SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

J. AUERHAN
DOMINIQUE LÉPINGLE

Les filtrations de certaines martingales du mouvement brownien dans $\mathbf{R}^n$ (II)

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 643-668
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__643_0>

LES FILTRATIONS DE CERTAINES MARTINGALES DU MOUVEMENT BROWNIEN DANS R^n . II

-=-=-=-

J. AUERHAN & D. LEPINGLE

INTRODUCTION.

Comme le lecteur assidu des Séminaires de Probabilité l'aura compris au vu du titre, nous avons voulu donner une suite au travail de M. YOR paru sous le même chapeau dans le Séminaire XIII (6). Notre étude concerne le même objet : les filtrations naturelles des martingales M^A, où A est une matrice n x n à coefficients réels, où

$$M^A = \int_0^{\cdot} (AX_s, dX_s),$$

X étant un mouvement brownien de dimension n. YOR n'a traité essentiellement que le cas A symétrique, qui est suffisant pour caractériser les filtrations des formes quadratiques browniennes.

Pour notre part, nous allons envisager le cas général en résolvant d'abord le cas où A est une matrice normale, et même un peu mieux : dans ce cas, conformément à la conjecture énoncée à la fin de l'article de YOR, la filtration de M^A est celle d'un mouvement brownien dont la dimension se calcule de façon relativement compliquée par rapport aux caractéristiques de A. Si la technique, largement inspirée par celle de (6), est claire, le résultat demeure pourtant un peu mystérieux.

Dans le cas tout à fait général, nous ne savons pas conclure et nous sommes tout juste capables d'obtenir une minoration probablement assez grossière de la multiplicité de la filtration ; faute de majoration, nous n'avons aucune idée précise de la vraie valeur de cette multiplicité.

Une quatrième partie est consacrée à l'étude de la même question dans le cadre complexe ; les résultats obtenus sont du même type, mais avec leurs particularités.

Par rapport à l'article (6), nous avons introduit la petite complication qui consiste à situer l'étude dans un espace hilbertien séparable plutôt que dans l'espace R^n : c'est un peu une coquetterie (pourquoi faire simple quand on peut faire compliqué ?), mais en fait cela nous a incités à abandonner le langage des matrices, des lignes et des colonnes, pour celui, mieux adapté, des opérateurs linéaires ; nous mettons aussi mieux en relief la propriété d'isotropie du mouvement brownien.

A cela près, les notations seront les mêmes que celles de (6), mais pour éviter au lecteur des reports fréquents, nous rappelons dans la première partie les définitions et résultats de (6) qui seront utilisés dans la suite.

I. RAPPELS ET PRELIMINAIRES.

1.1. *Equivalence de processus.*

On se donne un espace de probabilité complet (Ω , F , P) muni d'une filtration $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_t)$ vérifiant les conditions habituelles. Une sous-filtration de $\mathfrak{F}$ est une filtration $\mathfrak{G} = (\mathfrak{G}_t)$ également (F,P)-complète et continue à droite, vérifiant $\mathfrak{G}_t \subset \mathfrak{F}_t$ pourtout $t \geqslant 0$, ce qu'on notera $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{F}$.

La filtration naturelle d'une suite finie ou infinie de processus réels (Z_i) définis sur $(\Omega, F , \mathfrak{F} , P)$ est la plus petite sous-filtration de $\mathfrak{F}$ rendant encore adaptés les processus (Z_i). Elle est notée $\mathfrak{F}((Z_i))$.

Si (Z_i) et (Y_j) sont deux suites de processus sur $(\Omega , F , \mathfrak{F}, P)$, on dit que (Z_i) domine (Y_j) ou que (Y_j) est dominée par (Z_i) si $\mathfrak{F}((Y_j)) \subset \mathfrak{F}((Z_i))$. Si (Z_i) domine (Y_j) et (Y_j) domine (Z_i), les suites (Z_i) et (Y_j) ont même filtration naturelle et on dit alors qu'elles sont équivalentes.

Très fréquemment, nous emploierons ces définitions pour des suites de processus réduites à un seul élément. C'est le cas notamment dans les deux résultats fondamentaux suivants (6).

(1.1) Soient M et N deux martingales locales continues telles que M domine N. Alors M domine également $<M, N>$, et si $d<M,N> \ll dt$ p.s., alors M domine de plus $\frac{d<M,N>}{dt}$.

(1.2) Si B est un mouvement brownien $(B_1,\ldots,B_p)$ à valeurs dans $R^p (1 \leqslant p < \infty)$, alors $|B| = \sqrt{B_1^2 + \ldots + B_p^2}$ est équivalent au mouvement brownien réel $\int \frac{\sum_{i=1}^{p} B_i \, dB_i}{|B|}$. Ce dernier processus sera dit associé à $|B|$.

1.2. Les martingales M^A.

Donnons-nous de plus un espace hilbertien réel séparable H, dont on note n la dimension $(1 \leqslant n \leqslant +\infty)$ et $(.,.)$ le produit scalaire. Soit γ_s la probabilité cylindrique de Gauss de paramètre s sur H. On sait (2) qu'il existe une fonction aléatoire

$$X : R_+ \times H \to L^2(\Omega, F, P)$$

appelée mouvement brownien cylindrique, telle que

$$X(0, h) = 0 \qquad \text{pour tout } h \in H,$$

et telle que pour toute suite finie $o < t_1 < t_2 \ldots < t_m$, les accroissements

$$X(t_i) - X(t_{i-1}) : H \to L^2(\Omega, F, P)$$

soient indépendants et suivant la loi cylindrique $\gamma_{\sqrt{t_i - t_{i-1}}}$.

Nous choisirons une version de cette fonction aléatoire telle que pour tout $h \in H$, le processus X(h) soit un mouvement brownien réel à trajectoires continues et adapté à la filtration $\mathfrak{F}$.

Si n est fini, la donnée de X est celle d'un mouvement brownien ordinaire à valeurs dans R^n, tandis que si n est infini, on peut construire et représenter X à partir d'une suite dénombrable de mouvements browniens réels indépendants.

Soit maintenant A un élément de l'espace $\mathcal{L}_2(H)$ des opérateurs de Hilbert-Schmidt. Il existe (5) un processus noté AX, à valeurs dans H, tel que $X(s, \tilde{A}(h)) = (AX(s), h)$ p.s. pour $s \in R_+$, $h \in H$, où $\tilde{A}$ est le transposé de A. On notera $|AX|$ le processus positif $(AX, AX)^{1/2}$ et on remarquera que

$$E(|AX|^2(s)) = s \, \|A\|^2_{\mathcal{L}_2(H)}$$

En particulier, si P désigne la projection sur un sous-espace de dimension m de H, PX est un mouvement brownien à valeurs dans ce sous-espace.

Si B est un élément de l'espace $\mathcal{L}_1(H)$ des opérateurs nucléaires, on vérifie aisément que lorsque B_1 et B_2 sont dans $\mathcal{L}_2(H)$ avec $B = B_1 B_2$, alors le processus $(B_2 X, \tilde{B}_1 X)$ ne dépend que de B, et on le note (BX, X) par un petit abus de notation.

L'espace $\mathcal{M}^2_f$ des martingales réelles, nulles en zéro, de carré intégrable pour tout t fini, est muni de la topologie de Fréchet définie par la famille des semi-normes $(E[M_t^2])^{1/2}$. Le cône $\mathcal{G}^1_f$ des processus Z positifs, intégrables pour tout t, nuls en zéro, est muni de la topologie analogue définie par la famille des semi-normes $E(Z_t)$. Par <u>sous-espace stable</u>, nous désignerons une partie fermée de $\mathcal{M}^2_f$ stable par l'intégration stochastique des processus prévisibles bornés.

Nous pouvons maintenant définir la martingale M^A. Pour $A \in \mathcal{L}_2(H)$, on note M^A l'unique élément du sous-espace stable de $\mathcal{M}^2_f$ engendré par les browniens réels $X(h)$ pour $h \in H$ tel que

$$\langle M^A, X(h)\rangle_t = \int_0^t (AX(s),h)ds \qquad \text{pour tout } h \in H$$

On pourrait encore, comme en (6), utiliser pour M^A la notation $\int (AX,dX)$, dont le sens est clair dans le cas fini.

Il est immédiat de constater que

$$\langle M^A\rangle_t = \int_0^t |AX|^2(s)\, ds.$$

Un peu de calcul permet de montrer la formule d'Itô suivante : si B est un opérateur nucléaire,

$$(BX, X)_t = M_t^{B+\tilde{B}} + t \text{ trace } B.$$

Les deux propriétés fondamentales suivantes en résultent.

(1.3) Si $A \in \mathcal{L}_2(H)$, M^A domine $|AX|$.

(1.4) Si $B \in \mathcal{L}_1(H)$, (BX, X) et $M^{B+\tilde{B}}$ sont équivalents.

2. EQUIVALENCE DE FILTRATIONS.

Soient donc X un mouvement brownien cylindrique sur l'espace hilbertien réel séparable H de dimension n, et A un opérateur de Hilbert-Schmidt $\neq 0$ sur H ; nous allons étudier la filtration naturelle de M^A, que nous noterons $\mathfrak{F}^A$, en cherchant à montrer qu'elle coïncide avec celle d'une suite de $K(1 \leq K \leq +\infty)$ mouvements browniens réels indépendants, ce que nous traduirons en disant que $\mathfrak{F}^A$ est la filtration d'un mouvement brownien de dimension K (y compris par abus de langage lorsque $K = +\infty$). La propriété de représentation prévisible du mouvement brownien entraîne qu'une même filtration ne peut être engendrée simultanément par un brownien de dimension K et un autre de dimension $K' \neq K$; cette valeur pourra donc être appelée la <u>caractéristique</u> de A, nous la noterons $\rho(A)$, si elle existe.

Le cas des opérateurs symétriques va d'abord retenir notre attention dans le résultat suivant.

<u>LEMME FONDAMENTAL</u>.

a) *Si* $S \in \mathcal{L}_1(H)$ *est symétrique, alors* (SX, X) *domine* (S^pX, X) *pour tout* $p \geq 1$.

b) *Si* B *et* C *sont deux opérateurs symétriques tels que* $B \in \mathcal{L}_2(H)$ *et* $BC = CB \in \mathcal{L}_1(H)$, *la suite des processus* $((B^pC\,X, X)\ ,\ p \geq 1)$ *domine la suite* $((C_i\,X\ ,\ X))$, *où* $C_i = P_i\,C$, P_i *désignant la projection sur le sous-espace propre* H_i *de* B , *et ceci pour tous les* H_i *correspondant à une valeur propre non nulle de* B.

<u>DEMONSTRATION</u>.

a) Soit $p \geq 1$ et supposons que (SX, X) domine (S^pX,X). D'après (1.4), ces processus sont équivalents respectivement à M^S et M^{S^p}. D'après (1.1), M^S domine

$$\frac{d}{dt}\langle M^S\ ,\ M^{S^p}\rangle = (SX,\ S^p\,X) = (S^{p+1}X,\ X)$$

b) Notons (λ_i, H_i) où $i = 1,\dots k$ et $1 \leqslant k \leqslant +\infty$ la suite des valeurs propres différentes de zéro et des sous-espaces correspondants de B, avec une numérotation telle que

$$|\lambda_i| \leqslant |\lambda_j| \quad \text{pour } i \geqslant j\ ,$$

ce qui est possible puisque B est de Hilbert-Schmidt. Des hypothèses faites sur B il résulte que dans l'espace $\mathcal{L}_2(H)$

$$B = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \quad P_i$$

et par conséquent, dans l'espace vectoriel $\mathcal{G}_f^1 - \mathcal{G}_f^1$,

$$(B^p\ C\ X\ ,\ X) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^p\ (C_i\ X\ ,\ X).$$

En supposant $B \neq 0$, nous avons par exemple pour tout $p \geqslant 1$

$$(C_1X,X) = \frac{(B^{2p}C\ X,\ X)}{\lambda_1^{2p}} - \sum_{i>1} \frac{\lambda_i^{2p}}{\lambda_1^{2p}}\ (C_i\ X,\ X)$$

$$= \frac{(B^{2p-1}\ CX,\ X)}{\lambda_1^{2p-1}} - \sum_{i>1} \frac{\lambda_i^{2p-1}}{\lambda_1^{2p-1}}\ (C_i\ X,\ X)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{((B+\lambda_1 I)B^{2p-1}CX,X)}{\lambda_1^{2p}} - \sum_{i>1} \frac{(\lambda_i+\lambda_1)\lambda_i^{2p-1}}{\lambda_1^{2p-1}}\ (C_i,\ X,\ X)\right]$$

Si $\lambda_2 = -\lambda_1$, il n'y a pas de terme $(C_2X,\ X)$ dans la somme qui figure dans le dernier membre, et par conséquent dans tous les cas, lorsque p tend vers l'infini, cette somme converge vers zéro dans $\mathcal{G}_f^1 - \mathcal{G}_f^1$, d'où

$$(C_1X,\ X) = \frac{1}{2}\ \lim_{p\to\infty} \frac{((B + \lambda_1 I)\ B^{2p-1}CX,\ X)}{\lambda_1^{2p}} \qquad \text{dans } \mathcal{G}_f^1 - \mathcal{G}_f^1 \quad .$$

Plus généralement, on vérifie de façon analogue que pour tout $i = 1,\dots,k$,

$$(C_i X, X) = \frac{1}{2} \lim_{p\to\infty} \frac{((B+\lambda_i I)B^{2p-1}CX, X) - \sum_{j=1}^{i-1} (\lambda_j+\lambda_i)\,\lambda_j^{2p-1}((C_j X, X)}{\lambda_i^{2p}}$$

et cela prouve que chaque $(C_i X, X)$ est dominé par la suite $((B^p CX, X),\ p \geq 1)$.

Nous allons en déduire pour commencer deux résultats qui figuraient déjà dans (6). Le premier règle le cas des opérateurs symétriques, le second est au contraire très général.

<u>THEOREME 1</u>. *Si* A *est symétrique,* $\mathcal{F}^A$ *est la filtration d'un mouvement brownien de dimension* $\rho(A)$ *égale au nombre* r *de valeurs propres distinctes non nulles de* A.

<u>DEMONSTRATION</u>.

On sait (1.3) que M^A domine $(A^2X, X) = |AX|^2$. Si M^A domine (A^pAX, X), alors (1.1)M^A domine

$$(A^pAX, AX) = (A^{p+1}AX, X),$$

donc le b) du lemme permet de conclure que M^A domine les processus

$$(P_j AX, X) = \mu_j\, |P_jX|^2,$$

où P_j est la projection sur le sous-espace propre (de dimension finie) de A correspondant à la valeur propre $\mu_j \neq 0$; d'après (1.2), chacun des processus $|P_j X|$ est équivalent au mouvement brownien réel associé

$$Y_j = \int \frac{dM^{P_j}}{|P_jX|}$$

Inversement, dans $\mathcal{M}^2_f$,

$$M^A = \sum_{j=1}^{r} M^{P_jA} = \sum_{j=1}^{r} \mu_j\, M^{P_j},$$

et chaque M^{P_j} est équivalente à $|P_jX|$ (1.4), ou encore à Y_j.

THEOREME 2. Si q $(1 \leq q \leq n)$ *est le nombre de valeurs propres distinctes non nulles de* $\tilde{A}A$, $\mathcal{G}^A$ *est la filtration engendrée par un mouvement brownien de dimension* q *et un mouvement brownien réel.*

DEMONSTRATION.

Puisque (1.3) M^A domine $|AX|^2 = (\tilde{A}AX, X)$, d'après le a) du lemme M^A domine $((\tilde{A}A)^p X, X)$ pour tout $p \geq 1$; d'après le b), M^A domine les processus

$$(P_i X, X) = |P_i X|^2 \ , \ i = 1,\dots,q,$$

P_i étant la projection sur le sous-espace propre H_i de $\tilde{A}A$ correspondant à la valeur propre λ_i strictement positive. Mais chaque $|P_i X|$ est équivalent au mouvement brownien réel associé

$$Y_i = \int \frac{dM^{P_i}}{|P_i X|} \ ,$$

et ces browniens sont indépendants puisque les P_i sont des projecteurs orthogonaux.

Posons de plus

$$Y_A = \int \frac{dM^A}{|AX|}$$

Comme $\{|AX| = 0\}$ est p.s. de mesure de Lebesgue nulle, Y_A est un mouvement brownien réel, évidemment dominé par M^A. Ainsi, M^A domine $(Y_i, \ i = 1,\dots,q \ ; \ Y_A)$.

Inversement, comme

$$|AX|^2 = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \ |P_i X|^2$$

et $$M^A = \int |AX| \ dY_A \ ,$$

il est clair que M^A est dominée par $(Y_i, \ i = 1,\dots,q \ ; \ Y_A)$.

On peut se demander si le dernier brownien Y_A n'est pas inutile, c'est-à-dire si Y_A n'est pas déjà dans la filtration $\mathcal{F}((Y_i), i = 1,\dots,q)$. Nous allons voir qu'il n'en est rien en général.

<u>Proposition 1. Avec les notations de la démonstration précédente, le brownien</u> Y_A <u>est adapté à la filtration</u> $\mathcal{F}((Y_i),\ i = 1,\dots q)$ <u>si et seulement si</u> A <u>est symétrique à valeurs propres non opposées</u>.

<u>DEMONSTRATION</u>.

Remarquons pour commencer que Y_A est adapté à la filtration $\mathcal{G} = \mathcal{F}((Y_i), i=1,\dots,q)$ si et seulement si M^A y est elle-même adaptée. Si la condition de l'énoncé est satisfaite, A et $\tilde{A}A$ ont mêmes espaces propres correspondant à des valeurs propres non nulles, et le théorème 1 nous montre que M^A est adaptée à $\mathcal{G}$.

Inversement, supposons que M^A soit adaptée à $\mathcal{G}$. Pour tout $i \in \{1,\dots q\}$, choisissons h_o de norme 1 et orthogonal à H_i et notons $X_o = X(h_o)$. Puisque M^A et M^{P_i} sont $\mathcal{G}$-adaptés, il en est de même de $(AX,\ P_iX)$, qui est donc également adapté à la filtration plus grosse $\mathcal{G}'$ engendrée par $(|X_o|\ ;\ X(h),\ h \perp h_o)$. Si P est la projection sur h_o, alors

$$(AX,\ P_iX) = (AP\ X,\ P_iX) + (A(I-P)X,\ P_iX).$$

Le dernier terme ne dépend que des X(h) pour $h \perp h_o$, il est donc $\mathcal{G}'$-adapté. Ainsi, $(APX,\ P_iX)$ est $\mathcal{G}'$-adapté. Mais pour tout $h \in H$,

$$(APX,\ h) = X(P\ \tilde{A}(h)) = X_o\ (A(h_o),\ h)$$

et par conséquent

$$(APX,\ P_iX) = X_o(A(h_o),\ P_iX) = X_o\ X(P_iA(h_o)).$$

Le produit de ces deux mouvements browniens dont l'un est $\mathcal{G}'$-adapté mais pas l'autre ne peut être $\mathcal{G}'$-adapté que si $X(P_iA(h_o)) = 0$, ce qui entraîne $P_iA(h_o) = 0$, c'est-à-dire en fait $P_iA\ (I-P_i) = 0$.

Si maintenant nous choisissons h_o de norme un dans H_i, la décomposition

$$(AX,P_iX) = (AP\ X,\ P_iX) + (A(I-P)X,\ P\ X) + (A(I-P)X,\ P_i(I-P)X)$$

montre par le même argument que précédemment que

$$P_iA\ (h_o) + (I - P)\tilde{A}\ (h_o) = 0,$$

autrement dit pour tout h dans H_i orthogonal à h_o,

$$(A(h_o),h) + (A(h),\ h_o) = 0.$$

Si l'on pose

$$D_i = \frac{1}{2}\ (P_i\ A + \tilde{A}\ P_i),$$

il résulte de la première relation trouvée que D_i est nul sur le supplémentaire orthogonal de H_i, tandis que

$$(D_i(h),\ k) = 0 \qquad \text{si } h \in H_i \text{ et } k \perp h.$$

Ainsi, pour tout $h \in H_i$, $D_i(h)$ est colinéaire à h.

Nécessairement D_i est de la forme $\mu_i P_i$. Considérons alors la martingale

$$M = M^A - \sum_{i=1}^{q} \mu_i\ M^{P_i}$$

Elle est $\mathcal{G}$-adaptée et pour tout i = 1,...q,

$$\langle M,\ Y_i\rangle = \int \frac{1}{|P_i X|}\ d\langle M, M^{P_i}\rangle$$

$$= \int \frac{1}{|P_i X|}\ ((AX,\ P_i X) - \mu_i |P_i X|^2)\ ds$$

$$= 0.$$

Comme $(Y_i\ ;\ i = 1,\ldots q)$ possède la propriété de représentation prévisible pour $\mathcal{G}$, il en résulte que M = 0, donc $M^A = \sum_{i=1}^{q} \mu_i\ M^{P_i}$, ce qui entraîne $A = \sum_{i=1}^{q} \mu_i\ P_i$.

Nous allons maintenant faire une hypothèse sur l'opérateur A afin de faire apparaître de nouveaux mouvements browniens réels.

HYPOTHESE (C). Soient H_0 l'espace image de $\tilde{A}A$ et P_0 la projection sur H_0. On dit que A vérifie l'hypothèse (C) si $P_0 A$ et $\tilde{A}A$ commutent.

THEOREME 3. *Supposons vérifiée l'hypothèse* (C) *et notons* $S = \frac{1}{2}(P_0 A + \tilde{A} P_0)$. *Pour chaque sous-espace propre* H_i *de* $\tilde{A}A$ *correspondant à une valeur propre non nulle, on note* m_i *le nombre de valeurs propres distinctes de la restriction de* S *à* H_i. *Alors* $\mathcal{F}^A$ *est engendrée par un mouvement brownien de dimension* $s = \sum_{i=1}^{q} m_i$ *et un mouvement brownien réel.*

DEMONSTRATION.

Montrons que M^A domine $((\tilde{A}A)^p SX, X)$ pour tout $p \geqslant 1$. Pour $p = 1$, M^A domine $M^{\tilde{A}A}$ d'après (1.3) et (1.4), donc aussi $(AX, \tilde{A}AX)$ d'après (1.1). Mais

$$\begin{aligned}(AX, \tilde{A}AX) &= (\tilde{A}AAX, X)\\ &= (\tilde{A}A\, P_o AX, X)\\ &= \frac{1}{2}\left[(\tilde{A}AP_o\, AX, X) + (\tilde{A}P_o\, \tilde{A}AX, X)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\, \tilde{A}A(P_o A + \tilde{A}P_o)X, X)\,\right]\\ &= (\tilde{A}ASX, X).\end{aligned}$$

Si M^A domine $((\tilde{A}A)^p SX, X)$, alors M^A domine $M^{(\tilde{A}A)^p S}$ et $M^{\tilde{A}A}$, donc aussi

$$((\tilde{A}A)^p SX, \tilde{A}AX) = ((\tilde{A}A)^{p+1} SX, X),$$

ce qui établit par récurrence le résultat désiré. Il résulte alors de la partie b) du lemme fondamental que M^A domine les processus $(S_i X, X)$, où $S_i = P_i S$. Si P_i^j désigne la projection sur un sous-espace propre de S_i correspondant à une valeur propre non nulle, en utilisant à nouveau le lemme on vérifie que M^A domine les $|P_i^j X|^2$. On a déjà vu dans le théorème 2 que M^A domine les $|P_i X|^2$, donc en fait M^A domine tous les $|P_i^j X|^2$ en comptant dans les P_i^j toutes les projections sur les différents sous-espaces propres de la restriction de S à H_i, y compris éventuellement pour la valeur propre nulle. Comme dans le théorème 2, M^A domine encorele brownien réel Y_A.

Inversement, dans $\mathfrak{F}_f^1$,

$$|AX|^2 = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \sum_{j=1}^{m_i} |P_i^j X|^2$$

est dominé par les processus $|P_i^j X|$, donc

$$M^A = \int |AX| \;\; dY_A$$

est adaptée à la filtration engendrée par les $|P_i^j X|$ et Y_A.

On peut encore se poser la question de l'adaptation du brownien Y_A à la filtration engendrée par les $|P_i^j X|$. La réponse est donnée par le résultat suivant.

Proposition 2. Supposons vérifiée l'hypothèse (C). Alors, le brownien réel Y_A n'est adapté à la filtration $\mathcal{F}((|P_i^j X|) ; i = 1,\dots q ; j = 1,\dots,m_i)$ que si A est normal.

DEMONSTRATION.

Posons $\mathcal{G} = \mathcal{F}((|P_i^j X|) ; i = 1,\dots q ; j = 1,\dots,m_i)$.

La suite des mouvements browniens réels

$$Y_i^j = \int \frac{dM^{P_i^j}}{|P_i^j X|}$$

a la propriété de représentation prévisible, et si M^A est adaptée à $\mathcal{G}$,

$$M^A = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{m_i} \int \frac{d\langle M^A , M^{P_i^j}\rangle}{ds} \frac{dY_i^j}{|P_i^j X|}$$

$$= \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{m_i} \int (AX, P_i^j X) \frac{dM^{P_i^j}}{|P_i^j X|^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{m_i} (P_o AX, P_i^j X) \frac{dM^{P_i^j}}{|P_i^j X|^2}$$

Il en résulte que

$$|AX|^2 = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{(P_o AX, P_i^j X)^2}{|P_i^j X|^2}$$

$$\leqslant |P_o AX|^2$$

et par conséquent $A = P_o A$. L'hypothèse (C) entraîne donc que A et $\tilde{A}A$ commutent et c'est une propriété caractéristique des opérateurs normaux.

Nous voyons s'introduire naturellement l'hypothèse de normalité de A. Cette hypothèse va s'avérer extrêmement utile (bien qu'on montrera plus tard que dans la proposition précédente en fait A doit être symétrique et pas seulement normal).

Définition. Nous dirons que A est sous-normal si :

- il vérifie l'hypothèse (C) : $P_o A$ et $\tilde{A}A$ commutent ;
- $P_o A$ est normal.

On peut vérifier que si A est normal, $P_o A = A$, donc A est sous-normal.

Voici maintenant notre réponse à la conjecture de Yor.

THEOREME 4. Si A est sous-normal non symétrique, $\mathcal{G}^A$ est la filtration d'un mouvement brownien de dimension $\rho(A) = s + 1$.

Rappelons que s a été défini au théorème 3.

DEMONSTRATION.

Considérons

$$S = \frac{1}{2}(P_o A + \tilde{A} P_o)$$

$$T = P_o A - S$$

$$U = A - P_o A$$

Puisque M^A domine les processus $(S_i X, X)$, elle domine les martingales M^{S_i}, donc aussi $M^S = \sum_{i=1}^{q} M^{S_i}$ et $M^{T+U} = M^A - M^S$. Comme $P_o A$ est normal, S et T commutent ; de plus T est antisymétrique, donc

$$\begin{aligned}(TX, SX) &= (STX, X) \\ &= (TSX, X) \\ &= -(SX, TX) \\ &= 0,\end{aligned}$$

tandis que

$$
\begin{aligned}
(UX,\ SX) &= (AX,\ SX) - (P_o AX,\ SX) \\
&= (AX,\ (S - P_o S)X) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

car de $AP_o = A$ on déduit facilement que $S = P_o S$. Ainsi,

$$|(T + U)X|^2 = |AX|^2 - |SX|^2$$

est également dominé par les $|P_i^j X|$, donc aussi par M^A d'après la démonstration du théorème 3. Cela entraîne que le mouvement brownien réel

$$Y_{T+U} = \int \frac{dM^{T+U}}{|(T+U)X|}$$

est dominé par M^A. Inversement,

$$M^A = \sum_{i=1}^{q} M^{S_i} + \int |(T+U)X| \; dY_{T+U}$$

est dominée par les $|P_i^j X|$ et Y_{T+U} .

Il reste à montrer que Y_{T+U} est orthogonal aux mouvements browniens (Y_i^j). D'une part, T commute avec $\tilde{A}A$, donc les P_i ; T commute aussi avec S, donc avec les $S_i = P_i S$, donc avec les P_i^j ; comme de surcroît T est antisymétrique, nous avons

$$(TX\ ,\ P_i^j X) = (TP_i^j X,\ P_i^j X) = 0 \text{ pour } i=1,\dots q\ ;\ j=1,\dots,m_i .$$

D'autre part,

$$
\begin{aligned}
(UX,\ P_i^j X) &= ((A - P_o A)X,\ P_i^j X) \\
&= ((A - P_o A)X,\ P_o P_i^j X) \\
&= 0 \qquad \text{pour } i=1,\dots q\ ;\ j=1,\dots,m_i .
\end{aligned}
$$

Il en résulte que

$$< M^{T+U}\ ,\ M^{P_i^j} > = 0$$

et de même

$$< Y_{T+U}\ ,\ Y_i^j > = 0 \qquad \text{pour } i=1,\dots,q\ ;\ j=1,\dots m_i .$$

REMARQUE.

Les opérateurs tels que $A^2 = 0$, déjà signalés dans (6), sont bien des opérateurs sous-normaux : dans ce cas en effet, $\tilde{A}A^2 = 0$, donc $P_o A = 0$.

Exemples.

a) n = 4. Soit (X_1,X_2,X_3,X_4) un mouvement brownien à valeurs dans R^4. Considérons les opérateurs A, B, C de matrices associées

$$A : \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & -b & 0 \end{pmatrix} \qquad B : \begin{pmatrix} c & a & 0 & 0 \\ -a & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & b \\ 0 & 0 & -b & c \end{pmatrix} \qquad C : \begin{pmatrix} c & a & 0 & 0 \\ -a & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & b \\ 0 & 0 & -b & d \end{pmatrix}$$

où a, b, c, d sont réels, $a^2 \neq b^2$, $c \neq d$ et $ab \neq 0$. Ces opérateurs étant normaux les filtrations $\mathcal{G}^A$, $\mathcal{G}^B$ et $\mathcal{G}^C$ sont égales à celle du mouvement brownien dans R^3 défini par

$$Z_1 = \int \frac{X_1 dX_1 + X_2 dX_2}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}}$$

$$Z_2 = \int \frac{X_3 dX_3 + X_4 dX_4}{\sqrt{X_3^2 + X_4^2}}$$

$$Z_3 = \int \frac{a(X_2 dX_1 - X_1\, dX_2) + b(X_4 dX_3 - X_3 dX_4)}{\sqrt{a^2(X_1^2 + X_2^2) + b(X_3^2 + X_4^2)}}$$

b) n = 3. Soient A, B, C de matrices associées

$$A : \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B : \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C : \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ c & c & 0 \end{pmatrix}$$

où $b^2 + c^2 \neq 0$	où $bc \neq 0$	où $b^2 + c^2 \neq 0$
$\rho(A) = 2$	$\rho(B) = 3$	$\rho(C) = 2$

Remarquons que $\rho(A) >$ rang de A et $\rho(B) >$ rang de B.

En fait, on a pour tout A $\rho(A) \leqslant$ rang de A + 1, car nécessairement s $\leqslant$ rang de A.

c) Donnons-nous une suite de (n-1) nombres (a_i) tous différents appartenant à $[-1, +1]$, et soient $(b_i \; ; \; i = 1,\ldots,-1)$ des nombres tels que $a_i^2 + b_i^2 = 1$ pour $i = 1,\ldots,n-1$. Si $H = R^n$, l'opérateur A de matrice associée

$$a_{ii} = a_i \qquad \text{pour } i = 1,\ldots,n-1$$

$$a_{ni} = b_i \qquad \text{pour } i = 1,\ldots,n-1$$

$$a_{ij} = 0 \qquad \text{sinon}$$

est sous-normal et vérifie $\rho(A) = n$. Cependant, d'après le théorème 2, $\mathcal{G}^A$ est engendrée par le couple de browniens réels

$$\left(\int \frac{\sum_{i=1}^{n-1} X_i \, dX_i}{\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i^2\right)^{1/2}} \, , \, \int \frac{dM^A}{\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i^2\right)^{1/2}} \right),$$

non orthogonaux. On aboutit au résultat, un peu paradoxal a priori, que deux browniens réels peuvent engendrer la même filtration que n browniens réels.

3. MULTIPLICITE DES FILTRATIONS.

Nous avons pu définir la caractéristique $\rho(A)$ lorsque A est nous-normal, mais en déhors de ce cas nous ignorons si $\mathcal{G}^A$ est encore la filtration d'un mouvement brownien. A défaut nous allons étudier une notion plus large que celle de caractéristique, qui est celle de multiplicité, et qui présente l'avantage d'être toujours définie.

Rappelons d'après Davis-Varaiya (1) que si $\mathcal{H}$ est un sous-espace stable séparable de $\mathcal{M}_f^2(\mathcal{G}, P)$, la multiplicité de $\mathcal{H}$ est l'unique nombre m $(1 \leqslant m \leqslant +\infty)$ tel qu'il existe des martingales $(M_i \; ; \; i=1,\ldots,m)$ de $\mathcal{H}$ vérifiant

(i) $\mathcal{H}$ est le sous-espace stable engendré par les (M_i) ;

(ii) Pour tous i,j tels que $i \neq j$, M_i et M_j sont orthogonales ;

(iii) Sur la tribu $(\mathfrak{F})$-prévisible, on a la relation

$$d\langle M^1\rangle \otimes dP \gg d\langle M^2\rangle \otimes dP \gg \ldots$$

Bien entendu, pour sous-espace stable nous pouvons prendre $\mathcal{M}^2_f(\mathfrak{F}, P)$ tout entier s'il est séparable (on dira de façon équivalente que $\mathfrak{F}$ est séparable). On parlera alors de la multiplicité de la filtration $\mathfrak{F}$, et on la notera $M(\mathfrak{F})$. Nous aurons besoin du résultat suivant, qui s'établit facilement à partir de (1).

(3.1) Si $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ sont deux sous-espaces stables de $\mathcal{M}^2_f(\mathfrak{F}, P)$ tels que $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}'$, la multiplicité de $\mathcal{L}$ est inférieure ou égale à celle de $\mathcal{L}'$.

De la définition de la multiplicité et de la propriété de représentation prévisible d'un mouvement brownien de dimension k $(1 \leqslant k \leqslant +\infty)$, il résulte que la multiplicité de la filtration $(\mathcal{Y}_k)$ engendrée par ce brownien est $M(\mathcal{Y}_k) = k$.

Revenons comme dans la seconde partie à un espace hilbertien réel séparable H, muni d'un mouvement brownien cylindrique X et soit encore $A \in \mathcal{L}_2(H)$ différent de zéro.

Comme la filtration engendrée par X est séparable, $\mathfrak{F}^A$ l'est également. D'après le théorème 4 et ce que l'on vient de dire pour les filtrations browniennes, si A est sous-normal, $M(\mathfrak{F}^A) = \rho(A)$. Que dire dans le cas général ?

<u>Proposition 3</u>. (i) <u>Si</u> A <u>est quelconque</u>, $M(\mathfrak{F}^A) \geqslant q$, <u>où</u> q <u>désigne comme dans le théorème 2 le nombre de valeurs propres distinctes différentes de zéro de</u> $\tilde{A}A$.

(ii) <u>Si</u> A <u>vérifie l'hypothèse</u> (C), $M(\mathfrak{F}^A) \geqslant s$, <u>où</u> s <u>a le même sens que dans le théorème 3</u>.

<u>DEMONSTRATION</u> :

Dans un cas comme dans l'autre, il existe un mouvement brownien de dimension k (q ou s) adapté à $\mathfrak{F}^A$, donc le sous-espace stable engendré par ce brownien a pour multiplicité k et d'après (3.1), $k \leqslant M(\mathfrak{F}^A)$.

Nous allons tenter d'améliorer légèrement ce résultat en cherchant à savoir si la martingale M^A appartient au sous-espace $\mathcal{L}_q$ engendré par $(Y_i \; ; \; i = 1,\dots,q)$ dans la filtration $\mathfrak{F}^A$. Si ce n'est pas le cas, le sous-espace stable engendré par $(Y_i \; ; \; i = 1,\dots,q \; ; \; Y_A)$ sera de dimension $q + 1$, donc $M(\mathfrak{F}^A) \geqslant q + 1$.

<u>Proposition 4.</u> <u>Une condition nécessaire et suffisante pour que</u> $M^A \in \mathcal{L}_q$ <u>est que l'on ait</u>

- $P_o A = A$
- $P_i A$ <u>proportionnel à</u> P_i <u>pour tout sous-espace propre</u> H_i <u>de dimension</u> > 1.

<u>DEMONSTRATION.</u>

Il est clair que $M^A \in \mathcal{L}_q$ si et seulement si

$$\frac{d}{dt} \langle M^A \rangle_t = \sum_{i=1}^{q} \left(\frac{d}{dt} \langle M^A , Y_i \rangle_t\right)^2$$

soit

$$|AX|^2 = \sum_{i=1}^{q} \frac{(AX, P_i X)^2}{|P_i X|^2}$$

Mais par ailleurs

$$AX = \sum_{i=1}^{q} P_i AX + (I-P_o)AX,$$

donc

$$|AX|^2 = \sum_{i=1}^{q} |P_i AX|^2 + |(I-P_o)AX|^2.$$

Il résulte de l'égalité de ces deux valeurs de $|AX|^2$ que

- $(I-P_o)AX = 0$, donc $A = P_o A$
- pour tout $i = 1,\dots,q$

$$(*) \quad (P_i X, P_i AX)^2 = |P_i X|^2 \; |P_i AX|^2$$

Cette relation est naturellement satisfaite si H_i est de dimension un, c'est-à-dire si la valeur propre λ_i correspondante est simple. Sinon, ($*$) entraîne que les vecteurs aléatoires P_iX et P_iAX, qui prennent leurs valeurs dans H_i, sont colinéaires, ce qui implique que si h et k sont deux éléments orthonormés de H_i, on ait

$$(P_iX,\ h)\ (P_iAX,\ k) = (P_iX,\ k)\ (P_iAX,\ h)$$

soit encore

$$X(h)\ X(\tilde{A}(k)) = X(k)\ X(\tilde{A}(h)).$$

Il existe deux browniens réels X' et X" indépendants de X(h) et de X(k) tels que

$$X(\tilde{A}(h)) = (A(h),h)\ X(h) + (A(k),h)\ X(k) + X'$$

$$X(\tilde{A}(k)) = (A(h),k)\ X(h) + (A(k),k)\ X(k) + X''$$

et par conséquent

$$X(h)\ \left[(A(h),k)\ X(h) + (A(k),k)\ X(k) + X''\right]$$

$$= \quad X(k)\ \left[(A(h),h)\ X(h) + (A(k),h)\ X(k) + X'\right].$$

Mais cela entraîne nécessairement

$$X' = X'' = 0$$

$$(A(h),k) = (A(k),h) = 0$$

$$(A(h),h) = (A(k),k).$$

Ainsi P_iA est proportionnel à P_i.

REMARQUE.

On peut montrer que les conditions del'énoncé entraînent de plus la relation $P_i\ A\ P_i = AP_i$ si $\dim H_i > 1$.

De façon analogue, nous pouvons utiliser les mouvements browniens apparus sousl'hypothèse (C) dans le théorème 3, et voir si M^A appartient au sous-espace stable $\mathcal{L}_s$ engendré dans $\mathcal{G}^A$ par les mouvements browniens (Y_i^j). Le résultat est très simple.

<u>Proposition 5</u>. <u>Sous l'hypothèse</u> (C), <u>une condition nécessaire et suffisante pour que</u> $M^A \in \mathcal{L}_s$ <u>est que</u> A <u>soit symétrique</u>.

<u>DEMONSTRATION</u>.

On doit avoir

$$|AX|^2 = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{(AX,\ P_i^j\ X)^2}{|P_i^j\ X|^2}$$

Cela entraîne tout d'abord que $A = P_o A$, donc en fait A est normal, et sa partie antisymétrique T commute avec les (P_i^j). Comme dans la proposition précédente, si dim $H_i^j > 1$, alors $P_i^j A$ est proportionnel à P_i^j, donc $P_i^j\ T = 0$, tandis que si dim $H_i^j = 1$, $P_i^j T$ est naturellement nul. Ainsi $T = 0$, et cette condition est évidemment suffisante d'après le théorème 1 pour que $M^A \in \mathcal{L}_s$.

Ces deux propositions nous apportent un gain très modéré quant à la connaissance de $M(\mathfrak{F}^A)$.Pourtant, grâce à elles, le lecteur consciencieux pourra à titre d'exercice vérifier par exemple que pour $n = 3$, s'il n'existe pas de projecteur P de dimension deux tel que $PAP = A$, et si A n'est pas sous-normal, alors $M(\mathfrak{F}^A) \geqslant 3$ (étudier successivement les différentes possibilités pour les valeurs propres de $\tilde{A}A$). Nous ne savons rien démontrer d'analogue pour $n > 3$, faute d'avoir suffisamment de $\mathfrak{F}^A$-martingales à notre disposition.

4. <u>LE CAS COMPLEXE</u>.

Donnons-nous cette fois un espace hilbertien séparable complexe H, de dimension n ($1 \leqslant n \leqslant +\infty$), de produit scalaire noté encore (.,.). Munissons-le d'un mouvement brownien cylindrique complexe X ; pour tout $h \in H$, X(h) est un mouvement brownien complexe (de dimension un) normalisé si h est de norme unité. Si A est un opérateur de Hilbert-Schmidt sur H ($A \in \mathcal{L}_2(H)$), on peut encore définir le processus AX, à valeurs dans H, tel que

$$X(s,\ A^*(h)) = (AX(s), h) \qquad \text{pour } s \in R_+,\ h \in H,$$

où A^* est l'adjoint de A. On note encore $|AX|$ le processus $(AX,\ AX)^{1/2}$, mais cette fois

$$E\,(|AX|^2(s)) = 2\ s\|A\|^2_{\mathcal{L}_2(H)}$$

En particulier, si P est la projection sur un sous-espace de H de dimension finie, le processus PX est un mouvement brownien complexe à valeurs dans ce sous-espace.

On définit comme dans la deuxième partie le processus (BX,X) pour $B \in \mathcal{L}_1(H)$, espace des opérateurs nucléaires sur H.

Rappelons (3) qu'une martingale conforme est une martingale complexe de décomposition N + iN', où N et N' sont réelles, <N> = <N'> et <N,N'> = 0. En particulier, les mouvements browniens X(h) et $\overline{X(h)}$ sont des martingales conformes.

L'espace $\mathcal{M}_f^{2,c}$ des martingales conformes M, nulles en zéro, de carré intégrable pour tout t fini, est muni de la topologie définie par les semi-normes $(E\,|M_t|^2)^{1/2}$; un sous-espace stable de $\mathcal{M}_f^{2,c}$ est naturellement une partie fermée de $\mathcal{M}_f^{2,c}$ stable par l'intégration des processus prévisibles bornés.

Si $A \in \mathcal{L}_2(H)$, nous notons encore M^A l'unique élément du sous-espace stable de $\mathcal{M}_f^{2,c}$ engendré par les browniens complexes $\overline{X(h)}$ $(h \in H)$ tel que

$$<M^A , \overline{X}(h)>_t = 2\int_0^t (AX(s), h)\, ds.$$

On pourrait encore noter cette martingale $\int (AX, dX)$. On a cette fois

(4.1) $$< M^A>_t = 2\int_0^t |AX|^2(s)\, ds.$$

Notons

$$N^A = \mathrm{Re}\, M^A$$
$$N'^A = \mathrm{Im}\, M^A.$$

Si S est un opérateur hermitien nucléaire, on peut démontrer la formule d'Ito suivante

(4.2) $$(SX,X)_t = 2N_t^S + 2\, t \,\mathrm{trace}\, S.$$

Laissant de côté les questions de multiplicité, nous nous bornerons à donner un équivalent complexe du théorème 4 sur les opérateurs réels sous-normaux. Contrairement à ce que l'on pourrait croire au premier abord, notre "unité de mesure" dans la caractérisation des filtrations reste le brownien réel, et non le brownien complexe. Cela tient largement à ce que, si P est la projection sur un sous-espace de dimension finie, $|PX|^2$ est encore équivalent à un mouvement brownien réel.

THEOREME 5. *Soit* A *un opérateur de Hilbert-Schmidt non nul tel que, si* P_o *désigne la projection sur l'image de* A^*A , P_oA *soit normal, commute avec* A^*A *et ait ses valeurs propres réparties sur deux axes orthogonaux du plan complexe. Si* m_k *désigne le nombre de valeurs propres distinctes de la restriction de* P_oA *à chaque sous-espace propre* H_k *de* A^*A *correspondant à une valeur propre non nulle, la filtration de* M^A *est celle d'un mouvement brownien de dimension* $\sum_k m_k + 2$ *sauf si* A *est proportionnel à un opérateur hermitien, auquel cas cette dimension est égale au nombre de valeurs propres de* A *distinctes et non nulles, augmenté de un.*

DEMONSTRATION.

Comme on peut à l'évidence multiplier A par un scalaire complexe sans rien changer à la filtration naturelle de M^A, on pourra supposer que les valeurs propres de P_oA sont soit réelles, soit imaginaires pures. D'après (4.1), M^A domine $|AX|^2$, et d'après le lemme fondamental, il en résulte que M^A domine les q processus $|P_kX|$, où les (P_k) désignent les projections sur les sous-espaces propres (H_k) correspondent à des valeurs propres de A^*A non nulles. Joint à (4.2), ceci montre que M^A domine les (N^{P_k}), donc également les $(\langle M^A, N^{P_k}\rangle)$. Les martingales $M^{(I-P_k)A}$ et N^{P_k} sont orthogonales, car la première est dans le sous-espace stable engendré par les $\overline{X}(h)$ $(h \perp H_k)$, tandis que la seconde est indépendante de ces mêmes browniens. Nous avons donc

$$\langle M^A , N^{P_k}\rangle = \langle M^{P_kA} , N^{P_k}\rangle$$

D'après les hypothèses faites sur P_oA, il existe pour tout k = 1,...,q des nombres réels $(\alpha_k^j \ ; \ j = 1,\dots r_k)$, des nombres imaginaires purs $(i\beta_k^j \ ; \ j = r_k+1,\dots r_k+s_k)$, et des projections correspondantes $(P_k^j \ ; \ j = 1,\dots r_k+s_k)$ sur des sous -espaces (H_k^j) mutuellement orthogonaux tels que

$$P_kA = \sum_{j=1}^{r_k} \alpha_k^j P_k^j + i \sum_{j=r_k+1}^{r_k+s_k} \beta_k^j P_k^j$$

On calcule alors que

$$< M^{P_k A}, N^{P_k} >_t = \sum_{j=1}^{r_k} \alpha_k^j < M^{P_k^j}, N^{P_k} >_t + i \sum_{j=r_k+1}^{r_k+s_k} \beta_k^j < M^{P_k^j}, N^{P_k} >_t$$

$$= \sum_{j=1}^{r_k} \alpha_k^j \int_o^t |P_k^j X|^2 \, ds + i \sum_{j=r_k+1}^{r_k+s_k} \beta_k^j \int_o^t |P_k^j X|^2 \, ds.$$

Le lemme fondamental nous permet de voir que M^A domine les divers processus $|P_k^j X|^2$, en y incluant éventuellement le processus

$$|P_k X|^2 - \sum_{j=1}^{r_k+s_k} |P_k^j X|^2,$$

qui, s'il n'est pas nul, est un processus du même type correspondant à la projection sur le noyau de la restriction de $P_k A$ à H_k. A k fixé, on obtient ainsi m_k processus $|P_k^j X|$, où

$$\begin{aligned} m_k &= r_k + s_k && \text{si ce noyau est réduit à 0} \\ &= r_k + s_k + 1 && \text{si ce noyau est de dimension au moins un.} \end{aligned}$$

Considérons maintenant les deux opérateurs hermitiens

$$S_1 = \sum_{k=1}^{q} \sum_{j=1}^{r_k} \alpha_k^j P_k^j$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{q} \sum_{j=r_k+1}^{r_k+s_k} \beta_k^j P_k^j$$

On a alors $P_o A = S_1 + i S_2$, donc

$$M^A = M^{S_1} + i M^{S_2} + M^{(I-P_o)A}$$

$$= N^{S_1} + i N'^{S_1} + i N^{S_2} - N'^{S_2} + N^{(I-P_o)A} + I N'^{(I-P_o)A)}$$

Les $(N^{P^j_k}$; $k = 1,\dots,q$; $j = 1,\dots m_k)$ étant dominées par M^A, il en est de même de leurs sommes N^{S_1} et N^{S_2}. Ainsi, les martingales réelles

$$V = N^{(I-P_o)A} - N'^{S_2}$$

$$W = N'^{S_1} + N'^{(I-P_o)A}$$

sont dominées par M^A. Elles sont orthogonales entre elles et orthogonales aux différentes martingales $(N^{P^j_k})$. De plus,

$$\langle V\rangle_t = \langle N'^{S_2}\rangle_t + \langle N^{(I-P_o)A}\rangle_t$$

$$= \frac{1}{2}(\langle M^{S_2}\rangle_t + \langle M^{(I-P_o)A}\rangle_t$$

$$= \int_o^t (|AX|^2 - |S_1 X|^2)\, ds$$

est dominé par M^A, ainsi que

$$\langle W\rangle_t = \int_o^t (|AX|^2 - |S_2 X|^2)\, ds.$$

Ainsi, si $A \neq S_1$ et $A \neq iS_2$, M^A domine les mouvements browniens orthogonaux

$$Z_1 = \int \frac{dV}{|(A-S_1)X|}$$

$$Z_2 = \int \frac{dW}{|(A-iS_2)X|}$$

Inversement, puisque

$$V = \int |(A-S_1)\ X|\,dZ_1$$

$$W = \int |(A-iS_2)\ X|\,dZ_2$$

$$M^A = N^{S_1} + i\,N^{S_2} + V + iW,$$

et par ailleurs N^{S_1}, N^{S_2}, $|(A-S_1)X|^2$ et $|(A-iS_2)\ X|^2$ sont dominés par les $(|P^j_k\ X|$; $k = 1,\dots,q$; $j = 1,\dots m_k)$, il en résulte aisément que M^A est dominée par le mouvement brownien réel de dimension $\sum_{k=1}^{q} m_k + 2$ donné par

$$\left(Z_1\ ,\ Z_2,\ \int \frac{dN^{P_k^j}}{|P_k^j X|}\ ;\ k = 1,\ldots q\ ;\ j = 1,\ldots,m_k\right).$$

Si A est proportionnel à un opérateur hermitien, posons pour simplifier $A = S_1$; on a $m_k = 1$ ou 2, et chaque P_k^j correspond à la projection sur un sous-espace propre de A correspondant à une valeur propre non nulle. Comme V = 0, M^A a même filtration que

$$\left(Z_2\ ,\ \frac{dN^{P_k^j}}{|P_k^j X|}\ ;\ k = 1,\ldots,q\ ;\ 1 \leqslant j \leqslant m_k\right).$$

Retenons pour clore cette partie que cette valeur qu'on peut encore appeler la "caractéristique" de A ne peut jamais être égale à un, est égale à deux dans le cas simple des projecteurs P sur un sous-espace de dimension finie, mais peut cependant être impaire, ce qui interdit de compter en "nombre de browniens complexes". Par exemple l'opérateur associé à la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ i & i & 0 \end{pmatrix}$$

a pour caractéristique trois.

5. QUELQUES QUESTIONS EN SUSPENS.

Nous avons dit à plusieurs reprises que cette étude n'était pas achevée. Pour ne parler que du cas réel, il reste de vastes zones d'ombre dès que l'on sort du cadre sous-normal. Voici quelques-unes des questions que l'on peut légitimement se poser si A n'est pas sous-normal.

- Existe-t-il une $\mathcal{F}^A$-martingale discontinue ? A priori, cela semble peu raisonnable, mais Lane (4) a montré qu'on peut obtenir simplement des sous-filtrations de la filtration d'un mouvement brownien réel comportant des martingales discontinues.

- A l'inverse, existe-t-il toujours un mouvement brownien de dimension appropriée ayant $\mathcal{F}^A$ pour filtration ? C'est la conjecture de Yor, mais nous n'y croyons guère.

- La multiplicité de $\mathcal{F}^A$ est-elle infinie dans ce cas ?

C'est possible, compte-tenu de la difficulté d'obtenir une base de martingales. Mais à l'opposé on peut tout aussi bien se poser la question suivante.

- La multiplicité de $\mathcal{F}^A$ est-elle majorée par n, dimension du mouvement brownien de départ ?

REFERENCES.

(1) **Davis, M.H.A. et Varaiya, P.** *The multiplicity of an increasing family of σ-fields*. Ann. Proba.2, 958-963, 1974.

(2) **Gaveau, B.** *Intégrale stochastique radonifiante*. C.R.A.S. Paris, 276, 617-620, 1973.

(3) **Getoor, R.K. et Sharpe, M.** *Conformal martingales*. Invent. Math. 16, 271-308, 1972.

(4) **Lane, D.** *On the fields of some brownien martingales*. Ann. Proba. 6, 499-508, 1978.

(5) **Schwartz, L.** *Applications radonifiantes*. Séminaire de l'Ecole Polytechnique, 1969-1970.

(6) **Yor, M.** *Les filtrations de certaines martingales du mouvement brownien dans* R^n. Sém. Proba. XIII, Lect. Notes in Math. 721, Springer 1979.