SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

R. SIDIBÉ

Mesures à accroissements indépendants et P.A.I. non homogènes

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 632-642

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__632_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1979/80

MESURES A ACCROISSEMENTS INDEPENDANTS ET P.A.I. NON HOMOGENES

par R. SIDIBÉ

Dans le volume XIII du séminaire de probabilités, nous avons publié une note prouvant que tout processus à accroissements indépendants (p.a.i.) et homogènes, qui est une martingale locale par rapport à sa famille de tribus naturelle, est une vraie martingale. A la fin de cette note, nous signalons qu'une méthode due à M. Jacod permet de donner une meilleure démonstration de ce résultat (voir p. 136), et en particulier, de traiter le cas d'une filtration quelconque. Dans une thèse de troisième cycle, soutenue à Strasbourg en Mai 1980, nous avons étendu le même résultat aux p.a.i. non homogènes. Dans cette thèse, nous présentions aussi la structure des p.a.i. non homogènes, à partir de la théorie des martingales, d'une manière assez différente de celle de Jacod [1], p. 90-97, et qui possède peut être un certain intérêt pédagogique. Comme d'autre part la structure des p.a.i. non homogènes fait connaître celle des mesures à accroissements indépendants sur tous les espaces mesurables << raisonnables >>, M. P.A. Meyer a suggéré d'extraire de cette thèse la note qui suit.

0. MESURES ALEATOIRES A ACCROISSEMENTS INDEPENDANTS

Soit $(E,\mathcal{E})$ un espace mesuré, et soit $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un espace probabilisé. On appelle mesure aléatoire à accroissements indépendants un processus $(X_A)_{A\in\mathcal{E}}$, à valeurs réelles finies, possédant les propriétés suivantes :

i) Si $A_1,\dots,A_n$ sont des éléments de $\mathcal{E}$ disjoints deux à deux, les v.a. $X_{A_1},\dots,X_{A_n}$ sont indépendantes, et $X_{A_1\cup A_2\dots\cup A_n} = X_{A_1}+X_{A_2}+\dots+X_{A_n}$.

ii) Pour toute suite décroissante (A_n) d'éléments de $\mathcal{E}$, d'intersection vide, X_{A_n} tend vers 0 en probabilité.

Nous n'abordons pas ici le problème de construction d'une mesure aléatoire à accroissements indépendants par prolongement à partir d'une mesure définie sur une algèbre de Boole engendrant $\mathcal{E}$: supposant la mesure construite sur $\mathcal{E}$ tout entier, nous nous proposons de décrire sa structure, sous quelques hypothèses assez anodines concernant la tribu $\mathcal{E}$. La première sera que la tribu est séparable, ce qui entraîne que les atomes de $\mathcal{E}$ sont mesurables. Nous ferons l'hypothèse supplémentaire :

iii) $X_A = 0$ pour tout atome A de $\mathcal{E}$.

Sans cette hypothèse, on ne peut rien faire d'intéressant : par exemple, si $(E,\mathcal{E})$ est un ensemble fini, la notion de mesure à accroissements indépendants se réduit à celle de système fini de v.a. indépendantes, et celles-ci n'ont aucune autre structure particulière.

Sous les hypothèses i), ii), iii), on peut effectivement (Kingman [1]) déterminer la structure de la mesure aléatoire, sous la forme d'une formule de Lévy-Khintchine, dont les divers éléments sont des mesures . Mais les démonstrations de Kingman sont laborieuses, et en voici une beaucoup plus simple, qui couvre tous les cas usuels.

D'après le théorème I.12 de Dellacherie-Meyer [1], si les atomes de $\mathcal{E}$ sont les points de E (ce que l'on peut toujours supposer, quitte à faire un passage au quotient), il existe une application bijective f de E dans l'intervalle [0,1], qui est un isomorphisme de E sur f(E). Autrement dit, les éléments de $\mathcal{E}$ sont exactement les images réciproques par f des boréliens de f(E) ou, ce qui revient au même, des boréliens de [0,1] . Posons alors, pour tout borélien B de [0,1]

$$Y_B = X_{f^{-1}(B)}$$

Il est clair que Y satisfait aux hypothèses i), ii). Si l'on pose $Y_t = Y_{[0,t]}$, on définit donc un p.a.i. usuel (non homogène) sur [0,1]. La condition iii) permet d'affirmer que Y est continu en probabilité sur [0,1].

Nous allons déterminer la structure de Y en nous appuyant sur la théorie des martingales. Il restera ensuite à revenir sur l'espace initial $(E,\mathcal{E})$: ce retour est immédiat si cet espace est lusinien (i.e. si E est un espace polonais, ou plus généralement un sous-ensemble borélien d'un espace polonais muni de la tribu induite), car on peut montrer dans ce cas que f(E) est borélien dans [0,1] (Dellacherie-Meyer, chap. III, théorème 21). Cela couvre tous les cas usuels, et nous ne chercherons pas à en dire davantage sur ce sujet.

1. STRUCTURE DES P.A.I. NON HOMOGENES

Nous désignons par $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un espace probabilisé complet muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$, par (X_t) un processus adapté, nul en 0, tel que :

(1.1) <u>si</u> $s<t$, <u>l'accroissement</u> X_t-X_s <u>est indépendant de</u> $\mathcal{F}_s$

(X est un p.a.i. relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)$) . Nous supposerons de plus que X est <u>continu en probabilité</u>.

Si aucune filtration n'est donnée a priori, on dira que X est un p.a.i. lorsque la condition (1.1) est satisfaite, $\mathcal{F}_s$ étant engendrée par les v.a. X_r, $r\leqq s$ (ou, ce qui revient au même puisque $X_0=0$, par les accroissements X_v-X_u, $u\leqq v\leqq s$). On peut toujours augmenter la tribu $\mathcal{F}_s$ de tous les ensembles négligeables de $\mathcal{F}$, sans perdre (1.1) . Puis remarquons que si $s<u<t$, X_t-X_u est indépendante de $\mathcal{F}_u$, donc aussi de $\mathcal{F}_{s+}\subset\mathcal{F}_u$. Faisant tendre u vers s(1), on voit que X_t-X_s est indépendante de $\mathcal{F}_{s+}$.

On ne perd donc pas de généralité en supposant que <u>la famille</u> $(\mathcal{F}_t)$ <u>satisfait aux conditions habituelles de la théorie des processus</u>.

Maintenant, nous allons prouver que <u>le processus X admet une modification à trajectoires càdlàg.</u> : cette partie de la démonstration est tout à fait classique, et figure dans le livre de Doob [1].

A. Pour $s\leqq t$, nous posons $\varphi_{st}(\lambda) = E[e^{i\lambda(X_t-X_s)}]$, et en particulier $\varphi_t(\lambda)=\varphi_{0t}(\lambda)$. La continuité de X en probabilité entraîne que $\varphi_t(\lambda)$ est fonction continue de t, et $\varphi_0(\lambda) = 1$.

(1.2) $|\varphi_t(\lambda)|$ <u>est borné inférieurement pour</u> $t\in[0,k]$, k <u>fini</u>.

En effet, écrivons que l'application $t\mapsto X_t$ de l'intervalle compact $[0,k]$ dans l'espace métrique L^0 est uniformément continue :

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\eta>0\quad 0\leqq u\leqq v\leqq k\ ,\ v-u\leqq\eta \Rightarrow P\{|X_v-X_u|\geqq\varepsilon\}<\varepsilon$$

En choisissant bien ε, la condition de droite entraînera

$$E[\cos\lambda(X_v-X_u)]\geqq 1/2\ ,\ \text{donc}\ |E[e^{i\lambda(X_v-X_u)}]|\geqq 1/2$$

---

1. Peut être vaut-il la peine de donner les détails ? Soit $A\in\mathcal{F}_{s+}$ et soit $\lambda\in\mathbb{R}$. On a $\int_A e^{i\lambda(X_t-X_u)}dP = P(A)E[e^{i\lambda(X_t-X_u)}]$. D'où le même résultat pour u=s par passage à la limite, et c'est le résultat d'indépendance cherché.

Soit n entier tel que $k/n < \eta$; on a $X_k - X_0 = (X_{1/n} - X_0) + (X_{2/n} - X_{1/n}) + \dots$ donc, en utilisant le résultat précédent et l'indépendance, on a

$$|\varphi_k(\lambda)| = |E[e^{i\lambda X_k}]| \geqq 1/2^n$$

et alors pour $t \leqq k$, comme on a $|\varphi_k(\lambda)| = |\varphi_t(\lambda)|\,|\varphi_{tk}(\lambda)| \leqq |\varphi_t(\lambda)|$, on a aussi $|\varphi_t(\lambda)| \geqq 1/2^n$.

B. Le processus $M_t^\lambda = e^{i\lambda X_t}/\varphi_t(\lambda)$ est une martingale complexe, bornée sur tout intervalle $[0,k]$.

En effet, d'après A ci-dessus la v.a. M_t^λ est bornée pour tout t , et l'on a $M_t^\lambda = M_s^\lambda Z$ pour $s<t$, où la v.a. $Z = e^{i\lambda(X_t - X_s)}/\varphi_{st}(\lambda)$ est telle que $E[Z|\mathcal{F}_s]=1$. On a donc $E[M_t^\lambda|\mathcal{F}_s] = M_s^\lambda$ p.s. .

C. D'après la théorie des martingales, il existe un ensemble négligeable $N\subset\Omega$ tel que, pour tout $\omega\in N^c$, tout λ rationnel :

la fonction $t \mapsto M_t^\lambda(\omega)$ sur l'ensemble Q des rationnels admette une limite à droite en tout point de $[0,\infty[$, une limite à gauche en tout point de $]0,\infty[$.

Comme le dénominateur $\varphi_t(\lambda)$ de M_t^λ est une fonction continue de t, on obtient le même résultat pour les fonctions $t \mapsto e^{i\lambda X_t(\omega)} = M_t^\lambda(\omega)\varphi_\lambda(t)$ pour λ rationnel, puis par convergence uniforme pour tout λ réel.

Nous sommes ramenés à établir le lemme suivant :

<u>Soit</u> (x_n) <u>une suite de nombres réels</u>. <u>Si</u> $e^{i\lambda x_n}$ <u>a une limite pour tout</u> λ, <u>la suite</u> (x_n) <u>a une limite finie dans</u> $\mathbb{R}$.

Soit $\hat{\mathbb{R}}$ le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{R}$. Il est clair que la suite (x_n) ne peut avoir dans $\hat{\mathbb{R}}$ deux valeurs d'adhérence finies a et b distinctes (prendre λ tel que $e^{i\lambda a} \neq e^{i\lambda b}$). Il suffit donc d'exclure la possibilité d'une valeur d'adhérence infinie . Quitte à remplacer (x_n) par une suite extraite, il suffit d'exclure la possibilité d'une <u>limite</u> infinie.

Posons $f(\lambda) = \lim_n e^{i\lambda x_n}$; f est une fonction borélienne bornée de λ, et l'on a pour toute fonction intégrable $g(\lambda)$

$$\int f(\lambda)g(\lambda)d\lambda = \lim_n \int e^{i\lambda x_n} g(\lambda)d\lambda = \lim_n \hat{g}(x_n) = 0$$

d'après le lemme de Riemann-Lebesgue. Donc f est nulle p.p., ce qui est absurde, car $|f|=1$ partout. ▯

D. Posons pour $\omega \in N$ $Y_t(\omega)=0$ pour tout t, et pour $t \in N^c$ $Y_t(\omega)=X_{t+}(\omega)$ pour tout t. Le processus Y est adapté (N appartient à $\mathcal{F}_0$ d'après les conditions habituelles). Comme X est continu en probabilité, Y est une modification càdlàg. de X. Désormais, nous écrirons à nouveau X au lieu de Y

Nous pouvons maintenant parler des sauts du processus X. Si B est un borélien de $\mathbb{R}$ non adhérent à 0, nous poserons

$$
(1.3)\qquad
\begin{aligned}
N_t^B &= \Sigma_{u \leqq t} 1_{\{\Delta X_u \in B\}} \\
Y_t^B &= \Sigma_{u \leqq t} \Delta X_u 1_{\{\Delta X_u \in B\}} \\
Z_t^B &= X_t - Y_t^B
\end{aligned}
$$

Si $B =]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$, nous écrirons simplement N_t, Y_t, Z_t. Il est immédiat de vérifier que ces processus sont des p.a.i. (non homogènes) : en effet, si $s<t$, les v.a. N_t^B, Y_t^B, Z_t^B sont mesurables par rapport à la tribu engendrée par les accroissements de X entre s et t : $\sigma(X_u - X_v\ ,\ s \leqq u < v \leqq t)$, tribu indépendante de $\mathcal{F}_s$.

Le théorème suivant s'appliquera en particulier à Y^B ou N^B, et Z^B

THEOREME 1.1. <u>Soient</u> Y <u>et</u> Z <u>deux p.a.i.[1] relativement à la même filtration</u> $(\mathcal{F}_t)$. <u>On suppose que</u>

1) <u>Les trajectoires de</u> Y <u>sont à variation finie</u>.

2) Y <u>et</u> Z <u>ne sautent jamais en même temps</u>.

<u>Alors</u> Y <u>et</u> Z <u>sont indépendants</u>.

<u>Démonstration</u>. Soient u et v deux nombres réels. Considérons les deux martingales de carré intégrable (complexes)

$$M_t^u = e^{iuY_t}/E[e^{iuY_t}] \qquad N_t^v = e^{ivZ_t}/E[e^{ivZ_t}]$$

(on a vérifié plus haut que les dénominateurs ne sont pas nuls). Si nous pouvons montrer que ces deux martingales sont orthogonales, nous aurons

$$\frac{E[e^{iuY_t + ivZ_t}]}{E[e^{iuY_t}]E[e^{ivZ_t}]} = E[M_0^u N_0^v] = 1$$

ce qui prouve que les v.a. Y_t et Z_t sont indépendantes. Mais alors le p.a.i.h. à deux dimensions (Y_t,Z_t) et le p.a.i.h. produit de deux copies

1. A trajectoires càdlàg., et continus en probabilité.

indépendantes de Y et Z ont mêmes lois d'accroissements, ils ont donc même loi, et on voit que <u>les tribus</u> $\sigma(Y_s, s\geqq 0)$, $\sigma(Z_s, s\geqq 0)$ <u>sont indépendantes</u> .

Pour montrer que M^u et N^v sont orthogonales, il nous suffit de montrer que $[M^u,N^v] = 0$. Or ces martingales n'ont pas de saut commun. Il nous suffit donc de montrer que M^u est à variation finie. Ce n'est pas tout à fait évident, mais voici une raison : le processus $1/E[e^{iuY_t}] = M_t^u e^{-iuY_t}$ est déterministe, et d'autre part c'est un produit de semimartingales, donc une semimartingale, et cela entraîne qu'il est à variation finie. Il en résulte que les trajectoires de M^u sont à variation finie.

Voici l'étape principale de la démonstration, qui nous a été expliquée par M. J. Bretagnolle. Elle montre que si l'on enlève les sauts du processus X dont la valeur absolue dépasse une constante M , il reste un p.a.i. auquel va s'appliquer la théorie des martingales <u>de carré intégrable</u>.

THEOREME 1.2 . <u>Soit</u> X <u>un p.a.i.</u> <u>dont les sauts sont bornés en valeur absolue par une constante</u> M . <u>Alors les v.a.</u> X_t <u>ont des moments de tous les ordres</u>.

DEMONSTRATION. A. Pour tout t, posons

$$T_t^a = \inf\{ s>t : |X_t-X_s|>M+a\} \qquad (a>0) \tag{1.4}$$

Nous ne disposons pas d'une bonne propriété de Markov forte : notre premier but est d'établir l'<u>existence</u>, <u>pour tout</u> k <u>fixé</u>, <u>d'une constante</u> $\lambda<1$ <u>telle que l'on ait</u> , <u>pour tout temps d'arrêt</u> $S\leqq k$

$$E[e^{-(T_S^a-S)}|\mathcal{F}_S] \leq \lambda \text{ p.s. } . \tag{1.5}$$

Il suffit d'établir cela pour S <u>étagé</u> . En effet, tout temps d'arrêt S est limite d'une suite décroissante (S_n) de temps d'arrêt $S_n\leqq k$ étagés, et l'on a $|X_{T_S^a} -X_S| \geqq M+a$ sur $\{T_S^a < \infty \}$, donc $|X_{T_S^a}-X_{S_n}|>M+a/2$ pour n assez grand, et $T_S^a-S \geqq \limsup_n T_{S_n}^{a/2}-S_n$. D'où il résulte aisément, grâce au lemme de Fatou, que la constante λ relative à $a/2$ et aux temps d'arrêt étagés convient à a et aux temps d'arrêt quelconques.

Mais pour établir (1.5) pour S étagé, il suffit de démontrer que pour tout t fixé appartenant à $[0,k]$, on a

$$(1.6) \qquad E[e^{-(T_t^a-t)}|\mathcal{F}_t] \leqq \lambda \quad \text{p.s.}\ .$$

et cette espérance conditionnelle est en fait une espérance ordinaire, puisque X est un p.a.i. .

Supposons que (1.6) n'ait pas lieu : il existe des $t_n \in [0,k]$ et un $a>0$ tels que $\lim_n E[e^{-(T_{t_n}^a-t_n)}] = 1$. Il en résulte que les v.a. $T_{t_n}^a-t_n$ tendent vers 0 en probabilité. Extrayant une sous-suite, on peut supposer que $T_{t_n}^a-t_n \to 0$ p.s. . D'autre part, la suite (t_n) a au moins une valeur d'adhérence $t\in[0,k]$, et celle-ci est, soit valeur d'adhérence à droite, soit valeur d'adhérence à gauche, soit les deux à la fois. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer la suite (t_n) <u>monotone</u>.

La suite (t_n) ne peut être décroissante : en effet, si elle l'était, on aurait pour tout $\varepsilon>0$ $t_n\in[t,t+\varepsilon[$, $T_{t_n}^a \in[t,t+\varepsilon[$, et l'inégalité $|X_{T_{t_n}^a}-X_{t_n}| \geqq M+a$ sur $\{T_{t_n}^a<\infty\}$ serait incompatible avec l'existence d'une limite à droite en t . En particulier, la suite (t_n) ne peut être stationnaire, et quitte à faire une nouvelle extraction on peut la supposer strictement croissante.

L'existence d'une limite à gauche au point t entraîne alors, de la même manière que ci-dessus, que l'on a p.s. $t_n<t\leqq T_{t_n}^a$ pour n assez grand. Mais alors, $|X_{T_{t_n}^a}-X_{t_n}|$ tend vers $|\Delta X_t|$ lorsque $n\to\infty$, et le saut en t dépasse M en valeur absolue, ce qui est absurde. Ainsi la propriété (1.6) est établie.

B. Nous fixons maintenant $a>0$ et nous posons

$$T_0=0 \quad , \quad T_{n+1}= T_{T_n}^a$$

Alors un raisonnement simple de récurrence nous donne, à partir de (1.6)

$$(1.7) \qquad E[e^{-T_n} 1_{\{T_n\leqq k\}}] \leqq \lambda^n$$

On en déduit que $P\{T_n\leqq k\}\leqq e^k\lambda^n$. Pour fixer les idées, prenons $a=1$. Les sauts de X étant bornés par M, on a sur $\{T_{n-1}\leqq t<T_n\}$

$$|X_t| \leqq |X_{T_1-}|+|X_{T_1}-X_{T_1-}|+|X_{T_2-}-X_{T_1}|+|X_{T_2}-X_{T_2-}|+\dots+|X_{T_{n-1}}-X_{T_{n-1}-}|+ |X_t-X_{T_{n-1}}| \leqq n(1+M)$$

donc aussi $t<T_n \Rightarrow |X_t|<n(1+M)$, et en posant comme d'habitude $X_k^* = \sup_{t\leq k} |X_t|$, on a

$$P\{X_k^*>n(1+M)\} \leq P\{T_n<k\} \leq e^k\lambda^{-n}$$

Cette suite étant à décroissance exponentielle en n , on voit que X_k^* a des moments de tous les ordres . Comme k est arbitraire, le théorème est établi.

Première conséquence du théorème 1.2 . Revenons à la décomposition $X_t=Y_t+Z_t$ de la formule (1.3), avec le choix particulier de B indiqué. Les sauts de Z étant bornés par 1 en valeur absolue, les v.a. Z_t , $t\leq k$, forment un ensemble borné dans L^2, donc uniformément intégrable. La fonction $t\mapsto E[Z_t]$ (que nous noterons m_t) est donc continue, puisque Z est continu en probabilité. Ecrivant $X_t = Y_t + (Z_t-m_t) + m_t$, le premier terme est à variation finie, le second est une martingale de carré intégrable, et on voit que X est une semimartingale si et seulement si le processus déterministe (m_t) est une semimartingale, autrement dit, si la fonction continue m_t est à variation finie.

Seconde conséquence du théorème 1.2 . Pour tout borélien B non adhérent à 0, pour tout t , la v.a. N_t^B de la formule (1.3) est intégrable. Il est clair que $B\mapsto E[N_t^B]$ est une fonction croissante et continue de t, et une mesure en B pour t fixé. Il existe donc une mesure $\Lambda(dt,dx)$ sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^*$, telle que l'on ait

$$E[N_t^B] = \Lambda([0,t]\times B)$$

Cette mesure ne charge pas $\{0\}\times\mathbb{R}^*$. Il n'y a pas de difficulté à vérifier la propriété suivante (cf. Dellacherie-Meyer, VIII.68)

Si X est une semimartingale, la mesure de Lévy ν de X est donnée par

(1.8) $$\nu(\omega, ds, dx) = \Lambda(ds, dx)$$

Même si X n'est pas une semimartingale, il existe un p.a.i. $X'_t=X_t-m_t$ qui est une semimartingale, et la fonction m_t étant continue, les mesures aléatoires associées aux sauts de X et de X' sont les mêmes. On peut donc considérer ν aussi comme la mesure de Lévy de X (et c'est d'ailleurs le point de vue classique sur la question, antérieur à la théorie des semimartingales).

Revenons au processus N_t^B : nous savons que la fonction $m_t^B=E[N_t^B]$ est continue croissante, et le processus $Q_t^B=N_t^B-m_t^B$ est une martingale à sauts unité. Un théorème dû à S. Watanabe affirme qu'une telle martingale est un <u>processus de Poisson non homogène</u> (peut se ramener à un processus de Poisson homogène par un changement de temps <u>déterministe</u>). D'autre part, si des boréliens B_i sont disjoints, les processus $N_t^{B_i}$ sont indépendants d'après le théorème 1.1. Il en résulte sans peine que la mesure aléatoire $\mu(\omega,ds, dx)$ qui compte les sauts de X d'amplitude comprise entre x et $x+dx$ est une mesure aléatoire de Poisson sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^*$, de paramètre (i.e. d'espérance) $\Lambda(ds,dx)$. La somme des sauts de X d'amplitude $\geqq 1$ peut s'écrire

$$Y_t(\omega) = \int_{\substack{]0,t]\times]-\infty,-1] \\ \cup \\ ]0,t]\times[1,\infty[}} x\mu(\omega, ds, dx)$$

On étudie ensuite la structure du processus (Z_t). Retranchant son espérance m_t (fonction déterministe continue), on a une martingale de carré intégrable, dont la partie purement discontinue (somme compensée de sauts) est donnée par

$$Z_t^d(\omega) = \int_{]0,t]\times(]-1,1[\setminus\{0\})} x(\mu(\omega,ds,dt)-\Lambda(ds,dt))$$

Reste enfin la partie martingale continue : un théorème de Paul Lévy, dont une démonstration très simple au moyen de la théorie des martingales est due à Kunita-Watanabe, affirme que c'est un <u>mouvement brownien non homogène</u> (se ramenant au mouvement brownien par un changement de temps déterministe).

Ainsi, les théorèmes 1.1 et 1.2 permettent de décrire complètement les p.a.i. non homogènes au moyen de la théorie des martingales, et, du même coup, les mesures aléatoires à accroissements indépendants sur des espaces très généraux.

REMARQUE. Supposons que le processus X provienne d'une mesure aléatoire à accroissements indépendants, comme on l'a expliqué au début de ce paragraphe. Alors X s'écrit $X'+m$, où X' est une semimartingale, et m est une fonction continue déterministe. La possibilité de définir l'intégrale stochastique en probabilité $\int I_A(s)dX'_s$ pour une partie borélienne A de $\mathbb{R}_+$ (déterministe) entraîne par différence la possibilité de définir $\int I_A(s)dm_s$, ce qui entraîne que m est <u>à variation bornée</u>. Donc X est en fait une semimartingale.

2. UNE APPLICATION

Le résultat suivant améliore celui que nous avons publié dans le volume XIII du séminaire. Nous désignons toujours par X un p.a.i. (non nécessairement homogène) continu en probabilité, et nous conservons les autres notations du paragraphe 1. Nous supposons que X est une semimartingale.

THEOREME 2.1. X <u>est une semimartingale spéciale si et seulement si</u> $E[|X_t|]$ <u>est fini pour tout</u> t .

DEMONSTRATION. Nous revenons à la décomposition (1.3) , $X=Y+Z$, où Y est la somme des sauts de X dépassant 1 en valeur absolue. Il est clair que Z ne pose aucun problème (th. 1.2) , et que X est une semi-martingale spéciale si et seulement si Y en est une. Or dire que Y est une semimartingale spéciale revient à dire que le processus croissant

$$(2.1)\qquad A_t = \Sigma_{s\leq t} |\Delta Y_s| = \Sigma_{s\leq t} |\Delta X_s| I_{\{|\Delta X_s|\geq 1\}}$$

est localement intégrable (Dellacherie-Meyer, VII. 25). Or les processus croissants $\Sigma_{s\leq t} |\Delta Y_s| I_{\{|\Delta Y_s|<n\}}$ sont intégrables, et admettent comme compensateurs prévisibles les processus croissants <u>déterministes</u>

$$\widetilde{A}^n_t = \Lambda([0,t]\times(]-n,-1]\cup[1,n[)\ )$$

Dire que A_t est localement intégrable revient à dire que les $\widetilde{A}^n_t$ ont p.s. une limite finie. Comme ils sont déterministes, cela revient à dire que $E[\widetilde{A}^n_t]$ a une limite finie, ou encore, que $E[A_t]<\infty$. Alors $E[|X_t|]$ est finie.

Inversement, si $E[|X_t|]$ est finie, le processus $X_t-E[X_t]$ est une martingale, donc une semimartingale spéciale, et le processus $E[X_t]$ une semimartingale déterministe, donc aussi une semimartingale spéciale.

REFERENCES

C. DELLACHERIE et P.A. MEYER . [1]. Probabilités et Potentiel . Hermann, Paris 1975, Actualités Sci. et Ind. 1372 , et 1980, A.S.I. 1385 .

J.L. DOOB. [1]. Stochastic Processes. Wiley, New York 1953.

J. JACOD. [1]. Calcul stochastique et problèmes de martingales. Lecture Notes in M. n° 714, Springer, Heidelberg 1979.

J.F.C. KINGMAN. [1]. Completely random measures. Pacific J. Math. 21, 1967.

Ph. MORANDO. [1]. Mesures Aléatoires. Sém. Prob. Strasbourg, vol. I, 1969, Lecture Notes in M. n) 88, Springer, Heidelberg 1969.

H. KUNITA et S. WATANABE. [1] . On square integrable martingales. Nagoya Math. J., 30, 1967, p. 209-245.

S. WATANABE. [1]. On discontinuous additive functionals and Lévy measures of a Markov process. Japanese J. Math. 36, 1964, p. 53-70.

M. YOR. [1]. Sur les intégrales stochastiques optionnelles et une suite remarquable de formules exponentielles. Sém. Prob. X, 1976, p. 501-504, Lecture Notes in M. n°511, Springer-Verlag 1976.

La méthode utilisée dans ce travail pour ramener les mesures à accroissements indépendants aux p.a.i. ordinaires est due à J. WALSH (cf. Sém. Prob. V , p. 181)..

Institut de Recherche Mathématique Avancée
L.A. au CNRS
rue du Général Zimmer
F-67084 Strasbourg-Cedex.