SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

DOMINIQUE LÉPINGLE
PAUL-ANDRÉ MEYER
MARC YOR

Extrémalité et remplissage de tribus pour certaines martingales purement discontinues

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 604-617
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__604_0>

Extrémalité et remplissage de tribus pour certaines martingales purement discontinues.

D. Lépingle, P.A. Meyer, M. Yor.

1. Introduction et préliminaires

1.1) Soit $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un espace de probabilité complet, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ continue à droite et $(\mathcal{F},P)$-complète. On suppose donné un processus

$$M : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$$

qui soit une $((\mathcal{F}_t),P)$-martingale locale, continue à droite et nulle en 0. On note $(\mathcal{F}(M)_t)_{t\geq 0}$ la famille de tribus $(\sigma\{M_s, s\leq t\})_{t\geq 0}$ rendue $(\mathcal{F},P)$ complète et continue à droite.

Rappelons tout d'abord un résultat général, énoncé et démontré en ([10], théorème 1.5).

Théorème 1. Les assertions suivantes sont équivalentes

(i) P est un point extrémal de l'ensemble

$$\mathcal{M} = \{Q \text{ probabilité sur } (\Omega,\mathcal{F})/M \text{ est une } ((\mathcal{F}_t),Q)\text{-martingale locale}\}$$

(ii) Toute $((\mathcal{F}_t),P)$-martingale bornée $(L_t)_{t\geq 0}$ peut s'écrire sous la forme

$$L_t = c + \int_0^t h_s \, d\, M_s \qquad (t \geq 0),$$

où $c \in \mathbb{R}$, et h est un processus $(\mathcal{F}_t)$-prévisible convenablement intégrable.

(iii) Même énoncé qu'en (ii), en remplaçant "bornée" par "locale".

Lorsque ces conditions sont réalisées, on dit, en faisant un léger abus de langage, que M est $(\mathcal{F}_t)$-extrémale, et lorsque $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}(M)_t$, on dit simplement que M est extrémale.

La propriété (ii) jouant un rôle important dans de nombreuses questions, divers auteurs ont été amenés à étudier l'existence de critères de $(\mathcal{F}_t)$-extrémalité plus opératoires que (i) ; on rappelle, au paragraphe 1.2), une partie des conditions obtenues.

1.2) Supposons ici M continue, et pour simplifier la discussion $\langle M \rangle_\infty = \infty$ P-p.s. Alors, si

$$\tau_t = \inf\{s / \langle M \rangle_s > t\} \qquad \text{pour } t \geq 0,$$

il existe, d'après un théorème maintenant classique, dû à Dambis et Dubins-Schwarz, un $(\mathcal{F}_{\tau_t})$-mouvement brownien (B_t), égal par définition à (M_{τ_t}), et tel que

$$M_t = B_{<M>_t} \quad \text{pour } t \geq 0.$$

Il a été remarqué par Dubins-Schwarz [6], puis par Jacod-Yor ([10] ;(c),p.108), que si l'une des conditions équivalentes suivantes

$$(\Pi_c) \quad \begin{cases} .\ \mathcal{F}(M)_\infty = \mathcal{F}(B)_\infty \\ .\ \text{pour tout } t,\ <M>_t \text{ est } \mathcal{F}(B)_\infty\text{-mesurable} \\ .\ \text{pour tout } t,\ \tau_t \text{ est } \mathcal{F}(B)_\infty\text{-mesurable} \\ .\ \text{pour tout } t,\ \mathcal{F}(M)_{\tau_t} = \mathcal{F}(B)_t \end{cases}$$

est réalisée (on dit dans ce cas que M est pure), alors M est extrémale. En abrégé : pureté $\Rightarrow$ extrémalité. Mais l'implication inverse est fausse, on en trouve un premier contre-exemple dans [6] et un second, tout à fait différent, dans [14] (voir aussi [12] pour de nombreuses extensions).

1.3) Dans la troisième partie, nous étudierons le cas où M est une $((\mathcal{F}_t),P)$ martingale locale, nulle en zéro, purement discontinue, dont l'amplitude des sauts est identiquement égale à 1, ce qui entraîne en particulier que les instants de saut sont totalement inaccessibles. Les sauts de M étant uniformément bornés, M est localement bornée et $A = <M>$ est bien défini. Rappelons que, dans cette situation, on a

$$M_t = N_t - A_t, \text{ où } N_t = \sum_{s \leq t} 1_{(\Delta M_s \neq 0)}.$$

Pour simplifier, on supposera encore que $A_\infty = \infty$ P-p.s.

L'analogue, dans ce cadre, du théorème de Dambis et Dubins-Schwarz est dû à S. Watanabe [13] (voir aussi Brémaud [2]), et s'énonce ainsi : si

$$\tau_t = \inf \{s / A_s > t\} \qquad (t \geq 0),$$

le processus K_t, égal par définition à N_{τ_t}, est un processus de Poisson.

Pour poursuivre l'analogie avec le cas continu, on dira encore que M est pure si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

$$(\Pi_d) \quad \begin{cases} . \ \mathcal{F}(M)_\infty = \mathcal{F}(K)_\infty \\ . \ \text{pour tout } t,\ A_t = \langle M \rangle_t \text{ est } \mathcal{F}(K)_\infty\text{-mesurable} \\ . \ \text{pour tout } t,\ \tau_t \text{ est } \mathcal{F}(K)_\infty\text{-mesurable} \\ . \ \text{pour tout } t,\ \mathcal{F}(M)_{\tau_t} = \mathcal{F}(K)_t . \end{cases}$$

Le théorème 3 montre toutefois que l'analogie entre les situations présentées en 1.2) et 1.3) s'arrête là.

1.4) On a montré en [1] que si $L^1(\mathcal{F}_\infty, P)$ est séparable (autrement dit : si $\mathcal{F}_\infty$ ne diffère d'une tribu séparable que par des ensembles $(\mathcal{F}_\infty, P)$ négligeables ; on dira, par la suite, d'une telle tribu qu'elle est p.s. séparable), et s'il existe un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien (ou un $(\mathcal{F}_t)$-processus de Poisson), alors $(\mathcal{F}_t)$ est la filtration naturelle d'une martingale réelle M, c'est à dire $\mathcal{F}(M)_t = \mathcal{F}_t$. La proposition-clé de la deuxième partie et son corollaire nous permettront (voir le théorème 2) d'étendre cette propriété à d'autres cas. Pour travailler dans un cadre assez général, nous avons fait appel à la notion de bon ordre et à la récurrence transfinie, mais l'application de cette proposition à la troisième partie n'utilise que le cas des suites croissantes de temps d'arrêt tendant vers l'infini .

2. *Martingales purement discontinues et filtrations localement constantes.*

2.1) Dans cette seconde partie, la probabilité P est fixée et toutes les propriétés de mesurabilité seront, sauf spécification contraire, relatives à une filtration $(\mathcal{F}_t)$ qui, outre les conditions habituelles rappelées en 1.1, satisfait à l'hypothèse suivante :

(BO)
- . toutes les martingales sont purement discontinues
- . il existe un ensemble optionnel D à coupes bien-ordonnées dans $\mathbb{R}_+$, qui épuise les sauts de toutes les martingales, à une indistinguabilité près.

On ne considère ici que les versions continues à droite des martingales. En reprenant les notations du chapître 0 de [5] , nous allons utiliser l'ensemble I (non dénombrable) des ordinaux dénombrables, dont on rappelle que :

. il est bien-ordonné

. pour tout $\alpha \in I$, l'ensemble des $\beta \in I$, tels que $\beta < \alpha$ est dénombrable

. il est composé de 0, des ordinaux avec précédent du type $\alpha+1$, et des ordinaux limites α, sans précédent, pour lesquels il existe une suite $\alpha_n \in I$, avec $\alpha_n < \alpha$, telle que $\alpha = \sup \alpha_n$.

En raisonnant par récurrence transfinie comme en [7] , on peut associer à chaque $\alpha \in I$ un temps d'arrêt T_α en posant

. $T_o = 0$

. $T_{\alpha+1}(\omega) = \inf \{t > T_\alpha(\omega) / (\omega,t) \in D\}$

. $T_\beta = \sup\limits_{\alpha<\beta} T_\alpha$ si β est un ordinal limite.

Notons que, dans ce dernier cas, T_β est un temps d'arrêt prévisible puisque si $\alpha_n \to \beta$ en croissant et $\alpha_n < \beta$, on a $T_{\alpha_n} < T_\beta$ sur $(T_\beta < \infty)$ et $T_\beta = \lim\limits_n T_{\alpha_n}$.

Cette famille $(T_\alpha, \alpha \in I)$ vérifie les deux propriétés suivantes :

- $T_\alpha < T_\beta$ sur$(T_\beta < +\infty)$ si $\alpha < \beta$
- $D \subset \bigcup\limits_{\alpha\in I} [[T_\alpha]]$.

2.2) On connaît bien, dans ce cas, la structure de la filtration $(\mathcal{F}_t)$, grâce au résultat suivant.

Proposition. Sous l'hypothèse (BO),

1) $\mathcal{F}_\infty = \bigcup\limits_{\alpha\in I} \mathcal{F}_{T_\alpha}$

2) pour tout temps d'arrêt T et tout $\alpha \in I$,

$$\mathcal{F}_T \cap (T_\alpha \leqslant T < T_{\alpha+1}) = \mathcal{F}_{T_\alpha} \cap (T_\alpha \leqslant T < T_{\alpha+1}),$$

3) pour tout $\alpha \in I$

$$\mathcal{F}_{(T_{\alpha+1})-} = \mathcal{F}_{T_\alpha} \vee \sigma(T_{\alpha+1}).$$

Démonstration. 1) Puisque toute suite dans I admet une borne supérieure dans I, il est immédiat que $\bigcup\limits_{\alpha\in I} \mathcal{F}_{T_\alpha}$ est une tribu. Si $A_\infty \in \mathcal{F}_\infty$, on considère la martingale

(continue à droite) $P(A_\infty | \mathcal{F}_s) - P(A_\infty | \bigcup\limits_{\alpha\in I} \mathcal{F}_{T_\alpha} | \mathcal{F}_s)$.

Elle est purement discontinue et nulle sur $[[0,T_\alpha]]$, donc continue en T_α pour tout $\alpha \in I$; de ce fait elle n'a pas de discontinuités et est nulle partout. Cela montre que $A_\infty \in \bigcup\limits_{\alpha\in I} \mathcal{F}_{T_\alpha}$.

2) Soient T un temps d'arrêt, A_T un élément de $\mathcal{F}_T$ et $\alpha \in I$. Posons

$$A = A_T \cap (T_\alpha \leq T < T_{\alpha+1})$$
$$L_s = P(A|\mathcal{F}_s).$$

Puisque $A \in \mathcal{F}_{T_{\alpha+1}}$, la martingale (L_s) est constante et vaut 1_A à partir de $T \wedge T_{\alpha+1}$. Ainsi, la martingale purement discontinue

$$L_s - L_{s \wedge T_\alpha}$$

admet un seul instant de saut $T_{\alpha+1}$, ce qui permet d'écrire

(*) $$L_s = L_{s \wedge T_\alpha} + \Delta L_{T_{\alpha+1}} 1_{(T_{\alpha+1} \leq s)} - B_s,$$

où (B_s) désigne le compensateur prévisible de $(\Delta L_{T_{\alpha+1}} 1_{(T_{\alpha+1} \leq s)})$. Etudions le signe de la variable $\Delta L_{T_{\alpha+1}}$:

- sur l'ensemble $A \subset (T < T_{\alpha+1})$, la martingale (L_s) est identiquement égale à 1 pour $s > T$, donc $\Delta L_{T_{\alpha+1}} = 0$;
- sur l'ensemble A^c, $L_{T_{\alpha+1}} = 1_A = 0$, et comme L est une martingale positive, $\Delta L_{T_{\alpha+1}} \leq 0$.

Ainsi, $\Delta L_{T_{\alpha+1}} \leq 0$ p.s., donc le processus (B_s) est à valeurs négatives.

Sur l'ensemble $A^c \cap (T < T_{\alpha+1})$, l'égalité (*) devient, pour $s=T$: (1)

$$L_T = 1_A = 0 = P(A|\mathcal{F}_{T \wedge T_\alpha}) - B_T \geq P(A|\mathcal{F}_{T \wedge T_\alpha}),$$

et cela entraîne

$$A^c \cap (T < T_{\alpha+1}) \subset \{P(A|\mathcal{F}_{T \wedge T_\alpha})=0\}.$$

Mais on sait que

$$\{P(A|\mathcal{F}_{T \wedge T_\alpha})=0\} \subset A^c$$

et par conséquent

$$A^c \cap (T < T_\alpha) = \{P(A|\mathcal{F}_{T \wedge T_\alpha})=0\} \cap (T < T_{\alpha+1})$$

ou encore

$$A = A \cap (T < T_{\alpha+1}) \cap (T_\alpha \leq T)$$
$$= \{P(A|\mathcal{F}_{T \wedge T_\alpha}) > 0\} \cap (T < T_{\alpha+1}) \cap (T_\alpha \leq T),$$

---

(1) Les inclusions et / ou égalités ci-dessus, sont, bien entendu, vérifiées à un ensemble négligeable près.

ce qui montre que

$$A_T \cap (T_\alpha \leq T < T_{\alpha+1}) = \{P(A|\mathcal{F}_{T_\alpha}) > 0\} \cap (T_\alpha \leq T < T_{\alpha+1}).$$

3) Il est clair que $\mathcal{F}_{T_\alpha} \vee \sigma(T_{\alpha+1}) \subset \mathcal{F}_{(T_{\alpha+1})^-}$. Inversement, comme

$$\mathcal{F}_{(T_{\alpha+1})^-} = \mathcal{F}_0 \vee (\bigvee_{t>0} (\mathcal{F}_t \cap (t < T_{\alpha+1}))),$$

on vérifie que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_t \cap (t < T_{\alpha+1}) &= \sum_{\beta \leq \alpha} \mathcal{F}_t \cap (T_\beta \leq t < T_{\beta+1}) \\ &= \sum_{\beta \leq \alpha} \mathcal{F}_{T_\beta} \cap (T_\beta \leq t < T_{\beta+1}) \quad \text{d'après 2)} \\ &\subset \mathcal{F}_{T_\alpha} \vee \sigma(T_{\alpha+1}). \qquad \square\end{aligned}$$

Remarque. Associons à tout temps d'arrêt T la variable positive

$$\begin{aligned}T'(\omega) &= \sup\{t \leq T(\omega)/(\omega,t) \in D\} \qquad \text{si } T(\omega) < \infty \\ &= +\infty \qquad \text{si } T(\omega) = +\infty.\end{aligned}$$

La variable T' n'est pas en général un temps d'arrêt. Toutefois, l'égalité 2) de la proposition peut être condensée en

$$\mathcal{F}_T \cap (T < \infty) = \sigma(Z_{T'}, 1_{(T' < \infty)} / Z \text{ processus optionnel}) \cap (T' < \infty).$$

Cette relation a encore un sens si D n'a plus ses coupes bien-ordonnées. Reste-t-elle encore vraie ?

2.3) Corollaire. Supposons que $(\mathcal{F}_t)$ vérifie l'hypothèse (BO). Soit $(\mathcal{G}_t)$ une sous-filtration de $(\mathcal{F}_t)$, c'est-à-dire une filtration continue à droite, $(\mathcal{F},P)$-complète et telle que pour tout t, $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t$. Si les $(T_\alpha, \alpha \in I)$ sont également des $(\mathcal{G}_t)$-temps d'arrêt, une condition suffisante (et évidemment nécessaire) pour que $\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t$, pour tout t, est que

$$\mathcal{F}_{T_\alpha} \cap (T_\alpha < \infty) = \mathcal{G}_{T_\alpha} \cap (T_\alpha < \infty) \qquad \text{pour tout } \alpha \in I.$$

Démonstration. Supposons donc vérifiée la relation ci-dessus. Si $t > 0$ et si $A \in \mathcal{F}_t$, d'après le 1) de la proposition, il existe $\gamma \in I$ tel que $A \in \mathcal{F}_{T_\gamma}$, et alors

$$\begin{aligned}A &= \bigcup_{\alpha < \gamma} A \cap (T_\alpha \leq t \wedge T_\gamma < T_{\alpha+1}) \\ &= \bigcup_{\alpha < \gamma} A_\alpha \cap (T_\alpha \leq t \wedge T_\gamma < T_{\alpha+1}) \qquad \text{avec } A_\alpha \in \mathcal{F}_{T_\alpha} \text{ et } A_\alpha \subset (T_\alpha < \infty)\end{aligned}$$

$\in \mathcal{G}_{t\wedge T_\gamma}$. $\square$

2.4) Nous allons maintenant appliquer la proposition et son corollaire à des questions d'engendrement de filtrations (cf. [1]). Pour cela nous aurons besoin d'un lemme sur les espérances conditionnelles.

Lemme. Soit $\mathcal{A}$ une tribu p.s. séparable, et soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. Si C désigne la borne essentielle supérieure des éléments de $\mathcal{B}$ sur lesquels les restrictions de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{B}$ coïncident p.s., il existe une variable X positive et bornée, engendrant p.s. la tribu $\mathcal{A}$, telle que

$$\{X=E(X|\mathcal{B})\} = C \qquad \text{p.s.}$$

Démonstration. Soit X_o une variable aléatoire positive, bornée par $K > 0$, engendrant p.s. la tribu $\mathcal{A}$. Considérons alors

$$A = \{X_o=E(X_o|\mathcal{B})\}.$$

Si $B = \{P(A|\mathcal{B})=1\}$, l'ensemble B est $\mathcal{B}$-mesurable et contenu dans A, donc $X_o=E(X_o|\mathcal{B})$ sur B, ce qui montre que les tribus $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ coïncident p.s. sur B, et ainsi $B \subset C$. Il en résulte que

$$1_A - P(A|\mathcal{B}) > 0 \qquad \text{p.s.} \qquad \text{sur } A \setminus C.$$

Si l'on pose pour tout $\lambda \in]K,2K]$

$$X_\lambda = X_o + \lambda\, 1_A$$

et

$$\Omega_\lambda = \{X_\lambda = E(X_\lambda | \mathcal{B})\} \setminus C,$$

les ensembles Ω_λ sont disjoints, et cela entraîne l'existence d'un $\mu \in]K,2K]$ tel que $P(\Omega_\mu)=0$. Il est clair que $0 \leq X_\mu \leq 3K$ et que $\sigma(X_\mu) = \mathcal{A}$ p.s. □

2.5) Revenons aux filtrations localement constantes.

Théorème 2. Supposons que $(\mathcal{F}_t)$ vérifie l'hypothèse (BO) avec de plus $\mathcal{F}_\infty$ p.s. séparable. Il existe alors une $(\mathcal{F}_t)$-martingale M telle que pour tout t

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}(M)_t .$$

Démonstration. i) Montrons, pour commencer, que la partie accessible T^a_α de chaque T_α est prévisible. Evidemment, $T_o=0$ est prévisible. De même, si α est un ordinal limite,

T_α est prévisible par construction. Supposons donc que α ait un précédent β. On sait qu'il existe une suite $(T_\alpha^n,\ n \geq 0)$ de temps d'arrêt prévisibles telle que

$$[[T_\alpha^a]] \subset \bigcup_n [[T_\alpha^n]].$$

Puisque le graphe $[[T_\alpha^a]]$ est contenu dans l'ensemble prévisible $]]T_\beta,+\infty[[$, on peut supposer que

$$\bigcup_n [[T_\alpha^n]] \subset]]T_\beta,+\infty[[.$$

Pour $n \geq 0$, on considère la martingale

$$N_t^n = (1_{(T_\alpha > T_\alpha^n)} - P(T_\alpha > T_\alpha^n \mid \mathcal{F}_{(T_\alpha^n)-}))\, 1_{(T_\alpha^n \leq t)} .$$

Comme elle n'a pas de saut dans $]]T_\beta,T_\alpha[[$, nous avons

$$P(T_\alpha > T_\alpha^n \mid \mathcal{F}_{(T_\alpha^n)-}) = 1 \quad \text{sur } (T_\alpha > T_\alpha^n),$$

donc $(T_\alpha > T_\alpha^n) \in \mathcal{F}_{(T_\alpha^n)-}$. On peut ainsi restreindre T_α^n à $(T_\alpha \leq T_\alpha^n)$, donc supposer $T_\alpha \leq T_\alpha^n$, et ceci pour tout $n \geq 0$. Mais alors $[[T_\alpha^a]]$ est égal à l'ensemble prévisible

$$\bigcup_n [[T_\alpha^n, +\infty[[\setminus]]T_\alpha,+\infty[[,$$

ce qui prouve que T_α^a est un temps d'arrêt prévisible.

ii) Remarquons tout d'abord que la séparabilité p.s. de $\mathcal{F}_\infty$ (c'est-à-dire l'égalité

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma(A_n,\ n \geq 0) \vee \mathcal{N}$$

où $\mathcal{N}$ désigne les ensembles négligeables, (A_n) une suite d'éléments de $\mathcal{F}_\infty$) entraîne l'existence d'un $\gamma \in I$ tel que $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}_{T_\gamma}$. Construisons maintenant une famille au plus dénombrable de variables aléatoires $(U_\alpha, \alpha \leq \gamma)$ de la façon suivante.

Si $\alpha=0$, on choisit U_0 bornée par un nombre c_0 telle que $\sigma(U_0) = \mathcal{F}_0$ p.s.

Si α est un ordinal limite, on choisit encore U_α bornée par un nombre c_α telle que $\sigma(U_\alpha) = \mathcal{F}_{T_\alpha}$ p.s.

Si α admet un précédent, remarquons que sur l'ensemble C_α borne essentielle supérieure des ensembles $\mathcal{F}_{(T_\alpha^a)-}$-mesurables contenus dans $(T_\alpha^a < +\infty)$ sur lesquels $\mathcal{F}_{T_\alpha^a}$ et $\mathcal{F}_{(T_\alpha^a)-}$ coïncident, nécessairement aucune martingale ne pourra avoir de saut à l'instant T^a_α ; on peut donc exclure de D et du graphe de T^a_α l'ensemble

$$\{(\omega,t)/\omega \in C_\alpha, t = T^a_\alpha(\omega)\}.$$

D'après le lemme, on peut alors choisir sur l'ensemble $(T^a_\alpha < +\infty)$ une variable U_α bornée par un nombre c_α et vérifiant

$$\begin{cases} \cdot\, \mathcal{F}_{T^a_\alpha} \cap (T^a_\alpha < +\infty) = \sigma(U_\alpha) \cap (T^a_\alpha < +\infty) \quad \text{p.s.} \\ \cdot\, U_\alpha - E(U_\alpha \mid \mathcal{F}_{(T^a_\alpha)-}) \neq 0 \quad \text{p.s.} \quad \text{sur } (T^a_\alpha < +\infty). \end{cases}$$

Complétons ce choix en prenant pour U_α, sur $(T^a_\alpha = +\infty)$, une variable aléatoire à valeurs dans $]c_\alpha, 2c_\alpha]$ qui engendre p.s. la restriction de $\mathcal{F}_{T_\alpha}$ à$(T^a_\alpha = +\infty)$. Si l'on a pris soin de choisir les c_α de sorte que $\sum_{\alpha \leq \gamma} c^2_\alpha < +\infty$, le processus

$$M_t = U_o + \sum_{0 < \alpha \leq \gamma} (U_\alpha 1_{(T_\alpha \leq t)} - A^\alpha_t),$$

où (A^α_t) désigne le compensateur prévisible de $(U_\alpha 1_{(T_\alpha \leq t)})$, est une martingale de carré intégrable.

Notons $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}(M)_t$ et montrons que $\mathcal{G}_{T_\alpha} = \mathcal{F}_{T_\alpha}$ pour tout $\alpha \leq \gamma$. Nous aurons alors $\mathcal{G}_{T_\alpha} = \mathcal{F}_{T_\alpha}$ pour tout $\alpha \in I$ puisque

$$\mathcal{G}_{T_\gamma} = \mathcal{F}_{T_\gamma} = \mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}_{T_\beta} \qquad \text{pour tout } \beta > \gamma,$$

et le corollaire nous donnera l'égalité $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t$ désirée.

Clairement, $\mathcal{G}_o = \mathcal{F}_o$.

Si α est un ordinal limite, supposons que pour tout $\beta < \alpha$, T_β soit un $(\mathcal{G}_t)$-temps d'arrêt et que $\mathcal{G}_{T_\beta} = \mathcal{F}_{T_\beta}$. Par construction, $T_\alpha = \lim_n T_{\alpha_n}$ où $\alpha_n \to \alpha$, $\alpha_n < \alpha$ et $T_{\alpha_n} < T_\alpha$ sur $(T_\alpha < +\infty)$. Il en résulte que T_α est un $(\mathcal{G}_t)$-temps d'arrêt prévisible et que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{(T_\alpha)-} &= \bigvee_n \mathcal{F}_{T_{\alpha_n}} \\ &= \bigvee_n \mathcal{G}_{T_{\alpha_n}} \\ &= \mathcal{G}_{(T_\alpha)-}, \end{aligned}$$

tandis que de

$$\Delta M_{T_\alpha} = (U_\alpha - E(U_\alpha | \mathcal{F}_{(T_\alpha)-}) 1_{(T_\alpha < +\infty)}$$

on déduit :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{T_\alpha} &= \sigma(U_\alpha) \\ &\subset \sigma(\Delta M_{T_\alpha}) \vee \mathcal{F}_{(T_\alpha)-} \\ &\subset \mathcal{G}_{T_\alpha}. \end{aligned}$$

Enfin, si $\alpha = \beta + 1$, supposons que T_β soit un $(\mathcal{G}_t)$-temps d'arrêt et que $\mathcal{G}_{T_\beta} = \mathcal{F}_{T_\beta}$. D'après le choix de U_α,

$$T_\alpha = \inf \{t > T_\beta / \Delta M_t \neq 0\}$$

puisque

$$\begin{aligned} \Delta M_{T_\alpha} &= U_\alpha - E(U_\alpha | \mathcal{F}_{(T^a_\alpha)-}) \neq 0 \quad \text{p.s. sur } (T^a_\alpha < +\infty) \\ &= U_\alpha > 0 \quad \text{p.s. sur } (T_\alpha < +\infty) \cap (T^a_\alpha = +\infty) \\ &= 0 \quad \text{p.s. sur } (T_\alpha = +\infty). \end{aligned}$$

Il en résulte que T_α est un $(\mathcal{G}_t)$-temps d'arrêt. En outre

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{T_\alpha} &= \sigma(U_\alpha) \\ &\subset \sigma(\Delta M_{T_\alpha}) \vee \mathcal{F}_{(T_\alpha)-} \\ &= \sigma(\Delta M_{T_\alpha}, T_\alpha) \vee \mathcal{F}_{T_\beta} \quad \text{d'après le 3) de la proposition} \\ &= \sigma(\Delta M_{T_\alpha}, T_\alpha) \vee \mathcal{G}_{T_\beta} \\ &\subset \mathcal{G}_{T_\alpha}. \end{aligned}$$

Le principe de récurrence transfinie permet de conclure que $\mathcal{G}_{T_\alpha} = \mathcal{F}_{T_\alpha}$ pour tout $\alpha \in I$. □

3. *Extrémalité de certaines martingales purement discontinues.*

3.1) Nous travaillons à nouveau dans le cadre général défini en 1.1). Nous aurons besoin des définitions suivantes, empruntées à N. Kazamaki [11].

- On appelle $(\mathcal{F}_t)$-changement de temps tout processus $R = (r_t)$, croissant, continu à droite, à valeurs finies, tel que, pour tout r, r_t soit un $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt ;
- un $(\mathcal{F}_t)$-changement de temps $T = (r_t)$ est dit M-continu si le processus M est

constant sur tous les intervalles $[r_{t-}, r_t]$ ($t \geqslant 0$; $r_{0-} = 0$).

On montre aisément dans ce cas que si M est une $((\mathcal{F}_t),P)$-martingale locale, (M_{r_t}) est une $((\mathcal{F}_{r_t}),P)$-martingale locale ; si de plus M vérifie les conditions énoncées en 1.3), (M_{r_t}) les vérifie également, relativement à $(\mathcal{F}_{r_t})$.

3.2) Nous pouvons maintenant énoncer le

Théorème 3. *Soit (M_t) une $((\mathcal{F}_t),P)$-martingale locale, nulle en 0, de sauts d'amplitude 1 et telle que $\langle M \rangle_\infty = \infty$ P-p.s. On note $N_t = \sum_{s \leqslant t} \Delta M_s$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(j) M est $(\mathcal{F}_t)$-*extrémale*

(jj) *pour tout* t, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}(N)_t$

(jjj) *si* (τ_t) *désigne l'inverse à droite de* $A_t = \langle M \rangle_t$ *et si* $K_t = N_{\tau_t}$, *alors, pour tout* t, $\mathcal{F}_{\tau_t} = \mathcal{F}(K)_t$.

(jv) *pour tout changement de temps* (r_t) M-*continu tel que* $r_\infty = +\infty$ P-p.s., (M_{r_t}) *est* $(\mathcal{F}_{r_t})$-*extrémale*.

Démonstration.

(jj) $\Rightarrow$ (j) De nombreux auteurs ([8], [4], [3]) ont montré que si $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}(N)_t$ pour tout $t \geqslant 0$, alors M a la propriété de représentation prévisible pour $(\mathcal{F}_t)$, c'est-à-dire la propriété (ii) du théorème 1, qui est équivalente à la propriété (i). D'où (j).

(j) $\Rightarrow$ (jj). Remarquons tout d'abord que l'hypothèse entraîne que $\mathcal{F}_0$ est P-triviale (on peut aussi utiliser le théorème 1). Notons $T_0 = 0$ et, pour tout $n \geqslant 1$, T_n le n-ième temps de saut de N (ou de M). Soit $A \in \mathcal{F}_{T_n}$ pour $n \geqslant 1$. D'après la propriété de représentation prévisible, équivalente à (j), on peut associer à la martingale $(P(A|\mathcal{F}_t))$ un processus h $(\mathcal{F}_t)$-prévisible et convenablement intégrable tel que

$$P(A|\mathcal{F}_t) = P(A) + \int_0^t h_s \, dM_s,$$

ce qui donne, en $t=T_n$:

$$1_A = P(A) + \sum_{k=1}^{n} h_{T_k} 1_{(T_k < +\infty)} - \int_0^{T_n} h_s \, dA_s .$$

Tous les termes du second membre sont $\mathcal{F}_{(T_n)-}$ -mesurables, ce qui prouve que $\mathcal{F}_{T_n} = \mathcal{F}_{(T_n)-}$ pour tout $n \geq 1$. L'hypothèse (BO) est vérifiée, puisque, à l'aide de la propriété de représentation prévisible, les $(\mathcal{F}_t)$-martingales n'ont de sauts qu'aux instants (T_n). La partie 3) de la proposition montre donc que

$$\mathcal{F}_{T_n} = \sigma(T_1,\ldots,T_n) = \mathcal{F}(N)_{T_n} \qquad \text{pour } n \geq 1.$$

On déduit alors (jj) du corollaire.

(j) $\Rightarrow$ (jjj). D'après l'hypothèse, pour toute variable $X \in L^2(\mathcal{F}_\infty, P)$, il existe un processus $(\mathcal{F}_t)$-prévisible ψ tel que

$$X = E(X) + \int_0^\infty \psi(s)dM_s \qquad \text{avec } E\left(\int_0^\infty \psi^2(s)dA_s\right) < \infty.$$

D'après le théorème (10.19), p. 318, du livre [9] de Jacod, on peut écrire

$$X = E(X) + \int_0^\infty \psi(\tau_{s-}) \, d(K_s - s),$$

et donc $(K_t - t)$ est $(\mathcal{F}_{\tau_t})$-extrémale. L'équivalence de (j) et de (jj) prouvée précédemment entraîne alors $\mathcal{F}_{\tau_t} = \mathcal{F}(K)_t$ pour tout t.

(jjj) $\Rightarrow$ (j). Utilisons les notations du théorème 1. Soient $P_1, P_2 \in \mathcal{M}$ et $\alpha \in]0,1[$ tels que $P = \alpha P_1 + (1-\alpha)P_2$. Les probabilités $P_i (i=1,2)$ étant absolument continues par rapport à P, $P_i' = \frac{P+P_i}{2}$ est équivalente à P, et appartient à $\mathcal{M}$. D'autre part, (K_t) est un processus de Poisson sous P et sous P_i'. Mais comme $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}(K)_\infty$ sous P (et par équivalence sous P_i'), on a nécessairement $P_i' = P$, ou encore $P_i = P$, ce qui veut dire que (M_t) est $(\mathcal{F}_t)$-extrémale.

(jv) $\Rightarrow$ (j). Il suffit de prendre $r_t = t$.

(j) $\Rightarrow$ (jv). Cela découle du changement de temps dans les intégrales stochastiques, déjà utilisé pour montrer (j) $\Rightarrow$ (jjj). $\square$

3.3) Terminons par deux remarques à ce théorème.

- Comme cas particulièrement important de l'implication (j) $\Rightarrow$ (jj), notons que <u>si (N_t) est un $(\mathcal{F}_t)$-processus de Poisson tel que toute $(\mathcal{F}_t)$-martingale s'écrive comme intégrale stochastique par rapport à</u> $(N_t - t)$, <u>alors</u> $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}(N)_t$ <u>pour tout</u> t.

- La propriété (jjj) est identique à l'énoncé d'une des conditions équivalentes de (Π_d) définissant la notion de pureté pour ce type de martingales. L'équivalence (j)$\Leftrightarrow$(jjj) signifie que dans ce cas, <u>extrémalité$\Leftrightarrow$pureté</u>, contrairement à ce qui se passe pour les martinglaes continues. Remarquons en outre que si M est $(\mathcal{F}_t)$-extrémale, on a alors $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}(M)_t$, puisque, d'après (jj) : $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}(N)_t \subset \mathcal{F}(M)_t$.

Références

[1]. J. Auerhan, D. Lépingle, M. Yor : Construction d'une martingale réelle continue de filtration naturelle donnée. Séminaire de Probabilités XIV. Lecture Notes in Math. 784. Springer Verlag 1980.

[2]. P. Brémaud : An extension of Watanabe's theorem of characterization of Poisson processes. J. App. Proba. 12, 396-399, 1975.

[3]. C.S. Chou, P.A. Meyer : La représentation des martingales relatives à un processus ponctuel discret. CRAS (A) 278, 1561-1563, 1974.

[4]. M.H.A. Davis : The representation of martingales of a jump process. S.I.A.M. J. of Control, 14, 623-638, 1976.

[5]. C. Dellacherie, P.A. Meyer : Probabilités et potentiel. Ch I à IV. Hermann 1975.

[6]. L. Dubins, G. Schwarz : On extremal martingale distributions. Proc. 5th Berkeley Symp. Math. Proba. II, part I, 295-299, 1967.

[7]. R.J. Elliott. Stochastic integrals for martingales of a jump process with partially accessible jump times. Z. für Wahr., 36, 213-226, 1976.

[8]. J. Jacod : Multivariate point processes : predictable projection, Radon-Nikodym derivatives, representation of martingales. Z. für Wahr, 31, 235-253, 1975.

[9]. J. Jacod : Calcul stochastique et problèmes de martingales. Lect. Notes in Math. 714. Springer Verlag 1979.

[10]. J. Jacod, M. Yor : Etude des solutions extrémales et représentation intégrale des solutions pour certains problèmes de martingales. Z. für Wahr, 38, 83-125, 1977.

[11]. N. Kazamaki : Change of time, stochastic integrals and weak martingales. Z. für Wahr., 22, 25-32, 1972.

[12]. D. Stroock, M. Yor : On extremal solutions of martingale problems. Ann. ENS, 4ième Série, t. 13, 95-164, 1980

[13]. S. Watanabe : On discontinuous additive functionals and Lévy measures of a Markov process. Japan J. Math., 34, 53-79, 1964.

[14]. M. Yor : Sur l'étude des martingales continues extrémales. Stochastics, 2, 191-196, 1979.