DOMINIQUE BAKRY

Une remarque sur les semi-martingales à deux indices

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 671-672

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__671_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1979/80

UNE REMARQUE SUR LES SEMIMARTINGALES A DEUX INDICES

par D. Bakry

Considérons un espace probabilisé complet $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$, muni de deux filtrations $(\underline{\underline{F}}_s^1)$ et $(\underline{\underline{F}}_t^2)$ satisfaisant à la relation de commutation de Cairoli et Walsh. Il est naturel de dire qu'un processus à deux indices (X_{st}) est une <u>semimartingale</u> si l'intégrale stochastique des processus prévisibles élémentaires se prolonge en une mesure aléatoire sur la tribu prévisible, à valeurs dans l'espace L^0. On connaît jusqu'à maintenant trois modèles de semimartingales à deux indices :

- Les processus à variation finie.
- Les martingales de carré intégrable.
- Un modèle mixte, étudié par Wong et Zakai [1], qui est du type

$$X_{st}=E[A_t|\underline{\underline{F}}_s^1] \quad (= E[A_t|\underline{\underline{F}}_{st}]) \tag{1}$$

où (A_t) est un processus à variation finie adapté à la filtration $(\underline{\underline{F}}_t^2)$, et satisfaisant à des conditions très restrictives : les mesures $dA_t(\omega)$ sont absolument continues par rapport à une mesure déterministe $\mu(dt)$, avec des densités $Y_t(\omega)$ satisfaisant à $\int Y_t^2(\omega)\mu(dt)P(d\omega)<\infty$.

P.A. Meyer nous a demandé si nous pouvions affaiblir ces conditions. Nous allons répondre partiellement à sa question en donnant <u>un exemple de processus croissant</u> (A_t) , <u>de variation totale égale à</u> 1 <u>p.s.</u>, <u>et tel que le processus</u> (X_{st}) <u>ne soit pas une semimartingale à deux indices</u>.

CONSTRUCTION DU CONTRE-EXEMPLE

Nous prenons comme ensemble d'indices, non pas $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$, mais $[0,1]\times[0,1]$. Nous aurons aussi $\Omega=]0,1]$, avec sa tribu borélienne $\underline{\underline{F}}$ (cette tribu ne sera pas complétée, mais la complétion ne changerait rien aux calculs), et la filtration discrète $(\underline{\underline{F}}^p)$ constituée par les tribus <u>dyadiques</u> (nous précisons les notations plus loin). Pour construire notre première filtration $(\underline{\underline{F}}_s^1)$, nous choisissons une suite (s_p) telle que $s_0=0$, $s_p\uparrow\uparrow 1$, et nous posons

$$\underline{\underline{F}}_s^1 = \underline{\underline{F}}^p \quad \text{pour } s\in[s_p,s_{p+1}[$$

La seconde filtration sera tout simplement $\underline{\underline{F}}_t^2=\underline{\underline{F}}$; les processus prévisibles à deux indices sont donc les processus prévisibles en s dépendant mesurablement de t. Enfin, la loi P sur Ω sera la loi uniforme. La relation de commutation est trivialement satisfaite.

Le processus croissant que nous considérerons sera

$$A_t(\omega) = I_{\{t \geq \omega\}}$$

et nous allons vérifier que X_{st} donné par (1) n'est pas une semimartingale. Comme ce processus est à variation finie sur $[0,u]\times[0,1]$ pour tout $u<1$, nous ne prendrons pas la peine de vérifier que nos processus prévisibles (qui seront pour commencer nuls hors d'un tel rectangle) sont "élémentaires" , bien qu'ils le soient en fait.

La tribu $\underline{\underline{F}}^p$ admet pour atomes les intervalles $H_i^p =]i2^{-p},(i+1)2^{-p}]$, pour $0 \leq i < 2^p$; lorsqu'on passe de $\underline{\underline{F}}^p$ à $\underline{\underline{F}}^{p+1}$, chaque atome H_i^p se subdivise en les deux atomes H_{2i}^{p+1} et H_{2i+1}^{p+1} . Nous emploierons la notation $c_p(\omega)$ pour désigner l'indice i tel que $\omega \in H_i^p$; le processus (c_p) est markovien par rapport à $(\underline{\underline{F}}^p)$, avec $P\{c_{p+1}=2i \,|\, c_p=i\}=P\{c_{p+1}=2i+1 \,|\, c_p=i\}=1/2$.

Puisque la mesure $dA_t(\omega)$ est une masse unité au point ω, la mesure $d_t E[A_t \,|\, \underline{\underline{F}}^p]$ est une loi uniforme sur l'atome de $\underline{\underline{F}}^p$ qui contient ω . D'une manière générale, nous désignerons par $\lambda_i^p(dt)$ la répartition uniforme sur H_i^p , et nous pouvons écrire ce que vaut $dX_{st}(\omega)$, considérée comme mesure sur le carré $[0,1[\times[0,1]$:

$$d_{st}X_{st}(\omega) = \sum_p \sum_{ij} \dot{I}_{\{c_p(\omega)=i,\, c_{p+1}(\omega)=j\}} \varepsilon_{s_{p+1}}(ds) \otimes (\lambda_j^{p+1}(dt) - \lambda_i^p(dt))$$

(pour chaque ω, cette somme est en fait réduite à un terme). Considérons le processus prévisible $f_p(s,t,\omega)$ qui est nul si $s \neq s_{p+1}$, et qui si $s=s_{p+1}$ vaut $2I_{H^{p+1}_{2c_p(\omega)}}(t)$. La variable aléatoire

$$M_p = \int f_p(s,t,\omega)\, dX_{st}(\omega)$$

vaut 1 si $c_{p+1}(\omega)=2c_p(\omega)$, -1 si $c_{p+1}(\omega)=2c_p(\omega)+1$.

Considérons maintenant les processus prévisibles élémentaires positifs, bornés par 2 , $g_n = \sum_{p \leq n} f_p$; ils tendent en croissant vers un processus prévisible borné. D'autre part

$$\int g_n(s,t)\, dX_{st} = M_1 + \ldots + M_n$$

et nous avons ici les sommes partielles d'un jeu de pile ou face : elles ne convergent pas en probabilité lorsque $n \to \infty$, et X ne peut donc être une semimartingale.

[1]. Wong (E.) et Zakai (M.). Weak martingales and stochastic integrals in the plane. Ann. Prob. 4, 1976, p. 570-586.

Institut de Recherche Mathématique Avancée
7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg-Cedex

(Laboratoire Associé au CNRS)