MHAMED ITMI

Processus ponctuels marqués stochastiques. Représentation des martingales et filtration naturelle quasicontinue à gauche

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 618-626
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__618_0>

PROCESSUS PONCTUELS MARQUES STOCHASTIQUES.
REPRESENTATION DES MARTINGALES ET FILTRATION
NATURELLE QUASI-CONTINUE A GAUCHE.

ITMI Mhamed
Université de Hte-Normandie
Laboratoire de Mathématiques
BP. 67 - 76 130 Mt-St-Aignan.

0 - Introduction :

Il ressort du présent éxposé deux résultats liés par la quasi-continuité à gauche (q-càg) de la filtration naturelle du processus ponctuel marqué stochastique (PPMS) :

i) Une condition nécessaire et suffisante pour la q-càg (situation fréquente dans les applications : c'est, par exemple, le cas des processus ponctuels stochastiques (PPS) admettant une intensité), suivie d'une classification des temps d'arrêt pour une filtration pas forcément q-càg.

ii) Une caractérisation de la filtration naturelle du PPMS, dans le cas où elle est q-càg, en tant que seule filtration q-càg permettant la "représentation des martingales" comme intég--rales stochastiques. En effet, on sait que pour la filtration naturelle du PPMS, les "martingales locales jusqu'à T_∞" s'écrivent comme intégrales stochastiques par rapport au "compensé" du PPMS, mais on ne sait rien de la réciproque.

I - Généralités et notations :

Soit $(\Omega,\mathcal{F})$ un espace mesurable; $(E,\mathcal{E})$ un espace polonais muni de ses boréliens, ou bien fini ou dénombrable muni de la tribu de ses parties.

Un processus ponctuel marqué (PPM) est la donnée d'une suite $(T_n,Z_n)_{n\geq 1}$ telle que :

- (T_n) est un processus ponctuel (dont le processus de comptage associé sera noté N_t), c'est à dire : une suite de variables aléa--toires (v.a.) strictement positives, telles que : $T_n<T_{n+1}$ quand $T_n<\infty$. On rappelle que : $N_t=\sum_{n\geq 1} 1_{\{T_n\leq t\}}$,
- (Z_n) est une suite de v.a. de Ω dans $E\cup\{\Delta\}$, Δ étant un point exterieur à E qui facilite les calculs; Z_n prenant la valeur Δ lorsque $T_n=\infty$.

On pose : $T_o=0$, $T_\infty=\lim T_n$ et $Z_o=\delta$ constante de E.
$\tilde{E}=]0,\infty[\times E$, $\tilde{\xi}=\beta(]0,\infty[)\otimes\xi$

Le PPM (T_n,Z_n) est complétement déterminé par la mesure aléatoire μ positive et discréte, de (Ω,F) sur $(\tilde{E},\tilde{\xi})$, définie par :

$$(\forall\ B \in \tilde{\xi}) : \mu(\omega,B)=\sum_{n\geq 1} 1_B(T_n(\omega),Z_n(\omega))1_{\{T_n(\omega)<\infty\}}$$

$(\forall\ C \in \tilde{\xi})$, soit $N_t^C=\mu(\cdot;]0,t]\times C)$. On a en particulier $N_t=N_t^E$. N_t^C est un processus de comptage "dénombrant les points T_n dont la marque est dans C".

On désignera par filtration naturelle du PPM, la filtration $(G_t^\circ)_{t\geq 0}$ définie par $G_t^\circ=(N_s^C\ ;\ C \in \xi, s\leq t)$. On pose $G_{0-}^\circ=G_0^\circ$ (pour l'usage des prévisibles) et $G_\infty^\circ=\bigvee_t G_t^\circ$.

Soit P une probabilité sur (Ω,F). Le PPM est alors dit PPM stochastique (PPMS). Pour travailler dans les "conditions habituelles", on va devoir compléter la filtration (G_t°) qui devient (G_t) où G_t est la tribu engendrée par G_t° et tous les négligeables de G_∞° .

II - Q-càg de la filtration naturelle :

Voici à présent quelques résultats utiles pour la suite :

Proposition 1 : [I]

a) Les familles (G_t°) et (G_t) sont càd (continues à droite).

b) Pour tout $n\geq 0$ T_n est un G_t°-temps d'arrêt (et donc un G_t-t.a.)

c) Pour tout G_t°-t.a. T, on a : $G_T^\circ=(N_{T\wedge t}^C\ ;\ C \in \xi,\ t\geq 0)$ avec en particulier :

$G_{T_n}^\circ=(T_i,Z_i\ ;\ i\leq n)\ ;\ G_{T_\infty}^\circ=G_{T_\infty-}^\circ=G_\infty^\circ=G_{\infty-}^\circ$.

Proposition 2 : [II]

Soit T un G_t-t.a. prévisible. Il existe alors un G_t°-t.a. prévi--sible T' tel que T=T' ps. De plus :

$G_{T-}=\{A \in G_\infty\ /\ (\ A' \in G_{T'-}^\circ)$ tel que $P(A\Delta A')=0\}$.

On introduit à présent ce que représente la situation de q-càg d'une filtration (F_t) vérifiant les conditions habituelles.

Définition 3 :

On dit que (F_t) est q-càg si l'on a $F_T=F_{T-}$ pour tout F_t-t.a. prévisible T.

Théorème 4 : [II]

Supposons (F_t) q-càg. Alors :

a) Tout F_t-t.a. accessible est prévisible (c'est aussi une condition suffisante pour la q-càg).

b) Pour toute suite croissante (S_n) de temps d'arrêt, on a en posant $S=\lim S_n$: $F_S=\bigvee_n F_{S_n}$.

c) Les martingales càd sont q-càg (ie : $M_S=M_{S-}$ pour tout F_t-t.a. prévisible S) et ont leurs sauts totalement inaccessibles.

Dans la suite, pour tout $n\geq 1$ on designera par T_{An} (resp. T_{In}) la partie accessible de T_n (resp. totalement inac--cessible de T_n). Pour ces notions voir [II]. A présent on peut énoncer le résultat i) de l'introduction :

Théorème 5 :

La filtration (G_t) est q-càg si et seulement si pour tout $n\geq 1$ on a : T_{An} est un G_t-t.a. prévisible et Z_n est une v.a. $G_{T_{An}^-}$ --mesurable.

Démonstration :

a) Condition nécessaire : On suppose (G_t) q-càg, alors les G_t-t.a. accessibles sont prévisibles par le théorème 4. En par--ticulier T_{An} est prévisible. D'autre part, par la proposition 1, c) on a Z_n est G_{T_n} -mesurable, mais $G_{T_n}\subset G_{T_{An}} = G_{T_{An}^-}$. D'où le résultat.

b) Condition suffisante : Soit S un G_t-t.a. prévisible. Mont--rons que $G_S=G_{S-}$.

Par la proposition 2 on a :

$\exists$ T G_t°-t.a. prévisible tel que T=S ps, et par conséquent $G_T=G_S$ et $G_{T-}=G_{S-}$. En montrant que $G_T^\circ\subset G_{T-}$ le théorème sera établi.

Par la proposition 1, c) on a : $G_T^\circ= (N_{T\wedge t}^C ;\ C\in\xi,\ t\geq 0)$.

Montrons que $(\forall t\geq 0)(\forall C\in\xi)$: $N_{T\wedge t}^C$ est G_{T-}-mesurable. Pour celà il suffit de montrer que $(\forall n\geq 1)$: $\{T\wedge t\geq T_n\}\{Z_n\in C\}\in G_{T-}$ de part l'écriture de $N_{T\wedge t}^C$.

$$\begin{aligned}\{T\wedge t\geq T_n\}\{Z_n\in C\}&=\{T\wedge t>T_n\}\{Z_n\in C\}+\{T\wedge t=T_n\}\{Z_n\in C\}\\ &= \qquad A_1 \qquad + \qquad A_2\end{aligned}$$

$A_1\in G_{T\wedge t-}\subseteq G_{T-}$. Montrons que $A_2\in G_{T-}$.

$$\begin{aligned}A_2&=\{T\wedge t=T_{An}\}\{Z_n\in C\}+\{T\wedge t=T_{In}\}\{Z_n\in C\} \text{ ps}\\ &= \qquad A_3 \qquad + \qquad A_4\end{aligned}$$

$A_3=\{T\wedge t=T_{An\{Z_n\in C\}}\}$; comme Z_n est $G_{T_{An}^-}$-mesurable, $T_{An\{Z_n\in C\}}$ est prévisible (voir [II]) et donc $A_3\in G_{T\wedge t-}\subseteq G_{T-}$.

$T\wedge t$ étant prévisible et T_{In} totalement inaccessible, on a :

$P\{T\wedge t=T_{In}\}=0$ et donc $A_4\in G_{T-}$. CQFD.

On cite à présent un corollaire de ce théorème pour le cas des processus ponctuels stochastiques simples (PPS) :

Corollaire 6 :

La filtration naturelle du PPS (T_n) est q-càg si et seulement si $(\forall n\geq 1)$: T_{An} est prévisible.

Commentaire :

Des exemples simples de la situation de q-càg des PPMS correspondent au cas où le PPS (T_n) est constitué de temps d'arrêt totalement inaccessibles (ou bien que le compensateur de N est continu). En effet, dans ce cas, $T_{An}=\infty$ (pour $n\geq 1$) et $G_{T_{An}^-}=G_{\infty^-}=G_\infty$ par conséquent Z_n est $G_{T_{An}^-}$-mesurable.

C'est en particulier le cas des processus de Poisson pour leur filtration naturelle.

Maintenant qu'on a vu l'influence des parties accessibles des T_n sur la filtration naturelle du PPMS, on va montrer comment elles interviennent dans la classification des temps d'arrêt, la filtration naturelle n'étant pas forcément q-càg. On rappellera tout d'abord quelques propositions.

Soit T un G_t-t.a. On désignera par S(T) la famille des suites croissantes (S_n) de G_t-t.a. telles que $S_n\leq T$ pour tout n. Si $(S_n)\in S(T)$, on posera :

$$K(S_n)=\{\omega/\lim S_n(\omega)=T(\omega)<\infty \ ; \ S_n(\omega)<T(\omega) \text{ pour tout } n\}.$$

Théorème 7 : [III]

a) Un G_t-t.a. T est accessible si et seulement si l'ensemble $\{0<T<\infty\}$ est la réunion d'une suite d'ensembles de la forme $K(S_n)$ où (S_n) est un élément de S(T).

b) Un G_t-t.a. est totalement inaccessible si et seulement si l'on a : $P\{T=0\}=0$ et $P\{K(S_n)\}=0$ pour toute suite (S_n) élément de S(T).

Théorème 8 : [III]

Soit T un G_t-t.a. et A un élément de G_t. Si T est accessible (resp. totalement inaccessible), le G_t-t.a. T_A est également accessible (resp. totalement inaccessible).

Théorème 9 : [I], [V]

Soit T un G_t-t.a. Alors il existe une suite $(R_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ de v.a. réelles positives, G_{T_n}-mesurables pour tout n, telles que : $T\wedge T_{n+1}=(T_n+R_n)\wedge T_{n+1}$ ($T=T_\infty+R_\infty$ quand $n=\infty$) sur $\{T\geq T_n\}$.

Voici à présent la classification des temps d'arrêt :

Théorème 10 :

Soit T un G_t-t.a. On a :

a) T est totalement inaccessible si et seulement si $P\bigcap_{\mathbb{N}^*}\{T_{In}\neq T<\infty\}=0$.

b) T est accessible si et seulement si $P\bigcup_{\mathbb{N}^*}\{T_{In}=T<\infty\}\neq 0$.

Démonstration :

a) Condition nécessaire : Soit T un G_t-t.a. totalement inaccessible. Alors :

$\{T<\infty\}=\bigcup_{\mathbb{N}}\{T<\infty\}\{T_n<T<T_{n+1}\}+\bigcup_{\overline{\mathbb{N}}}\{T<\infty\}\{T=T_n\}+\{T<\infty\}\{T>T_\infty\}$.

Soit $B_n=\{T_n<T<T_{n+1}\}$. Montrons que $P\{B_n\}=0$.

Comme B_n est élément de G_t et T est totalement inaccessible, donc T_{Bn} est totalement inaccessible par le théorème 8 (on a noté T_{B_n} par T_{Bn}).

D'autre part, $\exists R_n$ v.a. réelle positive (strictement sur B_n) G_{T_n}-me-surable, telle que $T=T_n+R_n$ sur B_n. (Théorème 9).

$(\forall i\geq 1)$, soit $S_n^i=\frac{2^i-1}{2^i}R_n$. S_n^i est une variable aléatoire réelle G_{T_n} mesurable et positive (strictement sur B_n). Donc $T_n+S_n^i$ est un G_t t.a. (car plus grand que T_n et G_{T_n}-mesurable. Voir [II]).

Comme $(T_n+S_n^i)_i\in S(T_{Bn})$ et T_{Bn} est totalement inaccessible, on a donc : $P\{K(T_n+S_n^i)\}=0$ par le théorème 7. Mais $B_n\subset K(T_n+S_n^i)$, donc $P\{B_n\}=0$. De la même façon on peut démontrer que $P\{\{T<\infty\}\{T>T_\infty\}\}=0$. On a donc $\{T<\infty\}=\bigcup_{\overline{\mathbb{N}}}\{T<\infty\}\{T=T_n\}$ ps, et on peut supprimer n=0 ou ∞, les T_n correspondant étant prévisibles.

Alors, $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ on a :

$\{T<\infty\}\{T=T_n\}=\{T<\infty\}\{T=T_{An}\}+\{T<\infty\}\{T=T_{In}\}$ ps

$=\{T<\infty\}\{T=T_{In}\}$ ps car Ttotalement inaccessible et T_{An} accessible. (Voir [II]).

Par conséquent $\{T<\infty\}\subset\bigcup_{\mathbb{N}^*}\{T=T_{In}\}$, d'où $P\bigcap_{\mathbb{N}^*}\{T_{In}\neq T<\infty\}=0$. cqfd

Condition suffisante : Soit T un G_t-t.a. tel que $P \bigcup_{\mathbb{N}^*}\{T_{In} \neq T<\infty\}=0$. Alors : $\{T<\infty\} \subset \bigcup_{\mathbb{N}^*}\{T=T_{In}\}$.

Soit T_A la partie accessible de T,

$\{T_A<\infty\} \subset \bigcup_{\mathbb{N}^*}\{T_A=T_{In}<\infty\}$ qui est négligeable, donc T est totalement inaccessible.

b) Condition nécessaire : évidente.

Condition suffisante : Soit T un G_t-t.a. tel que $P \bigcup_{\mathbb{N}^*}\{T_{In}=T<\infty\}=0$. Montrons que T est accessible.

Soit U un G_t-t.a. totalement inaccessible. Il suffit de montrer que $P\{T=U<\infty\}=0$. Or on a par a) :

$\{U<\infty\} \subset \bigcup_{\mathbb{N}^*}\{T_{In}=U\}$, donc :

$$\{T=U<\infty\}= \bigcup_{\mathbb{N}^*}\{T=U<\infty\}\{T_{In}=U\}= \bigcup_{\mathbb{N}^*}\{T=U<\infty\}\{T_{In}=T<\infty\} \text{ ps}$$

L'hypothèse sur T permet de conclure : $P\{T=U<\infty\}=0$. cqfd.

III Représentation des martingales sous la q-càg :

Soit (F_t) une filtration satisfaisant aux conditions habituelles, constituée de sous-tribus de F telles que $(\forall t \geq 0)$ $G_t \subset F_t$. On notera $\mathcal{P}$ la tribu des F_t-prévisibles sur $\Omega\times[0,\infty[$ et $\tilde{\mathcal{P}}=\mathcal{P}\otimes\xi$. On rappelle la définition suivante :

Définition 11 : [V]

Une mesure aléatoire est dite prévisible si pour tout processus H $\tilde{\mathcal{P}}$-mesurable et positif, le processus défini par :

$(\nu H)_t(\omega)=\int_0^t \int_E H(\omega,s,x)\,\nu(\omega;ds,dx)$ est prévisible ($\tilde{\mathcal{P}}$-mesurable).

Soit ν la mesure aléatoire prévisible associée à μ, et $A_t=\nu(]0,t]\times E)$ le compensateur de N_t(voir [V]). Lorsque $F_t=F_0 \vee G_t$, il est démontré dans [V] que toute "martingale locale jusqu'à T_∞" : M_t (ie : processus càd tel qu'il éxiste une suite de t.a. $S_n \uparrow T_\infty$ ps avec $\forall n \geq 0$: $M_{S_n \wedge t}$ est une martingale uniformé-ment intégrable), admet la représentation :

$$M_t=M_0+\int_0^t \int_E H(s,x)(\mu(ds,dx)-\nu(ds,dx)) \quad \text{ps sur } \{t<T_\infty\},$$

le processus H vérifiant : $\int_0^t \int_E |H(s,x)|\,\nu(ds,dx)<\infty$ ps sur $\{t<T_\infty\}$ et est $\tilde{\mathcal{P}}$-mesurable. On se propose de démontrer que dans un cer-

-tain sens celà caractérise (G_t). On commence par faire la convention términologique suivante : On désignera par condition de "représentation des martingales" la situation où toute F_t-martingale bornée s'écrit $M_t=c+\int_0^t\int_E H(s,x)(\mu(ds,dx)-\nu(ds,dx))$ ps, où $c\in\mathbb{R}$, H est $\tilde{\mathcal{P}}$-mesurable (on n'est plus forcément dans le cas $F_t=F_0 \vee G_t$).

Proposition 12 :

On suppose (F_t) q-càg. Alors la suite (T_{An}) de t.a. prévisibles épuise les temps de saut de A, de plus A y saute de 1 ps.

Démonstration :

En effet les sauts de A pouvant être choisis prévisibles [III], on a pour tout t.a. S prévisible : $E(\Delta N_S/F_{S-})=\Delta A_S$ ps.
La q-càg de (F_t) permet d'écrire : $\Delta N_S=\Delta A_S$ ps. cqfd.

Commentaire :

Remarquons à présent que dans la "représentation des martingales", les intégrales stochastiques sont en fait des intégrales de Stieltjes, et les martingales admettant cette représentation sont purement discontinues ([II]). De plus, la filtration étant supposée q-càg fait que les martingales càd sont q-càg et ont leurs sauts totalement inaccessibles, par conséquent elles sautent sur les (T_{In}) par le théorème 10.

Proposition 13 : [IV]

Supposons que toute les F_t-martingales soient purement dis-continues et ne sautent qu'aux instants (T_n) au plus. Alors pour tout F_t-t.a. T on a ((F_t) n'est pas supposée q-càg ici) :

a) $F_T\cap\{T_\infty\le T\}=F_{T_\infty^-}\cap\{T_\infty\le T\}$

$F_T\cap\{T_n\le T<T_{n+1}\}=F_{T_n}\cap\{T_n\le T<T_{n+1}\}$

b) $F_{T_{n+1}^-}=F_{T_n}\vee\sigma(T_{n+1})$.

Proposition 14 :

Les résultats de la proposition précédente restent valables sous l'hypothése de q-càg de (F_t) et de la représentation des martingales.

Démonstration :

En effet, le commentaire ci-dessus fait que les conditions de la proposition 13 sont vérifiées.

Proposition 15 : [IV]

Sous les conditions de la proposition 13, on a :

$[\forall t\geq 0 \ , \ G_t = F_t] \Longleftrightarrow [\forall n\geq 0 \ , \ G_{T_n} = F_{T_n}]$.

(C'est donc vrai sous les conditions de la proposition 14).

Proposition 16 :

Sous les conditions de q-càg de (F_t) et de "représentation des martingales", on a : $\forall t\geq 0 \ , \ G_t = F_t$.

Démonstration :

On utilise la proposition 15 et on fait un raisonnement par récurrence :

a) Il est à remarquer que $F_o = G_o$ par la "représentation des mar--tingales".

b) Cas de T_1 : Soit $B\in F_{T_1}$, montrons que $B\in G_{T_1}$.

On pose $M_s = P(B/F_s)$. On a :

$M_{T_1} = 1_B = c + \int_o^{T_1}\int_E H(d\mu - d\nu)$ H est $\tilde{\mathscr{P}}$-mesurable.

$= c + H(T_1,Z_1)1_{\{T_1<\infty\}} - \int_o^{T_1}\int_E H(s,x)\nu(ds,dx)$.

H étant prévisible, $H(T_1,Z_1)$ est $F_{T_1-}\vee G_{T_1}$ mesurable. En effet, celà est vrai pour les processus élèmentaires $\tilde{\mathscr{P}}$-mesurables, qui s'écrivent $h_t(\omega).\phi(x)$ où h est $\mathscr{P}$-mesurable et ϕ est ξ-mesurable, en remarquant que Z_1 est G_{T_1}-mesurable par la proposition 1 et donc $\phi o Z_1$ est G_{T_1}-mesurable. (h_T est F_{T-}-mesurable).

Mais $F_{T_1-} = F_o \vee\sigma(T_1)$, donc $F_{T_1-}\subset G_{T_1}$ (proposition 1).

D'autre part : H étant $\tilde{\mathscr{P}}$-mesurable, la définition 11 permet de dire que le processus $(\nu H)_t = \int_o^t\int_E Hd\nu$ est prévisible, et donc $(\nu H)_{T_1}$ est F_{T_1-}-mesurable, soit G_{T_1}-mesurable, et $B\in G_{T_1}$. (Remarquons que $F_{T_1-}\subset G_{T_1-}$, mais c'est sans interêt ici).

c) Cas de T_n : On suppose $F_{T_{n-1}} = G_{T_{n-1}}$.

Soit $B\in F_{T_n}$ et $M_s = P(B/F_s)$.

$1_B = c + \int_o^{T_n}\int_E H(d\mu - d\nu)$

$= M_{T_{n-1}} + H(T_n,Z_n)1_{\{T_n<\infty\}} - \int_{T_{n-1}}^{T_n}\int_E Hd\nu$.

$M_{T_{n-1}}$ est $G_{T_{n-1}}$-mesurable par l'hypothèse de récurrence.

$H(T_n,Z_n)$ est $F_{T_n-}\vee G_{T_n}$-mesurable (Comme ci-haut). Mais par la propo-

-sition 13 : $F_{T_n^-} = F_{T_{n-1}} \vee \sigma(T_n)$ (tribu contenue dans $G_{T_n^-}$), donc $H(T_n, Z_n)$ est G_{T_n}-mesurable.

De même que ci-haut, $(\nu H)_{T_n} = \int_0^{T_n} \int_E 1_{]\!]T_{n-1}, T_n]\!]} H d\nu$ est $F_{T_n^-}$-mesurable et donc G_{T_n}-mesurable, et $B \in G_{T_n}$. CQFD.

Remarque finale :

Signalons que dans [IV], les auteurs, en s'interessant à l'éxt-rémalité des martingales locales, démontrent (entre-autre) que sous cértaines conditions, la filtration pour laquelle une martingale locale est éxtrémale, est identique à la filtration naturelle de cette martingale locale, et à celle du PPS formé des sauts de cette martingale locale (supposés totalement inaccessibles). Ce résultat, appliqué au cas du compensé d'un PPS (T_n) dont les parties acces-sibles sont prévisibles, et celui de la proposition 16 permettent d'affirmer de plus que les filtrations naturelles de (T_n) et de (T_{In}) sont alors identiques. Les (T_{An}) ne paraîssent pas, ils ont en fait joué leur rôle pour la condition de q-càg de (G_t).

Réferences :

[I] P. BREMAUD : Point Processes and Queues : Martingale Dynamics. Livre à paraître.

[II] P. A. MEYER, C. DELLACHERIE : Probabilités et Potentiel. Nouvelle édition chez Hermann.

[III] C. DELLACHERIE : Capacités et Processus Stochastiques. Springer Verlag (1972).

[IV] P. A. MEYER, D. LEPINGLE, M. YOR : Extrémalité et remplis-sage de tribus pour certaines martingales purement discon-tinues. Dans ce volume.

[V] J. JACOD : Multivariate Point Processes (1975). Springer Verlag.