} P_y [\|x^\varepsilon - \psi\|_T \leq \delta] &\leq \overline{\lim}_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon \operatorname{Log} P_y [\|X^{\varepsilon,\phi} - \psi\|_T \leq \alpha] \\ &\leq - \inf\{\Lambda(\phi,\theta);\ \theta \in C^x_{[0,T]}, \|\theta - \psi\|_T \leq \alpha\} \\ &\leq - a . \end{aligned}$$

<u>Remarque</u> :

On voit facilement que les trois formes suivantes sont équivalentes :

*(III.2)* Pour tout fermé $A$ de $C^x_{[0,T]}$ $\overline{\lim}_{\varepsilon\downarrow 0}\ \varepsilon \operatorname{Log} P_y[x^\varepsilon \in A] \le -\inf\{\Lambda(\phi),\ \phi \in A\}$.

*(III.4)* $(\forall \phi \in C^x_{[0,T]})\ (\forall a < \Lambda(\phi))\ (\exists \delta_\phi > 0)\ \overline{\lim}_{\varepsilon\downarrow 0}\ \varepsilon \operatorname{Log} P_y[\|x^\varepsilon - \phi\| \le \delta_\phi] \le -a$.

*(III.5)* $(\forall \delta > 0)\ (\forall \alpha > 0)\ \overline{\lim}_{\varepsilon\downarrow 0}\ \varepsilon \operatorname{Log} P_y[d_T(x^\varepsilon, K_\alpha) > \delta] \le -a$

où $d_T(\theta,K) = \inf(\|\theta-\phi\|_T,\ \phi \in K)$ et $K_\alpha = \{\phi \in C^x_{[0,T]} \mid \Lambda(\phi) \le \alpha\}$,

toutes les limites étant uniformes en $y \in E$.

4) Démonstration du théorème *(III.2)* sous l'hypothèse (H').

C'est une conséquence de la majoration *(III.2)* et de la proposition *(I.5)*. Il vient en effet

$$\overline{\lim}_{\varepsilon\downarrow 0}\ \varepsilon \operatorname{Log} P_y[\|x^\varepsilon - \bar{x}\|_T \ge \delta] \le -\inf\{\Lambda(\phi),\ \|\phi-\bar{x}\|_T \ge \delta\}.$$

Si la borne inférieure de droite est finie (sinon il n'y a rien à démontrer) on pose $2\gamma = \inf\{\Lambda(\phi) \mid \|\phi - \bar{x}\| \ge \delta\}$. Comme cette borne inférieure est effectivement atteinte (les $\{\Lambda \le \alpha\}$ étant compacts), $\gamma$ est strictement positif puisque $2\gamma = \Lambda(\phi_0)$ avec $\|\phi_0 - \bar{x}\|_T \ge \delta$ et que $\Lambda$ ne s'annule que sur $\bar{x}$.

Il existe donc $\varepsilon_0 > 0$ tel que si $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$\varepsilon \operatorname{Log} P_y[\|x^\varepsilon - \bar{x}\|_T \ge \delta] \le -2\gamma + \gamma = -\gamma,$$

ce qu'il fallait démontrer; $\varepsilon_0$ ne dépend du reste pas de $y$ puisque les limites sont uniformes sur $E$.

5) Démonstration du lemme *(III.3)*.

Il reste à obtenir le lemme *(III.3)* pour que la démonstration du théorème *(III.1)* soit complète.

Soit donc données comme dans l'énoncé du lemme les fonctions $\phi,\psi$ et la suite $(\phi^n)$. On choisit d'abord un représentant borélien $\dot{\psi}$ de la dérivée de $\psi$ et on pose

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}(\dot{\psi}) = \{s \in [0,T] \mid \lambda(\phi_s, \dot{\psi}_s) < +\infty\}.$$

C'est un borélien et, comme $\Lambda(\phi,\psi)$ est fini, $\mathcal{J}^c$ est de mesure nulle.

Soit $\varepsilon_n = K\|\phi^n - \phi\|_T$ (K constante de Lipschitz de F),

*(III.6)* $$K(n,s) = \{\mu \in \mathfrak{M}_1(E) \mid |\int F(\phi^n_s, y)\,\mu(dy) - \dot{\psi}_s| \le \varepsilon_n\}$$

et

$$(III.7)\qquad I(n,s) = \inf\{I(\mu) \mid \mu \in K(n,s)\}.$$

On remarque d'abord que si $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ vérifie

$$\int_E F(\phi_s,y)\, d\mu(y) = \dot{\psi}_s$$

on a :

$$\left|\int_E F(\phi^n_s,y)\,\mu(dy) - \dot{\psi}_s\right| \le \int_E |F(\phi^n_s,y) - F(\phi_s,y)|\,\mu(dy) \le K\,\|\phi^n - \phi\|_T = \varepsilon_n ,$$

et donc $\mu \in K(n,s)$. Ce qui entraîne :

$$(III.8)\qquad \lambda(\phi_s,\dot{\psi}_s) = \inf\{I(\mu) \mid \int_E F(\phi_s,y)\,\mu(dy) = \dot{\psi}_s\} \ge I(n,s).$$

Donc, pour tout $s \in \mathcal{J}$, $K(n,s)$ est non vide; de plus, comme $K(n,s)$ est fermé, l'application s.c.i. $I$ atteint son minimum sur $K(n,s)$, car ce minimum est atteint sur le compact $K(n,s) \cap \{I \le \lambda(\phi_s,\dot{\psi}_s)\}$. Il existe donc $\mu^n_s \in K(n,s)$ telle que

$$(III.9)\qquad I(\mu^n_s) = I(n,s) \qquad (s \in \mathcal{J}).$$

On suppose pour le moment que l'on peut choisir un borélien $\tilde{\mathcal{J}} \subset \mathcal{J}$ tel que $\tilde{\mathcal{J}}^c$ soit Lebesgue-négligeable, puis les $\mu^n_s$ telles que pour tout $n$ fixé l'application de $\tilde{\mathcal{J}}$ dans $\mathcal{M}_1(E)$ $s \to \mu^n_s$ soit borélienne.

On pose alors

$$(III.10)\qquad \begin{cases} a^n_s = \int_E F(\phi^n_s,y)\,\mu^n_s(dy) & s \in \tilde{\mathcal{J}} \\ a^n_s = 0 & s \notin \tilde{\mathcal{J}} . \end{cases}$$

Comme $s \to \phi^n_s$ est en escalier, $s \to a^n_s$ est borélienne et on peut poser

$$(III.11)\qquad \psi^n_t = x + \int_0^t a^n_s\, ds \qquad 0 \le t \le T.$$

La suite $(\psi^n)$ ainsi définie possède les propriétés suivantes :

1) Pour tous $s,t,n$, $|\psi^n_t - \psi^n_s| \le \|F\|_\infty |t-s|$, car $|a^n_s| \le \|F\|_\infty$.

2) Pour tout $n$, $\|\psi^n - \psi\|_T \le KT\,\|\phi^n - \phi\|_T$.

En effet, comme $\mu^n_s \in K(n,s)$, pour $s \in \tilde{\mathcal{J}}$

$$(III.12)\qquad |a^n_s - \dot{\psi}_s| = \left|\int_E F(\phi^n_s,y)\,\mu^n_s(dy) - \dot{\psi}_s\right| \le \varepsilon_n = K\,\|\phi^n - \phi\|_T .$$

3) Pour tout $n$, $\lambda(\phi^n_s,\dot{\psi}^n_s) \le \lambda(\phi_s,\dot{\psi}_s)$ p.p.

En effet, $\lambda(\phi_s^n, a_s^n) = \inf\{I(\mu) \mid \mu \in H(n,s)\}$ avec

$$H(n,s) = \{\mu \in \mathcal{M}_1(E) \mid \int_E F(\phi_s^n, y)\, \mu(dy) = a_s^n\}.$$

Mais, pour $s$ dans $\tilde{\mathcal{J}}$, $\mu_s^n \in H(n,s)$ par définition de $a_s^n$, donc $\lambda(\phi_s^n, a_s^n) \le I(\mu_s^n) = I(n,s) \le \lambda(\phi_s, \dot{\psi}_s)$, d'après *(III.8)*. Comme $\tilde{\mathcal{J}}^c$ est négligeable, et $\dot{\psi}_s^n = a_s^n$ p.p., on a bien le résultat annoncé .

4) Pour presque tout $s$ , $\lambda(\phi_s, \dot{\psi}_s) = \lim\limits_n \lambda(\phi_s^n, \dot{\psi}_s^n)$.

En effet, d'après la propriété précédente

$$\overline{\lim}\ \lambda(\phi_s^n, \dot{\psi}_s^n) \le \lambda(\phi_s, \dot{\psi}_s) \qquad \text{p.p.},$$

et, d'après *(III.12)*, $a_s^n$ converge vers $\dot{\psi}_s$ p.p., d'où, comme $\lambda$ est s.c.i.,

$$\underline{\lim}_n\ \lambda(\phi_s^n, \dot{\psi}_s^n) \ge \lambda(\phi_s, \dot{\psi}_s) \qquad \text{p.p.}$$

En conclusion, $\psi^n$ converge uniformément vers $\psi$ (voir 2)) et, comme $\int_0^T \lambda(\phi_s, \dot{\psi}_s)ds < +\infty$, les propriétés 3), 4) montrent que

$$\Lambda(\phi,\psi) = \int_0^T \lambda(\phi_s, \dot{\psi}_s)ds = \lim_n \int_0^T \lambda(\phi_s^n, \dot{\psi}_s^n)ds = \lim_n \Lambda(\phi^n, \psi^n).$$

Il reste à établir la mesurabilité admise pour que la démonstration soit complète. A cet effet, nous commençons par prouver le résultat suivant :

<u>*Lemme (III.4)*</u> : <u>Soit</u> $\phi : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ <u>en escalier et</u> $\rho : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ <u>borélienne;</u> <u>on pose pour tout</u> $\varepsilon > 0$

$$I(s,\varepsilon,\rho) = \inf\{I(\mu) \mid \mu \in \mathcal{M}_1(E),\ \left|\int F(\phi_s, y)\, \mu(dy) - \rho(s)\right| \le \varepsilon\}.$$

<u>Alors la fonction</u> $I(\cdot,\varepsilon,\rho)$ <u>est Lebesgue-mesurable dès qu'elle est finie presque partout</u>.

<u>Démonstration</u> :

En décomposant $[0,T]$ suivant les intervalles où $\phi$ est constante, on est ramené au cas où $\phi \equiv b \in \mathbb{R}^d$ .

On remarque également que, pour prouver le lemme, il suffit de montrer qu'il existe pour tout $\alpha > 0$ un borélien $A_\alpha$ de $[0,T]$, dont le complémentaire ait une mesure de Lebesgue $\ell(A_\alpha^c) \le \alpha$, et tel que $I(\cdot,\varepsilon,\rho)$ soit borélienne sur $A_\alpha$ . Or, $\alpha > 0$ étant donné, le théorème d'Egoroff permet de construire un borélien $A_\alpha$ contenu dans $\{I(\cdot,\varepsilon,\rho) < \infty\}$ et une suite $(\rho_n)$ de fonctions en escalier vérifiant

$\ell(A_\alpha^c) \leq \alpha$ et $\| 1_{A_\alpha}(\rho_n - \rho)\|_\infty \leq \frac{1}{n}$. Si on pose alors

$$K(s) = \{\mu \in \mathcal{M}_1(E) \mid |\int F(b,y)\, \mu(dy) - \rho(s)| \leq \varepsilon\}$$

$$K^n(s) = \{\mu \in \mathcal{M}_1(E) \mid |\int F(b,y)\, \mu(dy) - \rho_n(s)| \leq \varepsilon + \frac{1}{n}\},$$

il suffit de démontrer que $I(K^n(s))$ tend vers $I(K(s)) = I(s,\varepsilon,\rho)$ pour $s$ appartenant à $A_\alpha$ : en effet, les $\rho_n$ étant en escalier, il en est de même des $I(K^n(s))$, qui sont donc boréliennes. Mais, pour $s \in A_\alpha$, $K(s) \subset K^n(s)$, d'où $I(K^n(s)) \leq I(K(s)) = I(s,\varepsilon,\rho) < \infty$.

Pour tout $n$, il existe donc $\nu_s^n \in K^n(s)$, avec $I(\nu_s^n) = I(K^n(s))$. Comme, pour $s \in A_\alpha$ fixé, la suite $(\nu_s^n)$ est dans le compact $\{I \leq I(K(s))\}$, quelle que soit la valeur d'adhérence $J$ de $(I(K^n(s)))_n$, il existe une suite d'entiers $n_k$ tendant vers $+\infty$ telle que

- $\nu_s^{n_k}$ converge vers une probabilité $\nu \in K(s)$
- $\lim_k I(\nu_s^{n_k}) = \lim_k I(K^{n_k}(s)) = J.$

Alors, comme $I$ est s.c.i. et $\nu \in K(s)$,

$$I(K(s)) \leq I(\nu) \leq \varliminf_k I(\nu_s^{n_k}) = J \leq I(K(s)),$$

ce qui prouve que $I(K(s)) = \lim I(K^n(s))$, et achève la démonstration.

Ce lemme, appliqué à $\phi = \phi_n$, $\rho = \dot{\psi}$ et $\varepsilon = \varepsilon_n$, montre que $s \to I(s,\varepsilon_n,\dot{\psi}) = I(n,s)$ est Lebesgue-mesurable sur $[0,T]$ (puisque l'on sait déjà que $I(n,s) < \infty$ p.p. sur $[0,T]$). On peut donc trouver un borélien $\mathcal{J}_1$ de $[0,T]$ tel que $\ell(\mathcal{J}_1^c) = 0$ et que, pour tout $n$, la fonction $I(n,\cdot)\, 1_{\mathcal{J}_1}$ soit borélienne.

On pose alors $\tilde{\mathcal{J}} = \mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}$ et, $\mu_0$ étant une probabilité quelconque sur $E$,

$$H_n = \{(s,\mu) \,/\, s \in \tilde{\mathcal{J}},\ \mu \in K(n,s),\ I(\mu) = I(n,s)\} + (\tilde{\mathcal{J}}^c \times \{\mu_0\}).$$

Il est facile de vérifier que $H_n$ est un borélien de $[0,T] \times \mathcal{M}_1(E)$, dont les coupes $H_n(s,\cdot)$ $(s \in [0,T])$ sont compactes.

On en déduit, grâce à un résultat figurant au paragraphe IV de Dellacherie [1], que $H_n$ admet une section par un graphe borélien, ce qui revient précisément à dire, en reprenant les notations du début, que l'on peut choisir les $\mu_s^n$ de façon que l'application $s \to \mu_s^n$ soit borélienne sur $\tilde{\mathcal{J}}$. En effet, il suffit, pour retrouver les hypothèses faites dans [1], d'identifier l'espace polonais $\mathcal{M}_1(E)$ à un $G_\delta$ du compact métrique $[0,1]^{\mathbb{N}}$, ce qui ne change pas la mesurabilité.

La démonstration du lemme *(III.3)* se trouve ainsi achevée.

Remarque finale sur l'hypothèse markovienne.

L'hypothèse $Y$ markovien faite tout au long de l'exposé n'a été en fait utilisée que pour démontrer le lemme *(II.2)*. On peut donc, en prenant comme hypothèse les résultats de ce lemme, ne pas supposer $Y$ markovien.

Posons pour tous $t_1 \leq t_2$ de $\mathbb{R}_+$, $\omega$ de $\Omega$ et $B$ de $\mathcal{E}$:

$$L_{[t_1,t_2]}(\omega,B) = \frac{1}{t_2-t_1} \int_{t_1}^{t_2} 1_B(Y_s(\omega))ds.$$

Alors $L_{[t_1,t_2]}(\omega,\cdot)$ est dans $\mathcal{M}_1(E)$, et la nouvelle hypothèse de grandes déviations pour $Y$ se formule ainsi :

Hypothèse (H"). Il existe une fonctionnelle $I : \mathcal{M}_1(E) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ s.c.i., convexe, telle que

(i) Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, $\{\mu \in \mathcal{M}_1(E) \mid I(\mu) \leq a\}$ est compact.

(ii) Quels que soient le naturel $n$ et le n-uplet donné $(t_1,\ldots,t_n)$ de $\mathbb{R}_+^n$ on a (en posant $t_0 = 0$) :

a) Pour tous $A_0,\ldots,A_{n-1}$ ouverts de $\mathcal{M}_1(E)$

$$\varliminf_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon \operatorname{Log} P_y\left[L_{[\frac{t_k}{\varepsilon},\frac{t_{k+1}}{\varepsilon}]} \in A_k,\ k=0,\ldots,n-1\right] \geq -\sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1}-t_k)\, I(A_k)$$

b) Pour tous $A_0,\ldots,A_{n-1}$ fermés de $\mathcal{M}_1(E)$

$$\varlimsup_{\varepsilon\downarrow 0} \varepsilon \operatorname{Log} P_y\left[L_{[\frac{t_k}{\varepsilon},\frac{t_{k+1}}{\varepsilon}]} \in A_k,\ k=0,\ldots,n-1\right] \leq -\sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1}-t_k)\, I(A_k),$$

les deux limites étant uniformes en $y \in E$.

Il est facile de voir que l'on obtient encore les résultats du théorème *(III.1)* sous l'hypothèse (H"), les démonstrations étant les mêmes que dans ce qui précède. On rapprochera cette hypothèse de celle faite par Freidlin dans [4] comme on l'a fait au paragraphe *I.2*).

Appendice.

On démontre le théorème *A.1* en suivant le chapitre 9 de [6]. Pour cela, on prouve d'abord le résultat suivant :

*Lemme (A.2)* : Soit $\lambda$ une fonction s.c.i. sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. On suppose que pour un point donné $x_0$ de $\mathbb{R}^d$ il existe une fonction $\psi$ de $\mathbb{R}^d$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ et un voisinage $V$ de $x_0$ tels que

(i) Pour tous $x$ de $V$ et $y$ de $\mathbb{R}^d$, $\lambda(x,y) \geq \psi(y)$.

(ii) La transformée de Legendre $\psi^*$ de $\psi$ est partout $< +\infty$.

Alors, si l'on pose pour tous $\varepsilon > 0$ et $y$ de $\mathbb{R}^d$

$$f_\varepsilon(y) = \inf\{\lambda(x,y) \mid x \in \mathbb{R}^d, |x - x_0| \leq \varepsilon\},$$

on a

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} f_\varepsilon^{**} = \lambda_{x_0}^{**}, \quad \text{où } \lambda_{x_0} = \lambda(x_0, \cdot).$$

Démonstration du lemme.

Il suffit de prouver que $\inf\limits_{\varepsilon>0} f_\varepsilon^* = \lambda_{x_0}^*$, ce qui se réduit, en fait, à $\inf\limits_{\varepsilon>0} f_\varepsilon^* \leq \lambda_{x_0}^*$, l'inégalité inverse étant évidente.

Soit $\varepsilon_0$ tel que $f_{\varepsilon_0} \geq \psi$, donc $f_{\varepsilon_0}^* \leq \psi^* < +\infty$. On se limitera dans la suite à $\varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Supposons alors, par l'absurde, qu'il existe $\delta > 0$ et $z_0$ de $\mathbb{R}^d$ tels que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\lambda_{x_0}^*(z_0) + \delta < f_\varepsilon^*(z_0) = \sup_y [y.z_0 - f_\varepsilon(y)].$$

Choisissons $y_\varepsilon$ tel que $\lambda_{x_0}^*(z_0) + \delta < y_\varepsilon.z_0 - f_\varepsilon(y_\varepsilon)$, puis $x_\varepsilon$ vérifiant $|x_\varepsilon - x_0| \leq \varepsilon$ et $\lambda_{x_0}^*(z_0) + \delta < y_\varepsilon.z_0 - \lambda(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$. La famille $\{y_\varepsilon, \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$ est bornée. En effet, comme pour tout $z$

$$f_{\varepsilon_0}^*(z) \geq f_\varepsilon^*(z) \geq y_\varepsilon.z - f_\varepsilon(y_\varepsilon) \geq y_\varepsilon.z - \lambda(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \geq y_\varepsilon.(z - z_0) + \lambda_{x_0}^*(z_0) + \delta,$$

et comme $f_{\varepsilon_0}^*$, convexe et partout finie, est continue, on a :

$$+\infty > \sup\{f_{\varepsilon_0}^*(z);\ |z - z_0| \leq 1\} \geq |y_\varepsilon| + \lambda_{x_0}^*(z_0) + \delta.$$

Soit alors $\varepsilon_n$ une suite tendant vers zéro telle que $y_n = y_{\varepsilon_n}$ converge vers une limite $y$. La fonction $\lambda$ étant s.c.i., l'inégalité

$$y_n.z_0 > \lambda(x_n, y_n) + \lambda_{x_0}^*(z_0) + \delta$$

entraîne

$$y.z_0 \geq \lambda(x_0, y) + \lambda_{x_0}^*(z_0) + \delta,$$

d'où l'on déduit :

$$\lambda_{x_0}^*(z_0) \geq y.z_0 - \lambda_{x_0}(y) \geq \lambda_{x_0}^*(z_0) + \delta,$$

ce qui est absurde.

Démonstration du théorème *(A.1)*.

On note $\mathcal{B}^x_{[0,T]}$ l'ensemble des fonctions $\phi$ boréliennes bornées de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}^d$ telles que $\phi(0) = x$.

Soit $\Lambda_\alpha = \{(\phi,\psi) \in \mathcal{B}^x_{[0,T]} \times \mathcal{B}^x_{[0,T]} \mid \Lambda(\phi,\psi) \leq \alpha\}$. Il s'agit de démontrer que $\Lambda_\alpha$ est fermé. Soit $((\phi^n,\psi^n))_{n\geq 0}$ une suite convergeant uniformément vers $(\phi,\psi)$, avec $(\phi^n,\psi^n)$ dans $\Lambda_\alpha$ pour tout $n$. Alors, en particulier, $\|\dot{\psi}^n\|_\infty \leq B$, et la famille $(\dot{\psi}^n,\ n\in \mathbb{N})$ est faiblement relativement compacte dans $L^1([0,T])$, puisque équi-intégrable. Par un changement d'indice on peut donc supposer que $(\dot{\psi}^n)$ converge faiblement vers une fonction $\theta$. Mais on a alors, pour tous $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\psi(t) - \psi(s) = \lim_{n\to\infty} (\psi^n(t) - \psi^n(s)) = \lim_n \int_s^t \dot{\psi}^n(u)du = \int_s^t \theta(u)du.$$

Il en résulte que $\psi$ est absolument continue et que $\dot{\psi} = \theta$ (égalité dans $L^1[0,T]$).

Posons $\varepsilon_n = \sup_{p\geq n} \|\phi^p - \phi\|_T$. Comme $\dot{\psi}$ appartient à la fermeture faible de $\{\dot{\psi}^p,\ p\geq n\}$, il existe, d'après un théorème de Mazur, une combinaison convexe

$$\chi^n = \sum_{j=1}^{j(n)} \alpha_{p_j^n} \dot{\psi}^{p_j^n} \qquad (p_j^n \geq n)$$

d'éléments $(\dot{\psi}^p,\ p\geq n)$ telle que $\|\chi^n - \dot{\psi}\|_1 \leq \varepsilon_n$. De plus, pour tout $j \leq j(n)$, $\|\phi^{p_j^n} - \phi\|_T \leq \varepsilon_n$, car $p_j^n \geq n$.

En posant $h_\varepsilon(x_0,y) = \inf\{\lambda(x,y) \mid |x - x_0| \leq \varepsilon\}$, on a, pour tout $s$ de $[0,T]$

$h_{\varepsilon_n}(\phi_s,\dot{\psi}_s^{p_j^n}) \leq \lambda(\phi_s^{p_j^n},\dot{\psi}_s^{p_j^n})$, puisque $|\phi_s^{p_j^n} - \phi_s| \leq \varepsilon_n$; d'où

$$\int_0^T h_{\varepsilon_n}(\phi_s,\dot{\psi}_s^{p_j^n})ds \leq \Lambda(\phi^{p_j^n},\psi^{p_j^n}) \leq \alpha,$$

puis, comme $\sum_{j=1}^{j(n)} \alpha_{p_j^n} = 1$, $\alpha \geq \sum_{j=1}^{j(n)} \alpha_{p_j^n} \int_0^T h_{\varepsilon_n}(\phi_s,\dot{\psi}_s^{p_j^n})ds \geq \int_0^T \sum_{j=1}^{j(n)} \alpha_{p_j^n} h^{**}_{\varepsilon_n}(\phi_s,\dot{\psi}_s^{p_j^n})ds$

$$\geq \int_0^T h^{**}_{\varepsilon_n}(\phi_s,\chi_s^n)ds$$

(on s'est servi, successivement, de l'inégalité $h_{\varepsilon_n} \geq h^{**}_{\varepsilon_n}$, et de la convexité de $h^{**}_{\varepsilon_n}$ en la seconde variable).

Mais $(h^{**}_{\varepsilon_n})$ est une suite croissante de fonctions positives et s.c.i. en leur second argument. Quitte à extraire de $(\chi^n)$ une sous-suite convergeant p.p. vers $\dot{\psi}$, on peut donc écrire, pour tout $n_0$ fixé :

$$\int_0^T h^{**}_{\varepsilon_{n_0}}(\phi_s,\dot{\psi}_s)ds \leq \int_0^T \underline{\lim}_{n\uparrow\infty} h^{**}_{\varepsilon_{n_0}}(\phi_s,\chi^n_s)ds \leq$$

$$\leq \underline{\lim}_{n\uparrow\infty} \int_0^T h^{**}_{\varepsilon_{n_0}}(\phi_s,\chi^n_s)ds \leq \underline{\lim}_{n\uparrow\infty} \int_0^T h^{**}_{\varepsilon_n}(\phi_s,\chi^n_s)ds \leq \alpha.$$

Comme, d'après le lemme, $\lambda = \lambda^{**} = \lim_{n_0} h^{**}_{\varepsilon_{n_0}}$, on a bien

$$\int_0^T \lambda(\phi_s,\dot{\psi}_s)ds \leq \underline{\lim}_{n_0\uparrow\infty} \int_0^T h^{**}_{\varepsilon_{n_0}}(\phi_s,\dot{\psi}_s)ds \leq \alpha,$$

ce que l'on voulait montrer.

BIBLIOGRAPHIE :

[1] C. DELLACHERIE : Ensembles analytiques : Théorèmes de séparation et applications. Sém. de Probabilités IX, Lecture Notes n° 465, Springer 1975, p. 336-372.

[2] M.D. DONSKER et S.R.S. VARADHAN : Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time, I, Comm. on pure and applied math., 28 (1975) p. 1-47 ; III, Comm. on pure and applied math., 29 (1976). p. 389-461.

[3] I. EKELAND et R. TEMAM : Convex Analysis and Variational problems, North Holland, 1977.

[4] M.I. FREIDLIN : The averaging principle and theorems on large deviations, Russian Math. Surveys, 33, 5 (1978), p. 117-176.

[5] J. GÄRTNER : On large deviations from the invariant measure, Th. of probability and its applications, 22, 1 (1977), p. 24-39.

[6] A.D. IOFFE et V.M. TIKHOMIROV : Teoriya ekstremal'nykh zadatch (Théorie des problèmes extrémaux), Naouka, Moscou 1974.

[7] R.Z. KHAS'MINSKII : On the averaging principle for Itô's stochastic differential equations, Kybernetika (Prague), 4 (1968), p. 260-277.

[8] R. ROCKAFELLAR : Convex analysis, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1970.

[9] S.R.S. VARADHAN : Asymptotic probabilities and differential equations, Comm. on pure and applied math., 19 (1966), p. 261-286.

[10] A.D. VENTCEL' et M.I. FREIDLIN : Flouktouatsii v dinamitcheskikh sistemakh pod deistviem malykh sloutchaïnykh vozmouchtchenii (Fluctuations dans les systèmes dynamiques sous l'action de petites perturbations aléatoires), Naouka, Moscou, 1979.

[11] M. BRANCOVAN, F. BRONNER et P. PRIOURET : Grandes déviations pour les solutions de certains sytèmes différentiels. Publications du Laboratoire de Probabilités, Université Paris VI, Paris, 1981.

Laboratoire de Probabilités, Université PARIS VI,

4, Place Jussieu, Tour 46, 75230 PARIS CEDEX 05.