SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MICHEL ÉMERY

Non-confluence des solutions d'une équation stochastique lipschitzienne

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 587-589
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__587_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire de Probabilités

Volume XV

NON CONFLUENCE DES SOLUTIONS D'UNE EQUATION STOCHASTIQUE LIPSCHITZIENNE

par M. EMERY

La symétrie entre passé et futur permet, pour les équations différentielles déterministes $dx_t = f(t,x_t)\, da_t$ (où f est lipschitzienne en x et a continue et à variation finie), de déduire de l'unicité (ou non divergence) un résultat de non confluence : Si x et x' sont deux solutions telles que $x_0 > x'_0$, alors $x_t > x'_t$ pour tout t. Bien que cette symétrie n'existe plus dans le cas stochastique, H. Doss et E. Lenglart ont établi dans [2] que si deux semimartingales X et X' vérifient l'équation lipschitzienne de Doléans-Dade

$$dX_t(\omega) = f(\omega,t,X_t(\omega))\, dM_t(\omega)$$

où M est une semimartingale continue, l'ensemble $\{X=X'\}$ est indistinguable de $\mathbb{R}_+ \times \{X_0 = X'_0\}$. Nous allons dans cette note donner de ceci une nouvelle démonstration, très simple, sous des hypothèses plus légères (nous n'exigerons aucune différentiabilité de f ; la semimartingale M pourra être vectorielle).

Soit $\underline{\underline{E}}$ un ensemble de processus à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ définis (comme toujours à indistinguabilité près) sur l'espace filtré habituel $(\Omega,\underline{\underline{F}},P,(\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0})$. On se donne une semimartingale n-dimensionnelle M, un processus H à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et des applications F^{ik} $(1\leq i\leq p\ ;\ 1\leq k\leq n)$ de $\underline{\underline{E}}$ dans l'espace des processus prévisibles localement bornés (ou plus généralement des processus prévisibles intégrables par rapport à M). Pour tout vecteur aléatoire $\underline{\underline{F}}_0$-mesurable x_0, on considère le système d'équations différentielles

$$X^i_t = x^i_0 + H^i_t + \sum_k \int_0^t (F^{ik}X)_s dM^k_s \qquad (1\leq i\leq p)$$

(que l'écriture matricielle permet d'abréger en $X_t = x_0 + H_t + \int_0^t (FX)_s dM_s$), où l'inconnue X est à chercher dans $\underline{\underline{E}}$.

Nous n'allons pas résoudre ce système (cela nécessiterait des hypothèses supplémentaires sur F), mais établir, lorsque M est continue, qu'une condition de Lipschitz sur F entraîne la non confluence des solutions. Dans l'énoncé qui suit, les normes euclidiennes sur $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^{np}$ sont notées $|\cdot|$.

PROPOSITION. <u>Soient</u> H , F , M <u>comme ci-dessus</u>, M <u>étant continue et nulle en zéro</u>. <u>Soient</u> x_0 <u>et</u> x_0' <u>deux vecteurs aléatoires</u> $\underline{\underline{F}}_0$<u>-mesurables p.s. distincts dans</u> $\mathbb{R}^p$, <u>et</u> X <u>et</u> X' <u>deux processus de</u> $\underline{\underline{E}}$ <u>vérifiant</u>

$$X_t = x_0 + H_t + \int_0^t (FX)_s dM_s \quad ,$$

$$X_t' = x_0' + H_t + \int_0^t (FX')_s dM_s \quad ,$$

$$|FX - FX'| \leq k\, |X - X'| \quad ,$$

<u>où</u> k <u>est une constante, ou, plus généralement, un processus prévisible intégrable par rapport à</u> M . <u>L'ensemble</u> $\{X = X'\}$ <u>est alors évanescent</u>.

La condition de majoration est satisfaite en particulier pour les équations considérées par Doléans-Dade dans [1], mais pas nécessairement pour celles étudiées dans [3] ; on remarquera que F n'est pas supposée non-anticipante.

<u>Démonstration</u>. Nous nous bornerons au cas scalaire $(n = p = 1)$, laissant au lecteur le soin de majorer les dérivées de la fonction $\mathrm{Log}|x|$ dans $\mathbb{R}^p$ pour $p \geq 2$.

Soients $y_0 = x_0 - x_0'$, $Y = X - X'$ et $Z = FX - FX'$, de sorte que $|Z| \leq k|Y|$ et $Y_t = y_0 + \int_0^t Z_s dM_s$. Nous voulons montrer que Y ne s'annule pas. Ce processus étant continu, le début T de $\{Y = 0\}$ est prévisible, et le processus U qui vaut $\frac{Z}{Y}$ sur $[\![0,T[\![$ et 0 sur $[\![T,\infty[\![$ est prévisible (et intégrable par rapport à M puisque dominé par k). La formule du changement de variable donne, sur $[\![0,T[\![$,

$$\mathrm{Log}|Y_t| = \mathrm{Log}|y_0| + \int_{]0,t]} \frac{1}{Y_s} dY_s - \tfrac{1}{2} \int_{]0,t]} \frac{1}{Y_s^2} d[Y,Y]_s \quad ,$$

qu'on peut encore écrire, toujours sur $[\![0,T[\![$,

$$\mathrm{Log}|Y_t| = \mathrm{Log}|y_0| + \int_0^t U_s dM_s - \tfrac{1}{2} \int_0^t U_s^2 d[M,M]_s \quad .$$

Ceci entraîne $T = \infty$ p.s. car sur $\{T < \infty\}$ le premier membre devrait avoir $-\infty$ pour limite à gauche en T, alors que le second membre est une vraie semimartingale, sans danger d'explosion. ▬

REFERENCES

[1] C. DOLEANS-DADE et P.A. MEYER. Equations différentielles stochastiques. Séminaire de Probabilités XI, Lecture Notes 581, Springer-Verlag 1977.

[2] H. DOSS et E. LENGLART. Sur l'existence, l'unicité et le comportement asymptotique des solutions d'équations différentielles stochastiques. Ann. Inst. Henri Poincaré, section B, vol. XIV n° 2 (1978).

[3] M. EMERY. Equations différentielles stochastiques lipschitziennes : Etude de la stabilité. Séminaire de Probabilités XIII, Lecture Notes 721, Springer-Verlag 1979.

REMARQUE

Le même résultat a été établi indépendamment par A. Uppman (à paraître aux C.R.A.S., été 1980).