

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

## **Interpolation entre espaces d'Orlicz**

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 16 (1982), p. 153-158

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1982\\_\\_16\\_\\_153\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__153_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

INTERPOLATION ENTRE ESPACES D'ORLICZ  
par P.A. Meyer

Ayant eu besoin d'utiliser le théorème d'interpolation complexe de Calderón-Lions, dans le cas particulier des espaces d'Orlicz modérés, je me suis aperçu que les résultats concernant ces espaces ne sont pas faciles à extraire du grand article de Calderón ( « Intermediate spaces and interpolation, the complex method », Studia M. 24, 1964, p. 113-190 ). L'exposé suivant rendra peut être service, en servant d'introduction à ces très beaux travaux.

I. VARIATIONS SUR LE « THEOREME DES TROIS DROITES »

La notation standard pour la variable complexe est  $z=x+iy$ , utilisée sans mention spéciale. Nous désignons par  $S$  la bande ouverte  $0<x<1$  du plan complexe, par  $\bar{S}$  la bande fermée, par  $D=D_0 \cup D_1$  sa frontière. Pour tout  $z \in S$ ,  $H_z$  est la mesure harmonique au point  $z$  ; si  $f$  est une fonction bornée sur  $D$ , nous écrivons

$$(1) \quad H_z(f) = \int f(iu) \mu_0(z, du) + \int f(1+iu) \mu_1(z, du)$$

et nous notons les points suivants :

a)  $\mu_0(z, \cdot)$  et  $\mu_1(z, \cdot)$  sont des mesures positives sur  $\mathbb{R}$ , de masses égales respectivement à  $1-x$  et à  $x$ . Nous introduirons aussi les mesures de probabilité

$$\bar{\mu}_0(z, \cdot) = \frac{1}{1-x} \mu_0(z, \cdot) \quad , \quad \bar{\mu}_1(z, \cdot) = \frac{1}{x} \mu_1(z, \cdot)$$

b) Soient  $z$  et  $z'$  deux points de  $S$ . Alors les mesures  $\mu_1(z, \cdot)$  et  $\mu_1(z', \cdot)$  sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ , et les rapports de leurs densités sont bornés supérieurement et inférieurement, de sorte que ces ( quatre ) mesures ont mêmes espaces  $L^p$ . En particulier, nous dirons qu'une fonction  $f$  sur  $D$  ( resp. sur  $\mathbb{R}$  ) est harmoniquement intégrable si elle est intégrable par rapport à  $H_z(\cdot)$  ( resp. à  $\mu_0(z, \cdot)$  ou  $\mu_1(z, \cdot)$  ) pour un  $z \in S$ , et la propriété a alors lieu pour tout  $z \in S$ .

Nous disons qu'une fonction harmonique complexe  $f$  dans  $S$  est poissonnienne s'il existe deux fonctions  $f_0, f_1$  sur  $\mathbb{R}$  <sup>harmoniquement intégrables</sup> telles que l'on ait pour  $z \in S$

$$(2) \quad f(z) = \int f_0(u) \mu_0(z, du) + \int f_1(u) \mu_1(z, du)$$

Si l'on désire calculer les  $\mu_i$ , on utilisera une représentation conforme  $z \mapsto e^{\pi iz}$  de  $S$  sur le demi-plan supérieur, et l'expression bien connue

(  $H_z(du) = \Re\left(\frac{1}{\pi i} \frac{du}{z-u}\right)$  ) de la mesure harmonique du demi-plan. Cette représentation conforme, ramenant à une situation plus familière, montre aussi que le caractère poissonnien de  $f$  signifie qu'une certaine martingale locale <sup>(1)</sup> construite sur l'espace du mouvement brownien est en réalité une martingale fermée à droite. Il en résulte :

si  $f$  et  $g$  sont harmoniques,  $g$  harmonique poissonnienne, et  $|f| \leq |g|$ , alors  $f$  est poissonnienne.

En particulier, toute fonction harmonique bornée est poissonnienne. Les fonctions  $\sin \pi x e^{\pm \pi y}$  ( continues sur  $\bar{S}$  et nulles sur  $D$  ) ne sont pas poissonniennes.

Voici l'inégalité fondamentale pour le théorème de Calderón. Nous ne pousserons pas la discussion plus loin.

THEOREME 1. Soit  $f$  une fonction holomorphe poissonnienne, donnée par (2). Alors on a

$$(3) \quad |f(z)| \leq (|f_0(u)| \bar{\mu}_0(z, du))^{1-x} (|f_1(u)| \bar{\mu}_1(z, du))^x$$

Démonstration. Notons  $I_0^{1-x} I_1^x$  le second membre. Il est clair sur la représentation (2), écrite sous la forme

$$f(z) = (1-x)f_0(u) \bar{\mu}_0(z, du) + x f_1(u) \bar{\mu}_1(z, du)$$

que l'on a  $|f(z)| \leq I_0 \vee I_1$ . La fonction  $e^{rz} f(z)$  est majorée en module par  $e^r |f(z)|$ , donc poissonnienne, et en lui appliquant le résultat précédent on obtient <sup>(2)</sup>

$$|f(z)| \leq e^{-rx} (I_0 \vee I_1 e^r) = e^{-rx} I_0 \vee e^{r(1-x)} I_1$$

On choisit  $r$  de manière à rendre égaux les deux termes du  $\vee$ , et on obtient alors (3). Cela nous suffit.

## II. SUR LES ESPACES D'ORLICZ

Nous avons quelque part un espace probabilisé  $(\Omega, \mathbb{F}, P)$  - en fait, tout s'étend aux mesures positives  $\sigma$ -finies, mais peu importe. Nous considérons une fonction de Young modérée  $\Phi$  et l'espace d'Orlicz  $\Phi(L)$  correspondant. Rappelons les définitions :

$\Phi$  est nulle en 0, croissante, convexe ;  $\Phi(x)/x$  ( ou de manière équivalente  $\Phi'(x)$  ) tend vers l'infini pour  $x \rightarrow \infty$  ; on a  $x \Phi'(x) \leq p \Phi(x)$  pour tout  $x$ , où  $p$  est une constante ( cela équivaut à la condition plus usuelle de modération  $\Phi(2x) \leq k \Phi(x)$  )

(1). Si  $T$  est le temps de sortie du demi-plan pour le mouvement brownien  $(B_t)$ ,  $f(B_t)$  est une martingale locale sur l'intervalle  $[0, T[$ . Ce raisonnement montre aussi que  $f_0$  et  $f_1$  sont en un certain sens des limites de  $f$  au bord. (2) Ici on triche un peu : il faut encore identifier les "valeurs au bord" de  $e^{rz} f(z)$  comme  $e^{iru} f_0(u)$  et  $e^{r+iru} f_1(u)$ . Cf. note (1).

Pour simplifier, nous supposons  $\Phi$  strictement croissante.

$\Phi(L)$  est l'ensemble des v.a. <sup>complexes</sup>  $f$  sur  $\Omega$  telles que  $E[\Phi(\frac{|f|}{\lambda})] \leq 1$  pour  $\lambda$  assez grand, le plus petit  $\lambda$  possible étant par définition la norme  $\|f\|_{\Phi}$ .

Nous adopterons la convention de notation suivante : soit  $\Phi$  une fonction positive, croissante, convexe, etc., mais sur un intervalle  $[A, \infty[$  seulement, où  $A \geq 0$ . Nous supposons que  $A\Phi'(A) \geq \Phi(A)$  ( c'est toujours possible, quitte à augmenter  $A$  ). Alors  $\Phi$  admet un prolongement  $\hat{\Phi}$  en une fonction de Young modérée sur tout  $\mathbb{R}$ , et l'espace d'Orlicz  $\hat{\Phi}(L)$  ne dépend ni de  $A$ , ni du prolongement utilisé. Nous le noterons  $\Phi(L)$  dans la suite. Quant à la norme, elle dépend de  $\hat{\Phi}$ , mais nous choisirons arbitrairement un prolongement et conviendrons de la noter encore  $\| \cdot \|_{\Phi}$ . Cela nous permet de définir l'espace d'Orlicz noté  $L^p \log^{\alpha} L$  pour tout  $p > 1$  et tout  $\alpha$  réel ( ces espaces nous intéressent à cause des inégalités de Sobolev logarithmiques ).

Maintenant, nous adoptons le point de vue de Calderón : nous considérons une fonction  $m(x)$  sur  $\mathbb{R}_+$ , nulle en 0, croissante, concave, telle que  $m'(x) \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow \infty$ ), ou de manière équivalente  $m(x)/x \rightarrow 0$ , et telle que  $xm'(x) \geq \frac{1}{p}m(x)$ . Soit  $\Phi$  la fonction réciproque de  $m$ ; nous noterons  $\Lambda_m$  l'espace d'Orlicz  $\Phi(L)$  ( on a écrit tout ce qu'il faut pour que  $\Phi$  soit une fonction de Young modérée ! ). La norme dans  $\Lambda_m$  ( que nous noterons  $\|f\|_m$  ) est le plus petit  $\lambda > 0$  possédant la propriété

il existe  $h \in \beta_{\frac{1}{2}}^+$  ( la boule unité positive de  $L^1$  ) tel que  $|f| \leq \lambda m \circ h$  p.p.

Nous dirons que  $m$  est un générateur concave de l'espace  $\Phi(L)$ . Ce que nous avons dit plus haut pour les fonctions  $\Phi$  définies seulement sur  $[A, +\infty[$  s'applique évidemment aux  $m$  définis seulement sur  $[B, \infty[$ , avec mêmes abus de langage.

Les espaces d'Orlicz les plus couramment utilisés, après les  $L^p$  bien sûr, sont les  $L^p \log^r L$  ( $p > 1$ ,  $r$  réel ; la fonction  $\Phi$  correspondante est convexe pour  $x$  assez grand - par exemple pour  $x \geq e$  si  $r \geq 0$ ,  $x \geq 1$  si  $r \leq -1$ ). On ne peut donner explicitement la fonction  $\Phi^{-1}$ , mais :

LEMME 1. Le générateur concave  $m(x) = x^{1/p} \log^{-r/p} x$  ( $x$  assez grand) engendre l'espace  $L^p \log^r L$  ( $p > 1$ ,  $r$  réel).

Démonstration. On laisse les détails au lecteur. Le point essentiel est de former  $\Phi(m(x))$  et de s'assurer que cela vaut  $p^{-r}x(1+o(1))$ , de sorte que  $\Phi(m(x))$  est compris entre  $Ax$  et  $Bx$  pour  $x$  grand.

LEMME 2. Soient  $m_0$  et  $m_1$  deux générateurs concaves, et soit  $s \in ]0, 1[$ . Alors  $m_s = m_0^{1-s} m_1^s$  est encore un générateur concave.

Démonstration. Pour vérifier que  $m_s$  est concave, on prend deux points  $u$  et  $v$ , une mesure  $\theta = p\epsilon_u + q\epsilon_v$  ( $p \geq 0, q \geq 0, p+q=1$ ) ; on applique l'inégalité de Hölder aux fonctions  $m_0^{1-s}$  et  $m_1^s$  avec les exposants conjugués  $1/1-s$  et  $1/s$ , et c'est ce qu'on veut. Le reste est à peu près évident.

### III. LE THEOREME D'INTERPOLATION

Pour simplifier, nous allons raisonner sur des espaces mesurés finis, ce qui nous permettra de travailler sur  $L^\infty$  au lieu des fonctions simples. Nous considérons une famille  $(T_z)_{z \in \bar{S}}$  d'opérateurs linéaires de  $L^\infty$  dans  $L^1$  ( ce pourrait être  $L^\infty(\Omega)$  dans  $L^1(\Omega')$ , mais nous prendrons ici  $\Omega = \Omega'$ ) possédant les propriétés suivantes

1) Pour  $f \in L^\infty$ , l'application  $z \mapsto T_z f$  de  $\bar{S}$  dans  $L^1$  est continue, et holomorphe dans  $S$ .

2) Il existe un espace d'Orlicz modéré  $\Lambda_a$  tel que l'on ait, pour  $f \in L^\infty$

$$\|T_z f\|_{L^1} \leq c \|f\|_a \quad (c \text{ ne dépend pas de } z).$$

En pratique, ce sera souvent un espace  $L^p$ .

Nous nous donnons maintenant quatre générateurs concaves  $m_0, m_1, n_0, n_1$  et nous supposons que, pour  $f \in L^\infty$

$$(4) \quad \|T_{iy} f\|_{n_0} \leq M_0 \|f\|_{m_0}, \quad \|T_{1+iy} f\|_{n_1} \leq M_1 \|f\|_{m_1}$$

Dans ces conditions, le théorème de Calderon nous dit que

THEOREME 2. On a  $\|T_s f\|_{n_s} \leq 2M_0^{1-s} M_1^s \|f\|_{m_s}$ , avec  $m_s = m_0^{1-s} m_1^s$ ,  $n_s = n_0^{1-s} n_1^s$ .

Démonstration. 1) Nous prenons  $f \in L^\infty$  telle que  $\|f\|_{m_s} \leq 1$ , soit  $|f| \leq m_s(h)$ , où  $h$  est positive d'intégrale  $\leq 1$ , inégalité que nous pouvons écrire

$$f = r m_0^{1-s}(h) m_1^s(h) \quad , \quad \text{avec } |r| \leq 1$$

Soit  $c$  une borne pour  $|f|$ , et soit  $\mathfrak{g}_s$  la fonction inverse de  $m_s$  ; on ne restreint pas la généralité en supposant  $h$  bornée par  $\mathfrak{g}_s(c)$ . Nous posons alors pour tout  $z \in \bar{S}$

$$g_z = r m_0^{1-z}(h) m_1^z(h)$$

fonction uniformément bornée par  $c$  sur  $\bar{S}$ , qui se réduit à  $f$  pour  $z=s$ . L'espace  $\Lambda_a$  fait maintenant une brève apparition :  $z \mapsto g_z$ , considérée comme élément de  $\Lambda_a$ , est continue sur  $\bar{S}$  ( par convergence dominée ; nous laisserons le lecteur vérifier ce point en général, mais en pratique il sera trivial,  $\Lambda_a$  étant un  $L^p$  ), uniformément bornée, holomorphe dans  $S$  ( il suffit de vérifier que son intégrale le long de tout cercle est nulle, et pour cela on vérifie que l'intégrale de  $E[g_z j]$  est nulle pour

$jeL^\infty$ ). Nous posons maintenant  $T_z(g_z)=k_z$ . Notons en les propriétés, que nous vérifierons ensuite, et qui seules interviendront dans la suite de la démonstration.

- 1)  $z \mapsto k_z$  est une fonction continue bornée de  $\bar{S}$  dans  $L^1$ , holomorphe dans  $S$ . Elle se réduit à  $T_S f$  pour  $z=s$ .
- 2) On a  $\|k_{iu}\|_{n_0} \leq M_0$  et  $\|k_{1+iu}\|_{n_1} \leq M_1$

Pour vérifier la continuité, on écrit  $\|T_z g_z - T_{z_0} g_{z_0}\|_1 \leq \|T_z(g_z - g_{z_0})\|_1 + \|(T_z - T_{z_0})g_{z_0}\|_1$ . Pour le premier terme, on utilise le fait que  $T_z$  est uniformément borné de  $\Lambda_a$  dans  $L^1$ , et que  $g_z \rightarrow g_{z_0}$  dans  $\Lambda_a$  (propriété 2) de  $T_z$ , et pour le second la propriété 1) de  $T_{z_0}$ . Pour vérifier que  $k_z$  est uniformément bornée dans  $L^1$ , on utilise la propriété 2) de  $T_z$ . Nous laissons alors le lecteur vérifier l'holomorphie (sous la forme de la dérivabilité).

La propriété 1) nous permet de choisir une version de  $k_z(\omega)$ , mesurable par rapport au couple  $(z, \omega)$  dans  $\bar{S}$ . Voici la partie délicate de la démonstration.

a) Considérons l'intégrale forte dans  $L^1$

$$k'_z = \int k(iu)\mu_0(z, du) + \int k(1+iu)\mu_1(z, du)$$

et soit  $j \in L^\infty$ . La fonction holomorphe  $z \mapsto E[jk_z]$  est bornée, donc poissonnienne. Elle admet les limites au bord  $E[jk_{iu}]$ ,  $E[jk_{1+iu}]$  dans la topologie ordinaire, donc elle est intégrale de Poisson de ces fonctions, et donc elle coïncide avec  $E[jk'_z]$ . Donc  $k_z = k'_z$ .

b) Nous avons

$$\| \int |k(iu, \omega)| \mu_0(z, du) + \int |k(1+iu, \omega)| \mu_1(z, du) \|_1 \leq \int \|k(iu)\| \mu_0(z, du) + \int \|k(1+iu)\| \mu_1(z, du) < \infty$$

donc la v.a. figurant au premier membre est finie pour  $\omega \notin N$  négligeable. Mais ce résultat d'intégrabilité harmonique ne dépend pas de  $z$ , et pour  $\omega \notin N$  nous avons une fonction harmonique poissonnienne complexe

$$\hat{k}(\cdot, \omega) = \int k(iu, \omega) \mu_0(\cdot, du) + \int k(1+iu, \omega) \mu_1(\cdot, du)$$

Pour  $z$  fixé, le théorème de Fubini nous dit que si  $j \in L^\infty$

$$E[j\hat{k}(z, \cdot)] = \int E[jk_{iu}] \mu_0(z, du) + \int E[jk_{1+iu}] \mu_1(z, du) = E[jk_z]$$

Donc  $\hat{k}(z, \cdot)$  est un représentant de la classe  $k_z$ , et nous pouvons enlever le  $\hat{\cdot}$ . Puisque  $z \mapsto k_z$  est holomorphe à valeurs dans  $L^1$ , l'intégrale de  $E[jk_z]$  le long de tout cercle est nulle. Prenant « suffisamment » de  $j$  et de cercles (en infinité dénombrable), on voit qu'il existe un ensemble négligeable  $N' \subset N$  tel que, pour  $\omega \notin N'$ ,  $k(z, \omega)$  soit holomorphe.

c) La démonstration est virtuellement terminée : nous appliquons le th. 1 pour obtenir que, si  $\omega \in N'$

$$|k_z(\omega)| \leq (f|k(iu, \omega)|\bar{\mu}_0(z, du))^{1-x} (f|k(1+iu, \omega)|\mu_1(z, du))$$

Ecrivons maintenant que  $\|k(iu)\|_{n_0} \leq M_0$  : cela signifie que la fonction

$$h_0(u, \omega) = \Psi_0\left(\frac{1}{M_0} |k(iu, \omega)|\right) \quad (\Psi_0 \text{ inverse de } n_0)$$

a une intégrale  $\leq 1$  - noter qu'elle est mesurable du couple  $(u, \omega)$  !

Nous avons  $|k(iu, \omega)| = M_0 n_0(h_0(u, \omega))$ , et par conséquent, en intégrant par rapport à la loi  $\bar{\mu}_0(z, \cdot)$  et un utilisant la concavité de  $n_0$

$$f|k(iu, \cdot)|\bar{\mu}_0(z, du) \leq M_0 n_0(h_0(\omega)), \text{ où } h_0(\omega) = f h_0(u, \omega) \bar{\mu}_0(z, du)$$

et  $h_0$  est positive d'intégrale  $\leq 1$ . Faisant la même chose en 1, on obtient pour  $z=s$

$$|T_s f| = |k_s| \leq M_0^{1-s} M_1^s n_0^{1-x}(h_0) n_1^x(h_1)$$

Posons  $h = \frac{1}{2}(h_0 + h_1)$ , positive et d'intégrale  $\leq 1$  ;  $n_0$  et  $n_1$  étant concaves, nous avons

$$n_0^{1-x}(h_0) n_1^x(h_1) \leq n_0^{1-x}(2h) n_1^x(2h) \leq 2^{1-x} 2^x n_0^{1-x}(h) n_1^x(h)$$

et donc  $\|T_s f\|_{n_s} \leq 2M_0^{1-x} M_1^x$ . Le théorème est établi.

REMARQUE. Lorsque  $T_z = T$ , un opérateur fixe, les conditions au bord sur  $T$  entraînent que  $T$  est continu de  $\Lambda_{m_0+m_1}$  dans  $\Lambda_{n_0+n_1}$ , donc a fortiori dans  $L^1$ . En effet, si l'on a

$$|g| \leq \lambda(m_0(h) + m_1(h)) \quad (h \text{ positive d'intégrale } \leq 1)$$

et si  $A = \{m_0 \circ h \geq n_1 \circ h\}$ ,  $B = A^c$ , on a  $|gI_A| \leq 2\lambda m_0(h)$ ,  $|gI_B| \leq 2\lambda m_1(h)$ , donc  $|T(gI_A)| \leq 2\lambda M_0 n_0(h')$ ,  $|T(gI_B)| \leq 2\lambda M_1 n_1(h')$ , et comme ci-dessus

$$|Tg| \leq 4\lambda(M_0 + M_1)(n_0(h') + n_1(h')) \text{ avec } h' = \frac{1}{2}(h_0' + h_1')$$

Donc en fait l'hypothèse 2) sur  $T$  est automatiquement satisfaite dans ce cas.