Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Jean Jacod
Jean Mémin

Sur un type de convergence intermédiaire entre la convergence en loi et la convergence en probabilité

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 529-546
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__529_0>

SUR UN TYPE DE CONVERGENCE INTERMEDIAIRE ENTRE LA CONVERGENCE EN LOI ET LA CONVERGENCE EN PROBABILITE

Jean JACOD et Jean MEMIN

1 - INTRODUCTION

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires définies sur un espace $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$, à valeurs dans un espace polonais $\mathcal{X}$.

(1.1) DEFINITION: a) (X_n) converge de manière stable si elle converge en loi et si, pour tout $A\in\underline{\underline{F}}$ et toute fonction continue bornée f sur $\mathcal{X}$ la suite $(E[I_A f(X_n)])$ converge.

b) Remarquer que ci-dessus, on ne précise pas la limite ! si maintenant $E[I_A f(X_n)] \longrightarrow E[I_A f(X)]$, où X est une autre variable aléatoire, on dit que (X_n) converge de manière stable vers X. ∎

Cette terminologie est celle de Rényi, qui est le premier semble-t-il à avoir introduit cette notion ([14],[15]).

Il est presque immédiat de vérifier que la suite (X_n) converge de manière stable vers une limite X si et seulement si elle converge en probabilité vers X : ainsi la convergence stable "préserve" la structure de l'espace $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$, à l'instar de la convergence en probabilité. Mais une suite (X_n) peut converger de manière stable, sans pour autant qu'il y ait une limite au sens de (1.1,b): en fait nous verrons que la convergence stable, qui est plus forte que la convergence en loi, est en fait la convergence associée à une topologie de type "topologie faible" sur un ensemble de probabilités adéquat; ainsi, les bonnes propriétés de la convergence en loi (notamment les critères de compacité) se retrouvent-elles dans la convergence stable.

Pour donner des résultats plus précis, introduisons l'espace produit $\bar{\Omega}=\Omega\times\mathcal{X}$, $\bar{\underline{\underline{F}}}=\underline{\underline{F}}\otimes\underline{\underline{\mathcal{X}}}$ ($\underline{\underline{\mathcal{X}}}$ est la tribu borélienne de $\mathcal{X}$).

(1.2) DEFINITION: On note $M_{mc}(\bar{\Omega})$ l'espace des mesures positives finies $(\bar{\Omega},\bar{\underline{\underline{F}}})$ muni de la topologie la moins fine rendant continues les applica-

<u>tions</u>: $\mu \rightsquigarrow \mu(g)$, pour toute fonction mesurable bornée g sur $(\bar{\Omega},\bar{\underline{\underline{F}}})$ telle que chaque $g(\omega,.)$ soit continue sur $\mathcal{X}$.

On verra que cette topologie est aussi la moins fine rendant continues les applications: $\mu \rightsquigarrow \mu(I_A \otimes f)$, où $A \in \underline{\underline{F}}$ et où f est continue bornée sur $\mathcal{X}$.

A toute variable aléatoire X sur $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ à valeurs dans $\mathcal{X}$, on associe la probabilité R_X^P sur $(\bar{\Omega},\bar{\underline{\underline{F}}})$ par

$$R_X^P(d\omega,dx) = P(d\omega)\, \varepsilon_{X(\omega)}(dx) \tag{1.3}$$

(ε_a = mesure de Dirac en a). Il est alors aisé de vérifier que la suite (X_n) converge de manière stable si et seulement si la suite $(R_{X_n}^P)$ converge dans $M_{mc}(\bar{\Omega})$ vers une limite R . Si de plus $R = R_X^P$ pour une variable X (ce qui n'est pas nécessairement le cas), alors (X_n) converge de manière stable vers X .

La convergence stable a d'abord été utilisée dans la théorie des théorèmes limite "classiques": voir l'article de revue [2] d'Aldous et Eagleson, et la bibliographie qu'il contient. Elle est aussi utilisée en programmation dynamique, sous la forme (1.2): cf. par exemple Schäl [16].

Toute probabilité sur $\bar{\Omega}$ dont la loi marginale sur Ω est P peut être considérée (via (1.3)) comme une variable aléatoire "randomisée", ou "floue" selon la terminologie de Meyer [9], et ce point de vue a été utilisé par Baxter et Chacon [3] pour étudier certaines propriétés des temps d'arrêt. Enfin plus récemment la convergence stable a joué un rôle central dans la preuve de l'existence de solutions faibles pour certaines équations différentielles stochastiques (Pellaumail [12], [13], Jacod et Mémin [7]) et dans l'étude de la stabilité de ces solutions faibles [8].

Il est d'ailleurs vraisemblable que la convergence stable a été utilisée, dans différents contextes, par bien d'autres auteurs.

Nous proposons ici une étude systématique de cette convergence: les résultats généralisent, de manière souvent très simple, des résultats classiques sur la convergence étroite (voir par exemple [4] et [10]). Nous suivons pour une bonne part de ce qui suit l'article de Meyer [9], et aussi [7].

2 - LES BASES THEORIQUES: LA TOPOLOGIE DE $M_{mc}(\bar{\Omega})$

§a - Notations. Soit $(E,\underline{\underline{E}})$ un espace mesurable quelconque. On note $B(E)$ l'ensemble des fonctions mesurables bornées et $M(E)$ l'ensemble des mesures positives finies sur $(E,\underline{\underline{E}})$. L'ensemble $M(E)$ sera aussi noté $M_m(E)$ ("m" pour mesurable) lorsqu'il est muni de la topologie la moins fine rendant continues les applications: $\mu \rightsquigarrow \mu(f)$, $f \in B(E)$.

Si en outre E est polonais, et $\underline{\underline{E}}$ est sa tribu borélienne, on note $C(E)$ (resp. $C_u(E)$) l'espace des fonctions continues (resp. uniformément continues) bornées sur E. L'ensemble $M(E)$ sera noté $M_c(E)$ ("c" pour continu) lorsqu'il est muni de la topologie étroite, i.e. la moins fine rendant continues les applications: $\mu \rightsquigarrow \mu(f)$ pour toute $f \in C(E)$ (ou, de manière équivalente, pour toute $f \in C_u(E)$).

Nos données de base sont:

$$(2.1)\quad \begin{cases} (\Omega,\underline{\underline{F}}), \text{ un espace mesurable} \\ \mathfrak{X}, \text{ un espace polonais, et sa tribu borélienne } \underline{\underline{\mathfrak{X}}} \\ \bar{\Omega} = \Omega \times \mathfrak{X}, \quad \bar{\underline{\underline{F}}} = \underline{\underline{F}} \otimes \underline{\underline{\mathfrak{X}}}. \end{cases}$$

L'espace $M(\bar{\Omega})$ sera aussi noté $M_{mc}(\bar{\Omega})$ lorsqu'il est muni de la topologie définie en (1.2), c'est-à-dire la moins fine rendant continues les applications: $\mu \rightsquigarrow \mu(g)$, $g \in B_{mc}(\bar{\Omega})$, où $B_{mc}(\bar{\Omega})$ est défini par:

$$(2.2)\qquad B_{mc}(\bar{\Omega}) \;=\; \{g \in B(\bar{\Omega}) : \; g(\omega,.) \text{ est continue pour chaque } \omega \in \Omega\}.$$

Si $\mu \in M(\bar{\Omega})$, on note μ^{Ω} (resp. $\mu^{\mathfrak{X}}$) sa mesure marginale sur Ω (resp. $\mathfrak{X}$); il est clair que l'application: $\mu \rightsquigarrow \mu^{\Omega}$ (resp. $\mu \rightsquigarrow \mu^{\mathfrak{X}}$) est continue de $M_{mc}(\bar{\Omega})$ dans $M_m(\Omega)$ (resp. $M_c(\mathfrak{X})$). Si Ω (resp. $\mathfrak{X}$) est réduit à un point, $M_{mc}(\bar{\Omega})$ est isomorphe à $M_c(\mathfrak{X})$ (resp. $M_m(\Omega)$).

Posons enfin:

$$(2.3)\quad \begin{cases} B^1_{mc}(\bar{\Omega}) \;=\; \{g(\omega,x) = I_A(\omega)f(x) : \; A \in \underline{\underline{F}}, \;\; f \in C_u(\mathfrak{X})\} \\ B^2_{mc}(\bar{\Omega}) \;=\; \{g(\omega,x) = \sum_{n\geq 1} I_{A_n}(\omega) f_n(x) : \; f_n \in C_u(\mathfrak{X}), \; g \text{ est bornée,} \\ \qquad\qquad \text{les } (A_n) \text{ constituent une partition } \underline{\underline{F}}\text{-mesurable de } \Omega\}. \end{cases}$$

On a bien-sûr $B^1_{mc}(\bar{\Omega}) \subset B^2_{mc}(\bar{\Omega}) \subset B_{mc}(\bar{\Omega})$.

§b - Une définition équivalente de la topologie de $M_{mc}(\bar{\Omega})$. On a la:

(2.4) PROPOSITION: La topologie de $M_{mc}(\bar{\Omega})$ est la moins fine rendant continues les applications: $\mu \rightsquigarrow \mu(g)$, $g \in B^1_{mc}(\bar{\Omega})$.

Commençons par un lemme.

(2.5) LEMME: Si K est un compact de $\mathscr{X}$ et si $g \in B_{mc}(\bar{\Omega})$, il existe une suite (g_n) d'éléments de $B^2_{mc}(\bar{\Omega})$ qui converge uniformément vers g sur l'ensemble $\Omega \times K$.

Démonstration. L'espace $C(K) = C_u(K)$ contient une suite (V_k) dense pour la topologie uniforme. D'après le théorème de Tietze-Urysohn, chaque V_k se prolonge en une fonction $\bar{V}_k \in C_u(\mathscr{X})$. Soit $A_{n,0} = \emptyset$ et

$$A_{n,k} = \{\omega \in \Omega : \omega \notin \bigcup_{q \leq k-1} A_{n,q} , \ \sup_{x \in K} |g(\omega,x) - V_k(x)| \leq \tfrac{1}{n}\},$$

$$g_n(\omega,x) = \sum_{k \geq 1} I_{A_{n,k}}(\omega)\ \bar{V}_k(x) ;$$

Les g_n vérifient alors les propriétés requises. ∎

Démonstration de (2.4). Il suffit de montrer que si (μ_α) est une famille filtrante de $M(\bar{\Omega})$ telle que $\mu_\alpha(g) \longrightarrow \mu(g)$ pour toute $g \in B^1_{mc}(\bar{\Omega})$, où $\mu \in M(\bar{\Omega})$, on a aussi $\mu_\alpha(g) \longrightarrow \mu(g)$ pour $g \in B_{mc}(\bar{\Omega})$.

Soit d'abord $g = \sum_{n \geq 1} I_{A_n} \otimes f_n \in B^2_{mc}(\bar{\Omega})$, et $a = \sup|g|$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu^{\Omega}(\bigcup_{n > n_0} A_n) \leq \varepsilon$. Par hypothèse (μ^{Ω}_α) tend vers μ^{Ω} dans $M_m(\Omega)$, donc $\lim_{(\alpha)} \mu^{\Omega}_\alpha(\bigcup_{n > n_0} A_n) \leq \varepsilon$ et

$$\lim\sup_{(\alpha)} \left|\mu_\alpha(\sum_{n > n_0} I_{A_n} \otimes f_n)\right| \leq \varepsilon a .$$

On sait aussi que $\mu_\alpha(\sum_{n \leq n_0} I_{A_n} \otimes f_n) \longrightarrow \mu(\sum_{n \leq n_0} I_{A_n} \otimes f_n)$ et comme ε est arbitraire on en déduit que $\mu_\alpha(g) \longrightarrow \mu(g)$.

Soit ensuite $g \in B_{mc}(\bar{\Omega})$, $a = \sup|g|$, $b = \sup_{(\alpha)} \mu_\alpha(\bar{\Omega})$. On a $b < \infty$ et $\mu(\bar{\Omega}) \leq b$. Par hypothèse $(\mu^{\mathscr{X}}_\alpha)$ tend vers $\mu^{\mathscr{X}}$ dans $M_c(\mathscr{X})$, donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact K de $\mathscr{X}$ tel que $\mu^{\mathscr{X}}(\mathscr{X} \setminus K) \leq \varepsilon$ et $\sup_{(\alpha)} \mu^{\mathscr{X}}_\alpha(\mathscr{X} \setminus K) \leq \varepsilon$. D'après (2.5) il existe $g' \in B^2_{mc}(\bar{\Omega})$ avec $|g - g'| \leq \varepsilon$ sur $\Omega \times K$, et on peut supposer que $|g'| \leq a$. Donc

$$|\mu_\alpha(g) - \mu_\alpha(g')| \leq b\varepsilon + 2a\varepsilon, \qquad |\mu(g) - \mu(g')| \leq b\varepsilon + 2a\varepsilon.$$

On a vu que $\mu_\alpha(g') \longrightarrow \mu(g')$. Comme ε est arbitraire, on en déduit que $\mu_\alpha(g) \longrightarrow \mu(g)$. ∎

§c - Compacité dans $M_{mc}(\bar{\Omega})$. Commençons par un théorème de Riecz.

(2.6) THEOREME: La formule $\phi(g) = \mu(g)$ définit une correspondance biunivoque entre les $\mu \in M(\bar{\Omega})$ et les formes linéaires positives ϕ sur l'espace vectoriel engendré par $B^1_{mc}(\bar{\Omega})$ qui vérifient:

(i) $A \rightsquigarrow \phi(I_A \otimes 1)$ est une mesure sur $(\Omega, \underline{\underline{F}})$;

(ii) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K_ε de $\mathscr{X}$ tel que $\phi(1) - \phi(1 \otimes f) \leq \varepsilon$ pour toute $f \in C_u(\mathscr{X})$ vérifiant $I_{K_\varepsilon} \leq f \leq 1$.

Commençons par un résultat auxiliaire, analogue d'une certaine manière au théorème de Doléans sur les processus croissants (voir aussi le théorème de Morando sur les bimesures [6], ou Meyer [9], ou Pellaumail [11]).

(2.7) PROPOSITION: <u>Soit</u> $L : \underline{\underline{F}} \times \mathscr{X} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ <u>telle que</u>

(i) $A \in \underline{\underline{F}} \longrightarrow L(A,.) \in M(\mathscr{X})$,

(ii) $B \in \underline{\underline{\mathscr{X}}} \longrightarrow L(.,B) \in M(\Omega)$.

<u>Il existe</u> $\mu \in M(\bar{\Omega})$ <u>unique, telle que</u> $\mu(A \times B) = L(A,B)$ <u>pour</u> $A \in \underline{\underline{F}}$, $B \in \underline{\underline{\mathscr{X}}}$.

<u>Démonstration</u>. La fonction: $A \times B \rightsquigarrow L(A,B)$ s'étend trivialement en une mesure additive positive μ sur l'algèbre $\overline{\underline{\underline{F}}}^o$ engendrée par la semi-algèbre $\underline{\underline{F}} \times \underline{\underline{\mathscr{X}}}$. Il suffit de montrer que $\mu(C_n) \downarrow 0$ si (C_n) est une suite décroissante d'éléments de $\overline{\underline{\underline{F}}}^o$ telle que $\bigcap C_n = \emptyset$.

Chaque C_n s'écrit: $C_n = \bigcup_{i \leq p_n} A_n^i \times B_n^i$. Soit $\varepsilon > 0$, $n \geq 1$, $i \leq p_n$. D'après (i) il existe un compact K_n^i de $\mathscr{X}$ tel que $K_n^i \subset B_n^i$ et

$$\mu(A_n^i \times K_n^i) = L(A_n^i, K_n^i) \geq L(A_n^i, B_n^i) - \frac{\varepsilon}{p_n} 2^{-n} = \mu(A_n^i \times B_n^i) - \frac{\varepsilon}{p_n} 2^{-n} .$$

Soit $C'_n = \bigcap_{m \leq n} \bigcup_{i \leq p_m} A_m^i \times K_m^i$. On a $C'_n \subset C_n$, $C'_n \in \overline{\underline{\underline{F}}}^o$, et comme la suite (C_n) est décroissante il vient:

$$\mu(C'_n) \geq \mu(C_n) - \sum_{m \leq n} \sum_{i \leq p_m} \frac{\varepsilon}{p_m} 2^{-m} \geq \mu(C_n) - \varepsilon .$$

Chaque coupe $C'_n(\omega) = \{x : (\omega,x) \in C'_n\}$ est compacte, et $\bigcap C'_n = \emptyset$, donc si $F_n = \{\omega : C'_n(\omega) \neq \emptyset\}$ on a: $\lim \downarrow F_n = \emptyset$. Comme

$$\mu(C'_n) \leq \mu(F_n \times \mathscr{X}) = L(F_n, \mathscr{X}) \longrightarrow 0$$

d'après (ii), on en déduit que: $\lim \downarrow \mu(C_n) = 0$. ∎

<u>Démonstration de (2.6)</u>. Si $\mu \in M(\bar{\Omega})$, l'application: $g \rightsquigarrow \Phi(g) = \mu(g)$ vérifie trivialement les propriétés requises.

Soit inversement Φ une forme linéaire positive sur l'espace vectoriel engendré par $B^1_{mc}(\bar{\Omega})$, vérifiant (i) et (ii). Soit $A \in \underline{\underline{F}}$, et Φ_A : $C_u(\mathscr{X}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\Phi_A(f) = \Phi(I_A \otimes f)$. D'après le théorème d'Urysohn $\mathscr{X}$ est un sous-espace topologique d'un compact métrique $\bar{\mathscr{X}}$; si $\bar{f} \in C(\bar{\mathscr{X}})$ on note f sa restriction à $\mathscr{X}$ et on pose $\bar{\Phi}_A(\bar{f}) = \Phi_A(f)$: on définit ainsi une forme linéaire positive sur $C(\bar{\mathscr{X}})$, associée d'après le théorème de Riecz à une mesure finie positive $\bar{L}(A,.)$ sur $\bar{\mathscr{X}}$ par $\bar{L}(A,\bar{f}) = \bar{\Phi}_A(\bar{f})$.

On a $\bar{L}(A,\bar{\mathscr{X}}) = \Phi(I_A \otimes 1)$. D'après (ii) et la positivité de Φ , on a $\Phi(I_A \otimes 1) - \Phi(I_A \otimes f) \leq \varepsilon$ pour toute $f \in C_u(\mathscr{X})$ vérifiant $I_{K_\varepsilon} \leq f \leq 1$. Donc si $\bar{f} \in C_u(\bar{\mathscr{X}})$ vérifie $0 \leq \bar{f} \leq 1$ et $\bar{f} = 1$ sur K_ε , on a $\bar{L}(A,\bar{\mathscr{X}}) - \bar{L}(A,\bar{f}) \leq \varepsilon$, donc $\bar{L}(A,\bar{\mathscr{X}} \setminus K_\varepsilon) \leq \varepsilon$, donc $\bar{L}(A,\bar{\mathscr{X}} \setminus \mathscr{X}) = 0$. Si $L(A,.)$ désigne la restriction de $\bar{L}(A,.)$ à $\mathscr{X}$, on a alors $L(A,f) = \phi(I_A \otimes f)$ pour toute $f \in C_u(\mathscr{X})$, car toute fonction de $C_u(\mathscr{X})$ admet une extension continue bornée à $\bar{\mathscr{X}}$.

ϕ étant linéaire, $L(.,f)$ est additive sur $\underline{\underline{F}}$ pour toute $f \in C_u(\mathscr{X})$. En utilisant les propriétés d'approximation des mesures sur $\mathscr{X}$, on en déduit facilement que $L(.,B)$ est additive sur $\underline{\underline{F}}$ pour tout $B \in \underline{\underline{\mathscr{X}}}$. De plus $L(A,B) \leq L(A,\mathscr{X}) = \phi(I_A \otimes 1)$, ce qui permet de déduire de (i) que $L(.,B) \in M(\Omega)$. Il suffit d'appliquer (2.7) pour obtenir $\mu \in M(\bar{\Omega})$ unique, vérifiant $\mu(g) = \phi(g)$ pour $g \in B^1_{mc}(\bar{\Omega})$. ∎

(2.8) THEOREME: <u>Pour qu'une partie</u> N <u>de</u> $M_{mc}(\bar{\Omega})$ <u>soit relativement compacte, il faut et il suffit que:</u>

(i) <u>l'ensemble</u> $\{\mu^{\Omega} : \mu \in N\}$ <u>soit relativement compact dans</u> $M_m(\Omega)$,

(ii) <u>l'ensemble</u> $\{\mu^{\mathscr{X}} : \mu \in N\}$ <u>soit relativement compact dans</u> $M_c(\mathscr{X})$.

<u>Démomstration</u>. Seule la condition suffisante n'est pas évidente. Pour simplifier les notations, on note X l'espace vectoriel engendré par $B^1_{mc}(\bar{\Omega})$.

Soit $\theta : M(\bar{\Omega}) \longrightarrow [-\infty,\infty]^X$ définie par: $\theta(\mu) = (\mu(f))_{f \in X}$, et $M' = \theta(M(\bar{\Omega}))$ l'image de $M(\bar{\Omega})$. L'application θ, clairement injective, est d'après (2.4) un homéomorphisme de $M_{mc}(\bar{\Omega})$ sur M' muni de la topologie induite par la topologie produit. Si $N' = \theta(N)$ est l'image de N, il nous suffit alors de montrer que sous (i) et (ii) la fermeture de N' dans $[-\infty,\infty]^X$, qui est compact, est contenue dans M'.

Soit (μ_α) une famille filtrante de N, telle que $(\theta(\mu_\alpha))$ converge dans $[-\infty,\infty]^X$: pour chaque $f \in X$, $(\mu_\alpha(f))$ converge vers une limite $\phi(f)$. Il est clair que ϕ est une forme linéaire positive sur X. D'après (i) il existe une sous-famille filtrante $(\mu_{\alpha'})$ telle que $(\mu^{\Omega}_{\alpha'})$ converge dans $M_m(\Omega)$ vers une limite ν. Si $A \in \underline{\underline{F}}$ on a

$$\phi(I_A \otimes 1) = \lim_{(\alpha)} \mu_\alpha(I_A \otimes 1) = \lim_{(\alpha')} \mu^{\Omega}_{\alpha'}(A) = \nu(A)$$

et ϕ vérifie (2.6,i). D'après (ii), pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact K_ε de $\mathscr{X}$ tel que $\mu^{\mathscr{X}}_\alpha(1) - \mu^{\mathscr{X}}_\alpha(f) \leq \varepsilon$ pour tous α, $f \in C_u(\mathscr{X})$ avec $I_{K_\varepsilon} \leq f \leq 1$: on en déduit que ϕ vérifie (2.6,ii). D'après (2.6) il existe donc $\mu \in M(\bar{\Omega})$ telle que $\mu(f) = \phi(f)$ pour $f \in X$, ce qui revient à dire que $\theta(\mu_\alpha) \longrightarrow \theta(\mu)$ dans $[-\infty,\infty]^X$. ∎

Dans le cas où Ω lui-même est polonais, donc $\bar{\Omega}$ aussi, on va en déduire un corollaire intéressant (qui peut aussi se montrer directement: voir [7]).

(2.9) COROLLAIRE: <u>Supposons</u> Ω <u>polonais, de tribu borélienne</u> $\underline{\underline{F}}$. <u>Pour qu'une famille filtrante</u> (μ_α) <u>converge vers</u> μ <u>dans</u> $M_{mc}(\bar{\Omega})$, <u>il faut</u>

<u>et il suffit que</u>:

(i) <u>la famille</u> (μ_α^Ω) <u>soit relativement compacte dans</u> $M_m(\Omega)$,

(ii) <u>la famille</u> (μ_α) <u>converge vers</u> μ <u>dans</u> $M_c(\bar\Omega)$.

<u>Démonstration</u>. Seule la condition suffisante est à montrer. (i) et (ii) entrainent que la famille (μ_α) satisfait les conditions de (2.8), donc est relativement compacte dans $M_{mc}(\bar\Omega)$. (ii) entraine aussi que toute sous-famille filtrante de (μ_α) qui converge dans $M_{mc}(\bar\Omega)$, admet μ pour limite, d'où le résultat.∎

Terminons par un résultat sur la métrisabilité.

(2.10) PROPOSITION: <u>Si</u> $\underline{\underline{F}}$ <u>est séparable</u>, $M_{mc}(\bar\Omega)$ (et donc $M_m(\Omega)$) <u>est métrisable</u>.

<u>Démonstration</u>. $\underline{\underline{F}}$ est engendrée par une algèbre dénombrable $\underline{\underline{F}}^o$. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite dense dans $C_u(\mathscr{X})$ pour la topologie uniforme, avec $f_1 = 1$. D'après (2.4) il suffit de montrer que si (μ_α) est une famille filtrante de $M(\bar\Omega)$, si $\mu\in M(\bar\Omega)$, et si $\mu_\alpha(I_A\otimes f_n)\longrightarrow\mu(I_A\otimes f_n)$ pour tous $A\in\underline{\underline{F}}^o$, $n\geq 1$, alors $\mu_\alpha(I_A\otimes f)\longrightarrow\mu(I_A\otimes f)$ pour tous $A\in\underline{\underline{F}}$, $f\in C_u(\mathscr{X})$.

Soit $\mathscr{H}$ la classe des fonctions $g\in B_{mc}(\bar\Omega)$ telles que $\mu_\alpha(g)\longrightarrow\mu(g)$. $\mathscr{H}$ est un espace vectoriel, fermé pour la convergence uniforme: en effet si $b=\sup_{(\alpha)}\mu_\alpha(\bar\Omega)$ on a $b<\infty$ et $\mu(\bar\Omega)\leq b$, et

$$|\mu_\alpha(g)-\mu_\alpha(g')| \leq b\sup|g-g'| , \quad |\mu(g)-\mu(g')| \leq b\sup|g-g'| .$$

Si $A\in\underline{\underline{F}}^o$, on a $I_A\otimes f_n\in\mathscr{H}$ pour tout $n\geq 1$, donc $I_A\otimes f\in\mathscr{H}$ pour toute $f\in C_u(\mathscr{X})$. Si $f\in C_u(\mathscr{X})$ et si $\mathscr{H}_f=\{h\in B(\Omega) : h\otimes f\in\mathscr{H}\}$, $\mathscr{H}_f$ est un espace vectoriel contenant les constantes, fermé pour la convergence uniforme, et contenant les indicatrices I_A pour $A\in\underline{\underline{F}}^o$. D'après le théorème des classes monotones, on a $\mathscr{H}_f=B(\Omega)$ et donc $B^1_{mc}(\bar\Omega)\subset\mathscr{H}$. ∎

§d - <u>Extension des théorèmes de convergence aux fonctions non continues</u>. Dans ce paragraphe nous considérons une suite (μ_n) convergeant vers μ dans $M_{mc}(\bar\Omega)$. On sait que $\mu_n(g)\longrightarrow\mu(g)$ pour $g\in B_{mc}(\bar\Omega)$. Pour quelles fonctions g n'appartenant pas à $B_{mc}(\bar\Omega)$ a-t-on encore $\mu_n(g)\longrightarrow\mu(g)$?

Il s'agit là de résultats essentiellement techniques, mais néanmoins très utiles. Ils généralisent, avec les mêmes méthodes de démonstration, les résultats correspondants pour la convergence étroite.

Pour tout $A\in\bar{\underline{\underline{F}}}$ on note A_ω sa "coupe selon ω", c'est-à-dire $A_\omega = \{x : (\omega,x)\in A\}$. On note $\mathfrak{F}$ l'ensemble des $A\in\bar{\underline{\underline{F}}}$ à coupes A_ω fermées dans $\mathscr{X}$.

(2.11) PROPOSITION: <u>Supposons que</u> $\mu_n \longrightarrow \mu$ <u>dans</u> $M_{mc}(\bar{\Omega})$. <u>Alors</u>

(i) $\limsup_{(n)} \mu_n(F) \leq \mu(F)$ <u>pour</u> $F \in \bar{\mathcal{F}}$.

(ii) $\limsup_{(n)} \mu_n(g) \leq \mu(g)$ <u>pour</u> $g \in B(\bar{\Omega})$ <u>telle que</u> $g \geq 0$ <u>et que chaque</u> $g(\omega,.)$ <u>soit s.c.s. sur</u> $\mathcal{X}$.

Ce résultat est démontré par Meyer [9], théorème 7, lorsque $\mathcal{X} = [0,\infty]$, mais la démonstration de [9] ne fait pas ressortir l'usage (nécessaire, semble-t-il) du théorème de section. Le théorème de section joue un rôle essentiel dans le lemme suivant:

(2.12) LEMME: <u>Soit</u> $\nu \in M(\bar{\Omega})$ <u>et</u> $F \in \bar{\mathcal{F}}$. <u>Il existe une suite décroissante</u> (g_n) <u>de fonctions positives de</u> $B_{mc}(\bar{\Omega})$ <u>telle que</u> $I_F = \lim_{(n)} g_n$ ν-<u>p.s.</u>

<u>Démonstration</u>. Choisissons sur $\mathcal{X}$ une distance δ pour laquelle $\mathcal{X}$ est totalement borné. Pour tout $r > 0$ il existe alors un entier $N(r)$ ayant la propriété suivante: si $x_1,\dots,x_n \in \mathcal{X}$ sont tels que $\delta(x_i,x_j) \geq r$ pour tous $i,j \leq n$, $i \neq j$, alors $n \leq N(r)$. Soit Δ un point extérieur à $\mathcal{X}$; soit $\mathcal{X}_\Delta = \mathcal{X} \cup \{\Delta\}$ et $\underline{\underline{\mathcal{X}}}_\Delta$ la tribu de $\mathcal{X}_\Delta$ engendrée par $\underline{\underline{\mathcal{X}}}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On va construire par récurrence une suite $(F(k,q): 0 \leq q \leq N(1/k))$ d'ensembles de $\bar{\mathcal{F}}$ de la manière suivante: on pose $F(k,0) = F$. Supposons $F(k,q) \in \bar{\mathcal{F}}$ connu. D'après le théorème de section il existe un ensemble ν^Ω-négligeable $A_{k,q+1} \subset \Omega$ et une application mesurable $h_{k,q+1} : (\Omega,\underline{\underline{F}}) \longrightarrow (\mathcal{X}_\Delta,\underline{\underline{\mathcal{X}}}_\Delta)$ tels que:

$$(2.13) \qquad \omega \notin A_{k,q+1} \longrightarrow \begin{cases} F(k,q)_\omega \neq \emptyset \iff h_{k,q+1}(\omega) \in F(k,q)_\omega \\ F(k,q)_\omega = \emptyset \iff h_{k,q+1}(\omega) = \Delta. \end{cases}$$

On pose alors:

$$(2.14) \qquad F(k,q+1) = \{(\omega,x) \in F(k,q) : \delta(x,h_{k,q+1}(\omega)) \geq 1/k\}.$$

Il est facile de voir que $F(k,q+1) \in \bar{\mathcal{F}}$. D'après la définition de $N(1/k)$ on a $F(k,N(1/k)) = \emptyset$. Posons

$$A = \bigcup_{k \geq 1,\ 1 \leq q \leq N(1/k)} A_{k,q}$$

$$H_\omega = \{h_{k,q}(\omega) : k \geq 1,\ 1 \leq q \leq N(1/k)\}$$

$$g(\omega,x) = \inf_{k \geq 1,\ 1 \leq q \leq N(1/k)} \delta(x,h_{k,q}(\omega)).$$

On a $g \in B(\bar{\Omega})$ par construction, et $g(\omega,x) = \delta(x,F'_\omega)$, distance de x à la fermeture F'_ω de H_ω dans $\mathcal{X}$, donc $g(\omega,.) \in C(\mathcal{X})$ et $g \in B_{mc}(\bar{\Omega})$. D'après (2.13) et (2.14) il est facile de voir que $F'_\omega = F_\omega$ si $\omega \notin A$, tandis que $\nu^\Omega(A) = 0$. Il reste alors à poser $g_n = \varphi(ng)$, où φ est la fonction $\varphi(t) = (1-t) \vee 0$ (dans ce lemme, la difficulté provient de ce qu'on ne peut pas prendre simplement $g(\omega,x) = \delta(x,F_\omega)$, car la fonction g ainsi définie ne serait pas nécessairement $\underline{\underline{F}}$-mesurable). ∎

<u>Démonstration de (2.11)</u>. (i) Soit $\nu \in M(\bar{\Omega})$ une mesure dominant μ et les μ_n. Soit $F \in \bar{\mathcal{F}}$. D'après (2.12) il existe une suite décroissante (g_q) de fonctions positives de $B_{mc}(\bar{\Omega})$ avec $I_F = \lim_{(q)}\downarrow g_q$ ν-p.s. On a alors

$$\limsup_{(n)} \mu_n(F) \leq \lim_{(n)} \mu_n(g_q) = \mu(g_q)$$
$$\lim_{(q)} \mu(g_q) = \mu(F),$$

d'où le résultat.

(ii) Pour tout $a \geq 0$ on pose $F(a) = \{g \geq a\}$. On sait que

$$\mu_n(g) = \int_0^\infty \mu_n(F(a))\, da,$$

et de même pour μ. Mais $F(a) \in \bar{\mathcal{F}}$, donc (i) et le lemme de Fatou entraînent le résultat.∎

(2.15) COROLLAIRE: <u>Supposons que</u> $\mu_n \longrightarrow \mu$ <u>dans</u> $M_{mc}(\bar{\Omega})$. <u>Si</u> $F \in \bar{\mathcal{F}}$ <u>vérifie</u> $\mu_n(\bar{\Omega} \setminus F) \longrightarrow 0$, <u>alors</u> $\mu(\bar{\Omega} \setminus F) = 0$.

Compte tenu de (2.11), le résultat suivant est classique (voir par exemple [6], p. 115).

(2.16) THEOREME: <u>Supposons que</u> $\mu_n \longrightarrow \mu$ <u>dans</u> $M_{mc}(\bar{\Omega})$. <u>Soit</u> $A \in \underline{\underline{F}}$. <u>Soit</u> g <u>une fonction mesurable sur</u> $(\bar{\Omega}, \underline{\underline{F}})$. <u>Si</u>

(i) $\mu_n(\bar{\Omega} \setminus A) \longrightarrow 0$ <u>et</u> $\mu(\bar{\Omega} \setminus A) = 0$,

(ii) $\lim_{a \uparrow \infty} \sup_{(n)} \mu_n(|g| I_{\{|g| > a\}}) = 0$,

(iii) <u>l'ensemble</u> $\{(\omega, x) \in A :$ la restriction de $g(\omega, .)$ à la coupe A_ω est discontinue au point $x\}$ <u>est</u> μ-<u>négligeable</u>.

<u>On a alors</u>: $\mu_n(g) \longrightarrow \mu(g)$.

Remarquer que l'ensemble négligeable intervenant dans (iii) est contenu dans l'ensemble des $(\omega, x) \in A$ tels que $g(\omega, .)$ soit discontinue en x.

<u>Démonstration</u>. Commençons par montrer le résultat lorsque g est bornée. On peut alors supposer que $0 \leq g \leq 1$. La fonction $\bar{g}(\omega, x) = \limsup_{y \to x} g(\omega, y) I_A(\omega, y)$ est s.c.s. positive, et dans $B(\bar{\Omega})$. Donc

$$\limsup_{(n)} \mu_n(\bar{g}) \leq \mu(\bar{g}).$$

On a $I_A g \leq \bar{g}$, donc $g \leq \bar{g} + I_{A^c}$ et d'après (i) il vient

$$\limsup_{(n)} \mu_n(g) \leq \mu(\bar{g}).$$

Enfin l'ensemble μ-négligeable dans (iii) contient $A \bigcap \{g < \bar{g}\}$, de sorte que (i) et (iii) impliquent que $\mu(\bar{g}) = \mu(g)$. On a donc montré que $\limsup_{(n)} \mu_n(g) \leq \mu(g)$, et on montre de même que $\liminf_{(n)} \mu_n(g) \geq \mu(g)$, donc $\mu_n(g) \longrightarrow \mu(g)$.

Passons au cas général, où g vérifie (ii). Posons $g_N = (g \wedge N) \vee (-N)$ pour $N \in \mathbb{N}$. Comme $\mu_n(1) \longrightarrow \mu(1) < \infty$, (ii) implique clairement que $b = \sup_{(n)} \mu_n(|g|)$ est fini. Comme $|g_N|$ vérifie (iii) et est borné, on a

(2.17) $$\mu(|g|) = \lim_{(N)} \mu(|g_N|) = \lim_{(N)} \lim_{(n)} \mu_n(|g_N|) \leq b .$$

Par ailleurs

$$|\mu_n(g) - \mu(g)| \leq |\mu_n(g_N) - \mu(g_N)| + |\mu(g) - \mu(g_N)| + \mu_n(|g - g_N|) .$$

Comme g_N vérifie (iii) et est borné, on a: $\mu_n(g_N) \longrightarrow \mu(g_N)$. D'après (ii), on a

$$\sup_{(n)} \mu_n(|g - g_N|) \leq \sup_{(n)} \mu_n(|g| I_{\{|g| > N\}})$$

tend vers 0 quand $N \uparrow \infty$. Enfin $\mu(g_N) \longrightarrow \mu(g)$ d'après (2.17). On en déduit que $\mu_n(g) \longrightarrow \mu(g)$. ∎

(2.18) COROLLAIRE: <u>Supposons que</u> $\mu_n \longrightarrow \mu$ <u>dans</u> $M_{mc}(\bar{\Omega})$. <u>Soit</u> g <u>une fonction mesurable sur</u> $(\bar{\Omega}, \bar{\underline{F}})$ <u>et</u> $A \in \bar{\underline{F}}$ <u>vérifiant les conditions (2.16,i,iii). Soit</u> (g_n) <u>une suite de fonctions mesurables sur</u> $(\bar{\Omega}, \bar{\underline{F}})$ <u>vérifiant</u>:

(i) $\mu_n(|g_n - g| > \varepsilon) \longrightarrow 0$ <u>pour tout</u> $\varepsilon > 0$,

(ii) $\lim_{a \uparrow \infty} \sup_{(n)} \mu_n(|g_n| I_{\{|g_n| > a\}}) = 0$.

<u>On a alors</u> $\mu_n(g_n) \longrightarrow \mu(g)$.

<u>Démonstration</u>. Supposons d'abord que $|g|$ et les $|g_n|$ soient bornées par une même constante N. On a alors

$$|\mu_n(g_n) - \mu(g)| \leq |\mu_n(g) - \mu(g)| + \varepsilon \mu_n(1) + 2N \mu_n(|g_n - g| > \varepsilon) .$$

On obtient le résultat en appliquant (2.16), $\mu_n(1) \longrightarrow \mu(1) < \infty$, et (i).

Passons au cas général où on a seulement (ii). Posons $g_n^N = (g_n \wedge N) \vee (-N)$ et $g^N = (g \wedge N) \vee (-N)$. (ii) implique que $b = \sup_{(n)} \mu_n(|g_n|)$ est fini. Comme la suite $(|g_n^N|, |g^N|)$ vérifie les conditions du début de la démonstration, on montre comme dans la preuve de (2.16) que $\mu(|g|) \leq b$. On a

$$|\mu_n(g_n) - \mu(g)| \leq |\mu_n(g_n^N) - \mu(g^N)| + |\mu(g^N) - \mu(g)| + \mu_n(|g_n - g_n^N|) .$$

En utilisant le début de la démonstration, le fait que $\mu(|g|) \leq b$, et (ii), on vérifie aisément que $\mu_n(g_n) \longrightarrow \mu(g)$. ∎

<u>3 - LES VARIABLES ALEATOIRES FLOUES</u>

§a - Sauf mention contraire, une <u>variable aléatoire</u> (v.a.) est une application mesurable de $(\Omega, \underline{F})$ dans $(\mathscr{X}, \underline{\mathscr{X}})$. Conformément à ce qui est annoncé dans l'introduction, on pose:

(3.1) DEFINITION: Une <u>variable aléatoire floue</u> (v.a. floue) sur l'espace probabilisé $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ est une probabilité R sur $(\bar{\Omega},\bar{\underline{\underline{F}}})$ telle que $R^{\Omega}=P$.

A toute v.a. X (non floue !) on associe la v.a. floue R_X^P définie par (1.3):

$$R_X^P(d\omega,dx) = P(d\omega)\,\varepsilon_{X(\omega)}(dx)\,.$$

On note $\mathcal{R}(P)$ l'ensemble des v.a. floues sur $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$, et par $\mathcal{R}^o(P)$ le sous-ensemble des éléments de $\mathcal{R}(P)$ associés à une v.a. non floue par la formule précédente.

$\mathcal{R}^o(P)$ est une partie propre de $\mathcal{R}(P)$, à moins que $\mathcal{X}$ ne soit réduit à un point. Il y a clairement correspondance biunivoque entre $\mathcal{R}^o(P)$ et l'ensemble $L_{\mathcal{X}}(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ des classes d'équivalence (pour l'égalité P-p.s.) de v.a. sur $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$.

La topologie induite sur $\mathcal{R}(P)$ par $M_{mc}(\bar{\Omega})$ est susceptible de diverses interprétations:

(3.2) Supposons Ω polonais, de tribu borélienne $\underline{\underline{F}}$. D'après (2.9) une famille filtrante (R_α) de $\mathcal{R}(P)$ converge vers une limite R dans $M_{mc}(\bar{\Omega})$ si et seulement si elle converge dans $M_c(\bar{\Omega})$ vers R (et alors $R\in\mathcal{R}(P)$ car $\mathcal{R}(P)$ est trivialement fermé dans $M_{mc}(\bar{\Omega})$).
En particulier si $R_\alpha = R^P_{X_\alpha}$, $R=R^P_X$, on a $R_\alpha \longrightarrow R$ si et seulement si la famille de variables aléatoires $(\omega,X_\alpha(\omega))$ à valeurs dans l'espace polonais $\bar{\Omega}$ <u>converge en loi</u> vers $(\omega,X(\omega))$. ∎

(3.3) Une famille filtrante (R_α) de $\mathcal{R}(P)$ converge vers R dans $M_{mc}(\bar{\Omega})$ si et seulement si $(R_\alpha(A\times .))$ converge vers $R(A\times .)$ dans $M_c(\mathcal{X})$, pour tout $A\in\underline{\underline{F}}$ (proposition (2.4)).
En particulier si $R_\alpha = R^P_{X_\alpha}$, $R=R^P_X$, on a $R_\alpha \longrightarrow R$ si et seulement si (X_α) <u>tend vers</u> X <u>en loi, pour chaque probabilité</u> $P_A(.)=\frac{P(A\cap .)}{P(A)}$.∎

(3.4) PROPOSITION: <u>La suite de v.a.</u> (X_n) <u>converge de manière stable sur</u> $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ <u>si et seulement si la suite</u> $(R^P_{X_n})$ <u>converge dans</u> $M_{mc}(\bar{\Omega})$.

<u>Démonstration</u>. La condition suffisante est triviale. Supposons inversement que (X_n) converge de manière stable. Pour $f\in C_u(\mathcal{X})$, $A\in\underline{\underline{F}}$, on pose $\phi(I_A\otimes f) = \lim E(I_A f(X_n)) = \lim R^P_{X_n}(I_A\otimes f)$. ϕ s'étend en une forme linéaire sur l'espace vectoriel engendré par $B^1_{mc}(\bar{\Omega})$, qui vérifie (2.6,ii) parce que les X_n convergent en loi par hypothèse, et qui vérifie trivialement (2.6,i) car $\phi(I_A\otimes 1)=P(A)$. Il existe donc $\mu\in M(\bar{\Omega})$ telle que $\mu(g)=\phi(g)$ si $g\in B^1_{mc}(\bar{\Omega})$, et d'après (2.4) $R^P_{X_n}$ tend vers μ . ∎

Nous avons souligné dans l'introduction qu'en restriction à $\mathcal{R}^o(P)$, la convergence dans $M_{mc}(\bar{\Omega})$ équivaut à la convergence en probabilité des v. a. non floues associées (résultat dû à Dellacherie [5]). Plus généralement on a la:

(3.5) PROPOSITION: Soit (R_α) une famille filtrante de $M(\bar{\Omega})$ de la forme $R_\alpha = R^P_{X_\alpha}$; soit $R \in M(\bar{\Omega})$ de la forme $R = R^P_X$. Pour que (R_α) converge vers R dans $M_{mc}(\bar{\Omega})$ il faut et il suffit que:

(i) (P_α) converge vers P dans $M_m(\Omega)$;

(ii) $P_\alpha(\delta(X_\alpha,X) > \varepsilon) \longrightarrow 0$ pour tout $\varepsilon > 0$ (δ étant une distance compatible avec la topologie de $\mathfrak{X}$).

Démonstration. (ii) équivaut à

$$E_{P_\alpha}[1 \wedge \delta(X,X_\alpha)] \longrightarrow 0 . \tag{3.6}$$

Supposons d'abord que $R_\alpha \longrightarrow R$. On a évidemment (i) et la fonction $f(\omega,x) = 1 \wedge \delta(X(\omega),x)$ est dans $B_{mc}(\bar{\Omega})$, tandis que $R_\alpha(f)$ égale le premier membre de (3.6), et $R(f) = 0$: on a donc (ii).

Supposons inversement qu'on ait (i) et (ii). Soit $g = I_A \otimes f \in B^1_{mc}(\bar{\Omega})$. Soit $a = \sup|f|$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que: $\delta(x,y) \le \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \le \varepsilon$. Par suite

$$R_\alpha(g) = E_{P_\alpha}[I_A f(X_\alpha)] = E_{P_\alpha}[I_A f(X)] + E_{P_\alpha}[I_A(f(X_\alpha) - f(X))]$$

$$|R_\alpha(g) - E_{P_\alpha}[I_A f(X)]| \le \varepsilon + 2a P_\alpha[\delta(X,X_\alpha) > \eta],$$

tandis que (i) entraine que $E_{P_\alpha}[I_A f(X)]$ converge vers $E_P[I_A f(X)] = R(g)$. Comme ε est arbitraire, (ii) entraine que $R_\alpha(g) \longrightarrow R(g)$, et $R_\alpha \longrightarrow R$ d'après (2.4). ∎

(3.7) COROLLAIRE: L'application: $X \rightsquigarrow R^P_X$ est un homéomorphisme de $L_{\mathfrak{X}}(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ muni de la convergence en probabilité sur $\mathcal{R}^o(P)$ muni de la topologie induite par $M_{mc}(\bar{\Omega})$.

En particulier, $\mathcal{R}^o(P)$ muni de la topologie induite par $M_{mc}(\bar{\Omega})$ est métrisable. Ainsi, l'espace $\mathcal{R}(P)$ constitue-t-il une extension naturelle de $L_{\mathfrak{X}}(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ muni de la convergence en probabilité. Cette dernière topologie n'est guère maniable, du fait notamment qu'on ne dispose pas de critère de compacité. Au contraire on dispose de tels critères dans $\mathcal{R}(P)$ (le prix à payer étant que $\mathcal{R}^o(P)$ n'est pas fermé dans $\mathcal{R}(P)$). En effet, $\mathcal{R}(P)$ étant trivialement fermé dans $M_{mc}(\bar{\Omega})$, on a d'après (2.8):

(3.8) THEOREME: Pour qu'une partie N de $\mathcal{R}(P)$ soit relativement compacte pour la topologie induite par $M_{mc}(\bar{\Omega})$, il faut et il suffit que l'ensemble $\{R^*: R \in N\}$ soit relativement compact dans $M_c(\mathfrak{X})$.

(3.9) COROLLAIRE: <u>Pour que</u> $\mathcal{R}(P)$ <u>soit compact dans</u> $M_{mc}(\bar{\Omega})$, <u>il faut et il suffit que</u> $\mathcal{X}$ <u>soit compact</u>.

<u>Démonstration</u>. La condition nécessaire vient de ce que l'application: $x \rightsquigarrow P\otimes\varepsilon_x$ est un homéomorphisme de $\mathcal{X}$ sur un fermé de $\mathcal{R}(P)$, la condition suffisante découle de (3.8), car si $\mathcal{X}$ est compact, il en est de même de $M_c(\mathcal{X})$. ∎

§b - <u>Désintégration d'une variable floue</u>. Toute $R\in\mathcal{R}(P)$ se factorise ainsi:

(3.10) $$R(d\omega,dx) = P(d\omega)\,Q(\omega,dx)$$

et $R = R_X^P$ si et seulement si $Q(.,dx) = \varepsilon_{X(.)}(dx)$ P-p.s.

Commençons par énoncer un critère de convergence utilisant (3.10). On notera $\underline{\underline{F}}(R)$ la tribu engendrée par les variables $Q(.,B)$, $B\in\underline{\underline{\mathcal{X}}}$. Remarquer que $\underline{\underline{F}}(R)$ est une sous-tribu séparable de $\underline{\underline{F}}$ qui, aux ensembles P-négligeables près, ne dépend pas de la factorisation (3.10). Si $R = R_X^P$ on a aussi $\underline{\underline{F}}(R) = \sigma(X)$ aux ensembles P-négligeables près.

(3.11) PROPOSITION: <u>Soit</u> (R_α) <u>une famille filtrante de</u> $\mathcal{R}(P)$. <u>Pour que</u> $R_\alpha \longrightarrow R$ <u>dans</u> $M_{mc}(\bar{\Omega})$ <u>il faut et il suffit que</u> $R_\alpha(I_A\otimes f) \longrightarrow R(I_A\otimes f)$ <u>pour tous</u> $f\in C_u(\mathcal{X})$ <u>et</u> $A\in[\bigvee_{(\alpha)}\underline{\underline{F}}(R_\alpha)]\bigvee\underline{\underline{F}}(R)$. <u>Dans ce cas, on a</u> $\underline{\underline{F}}(R)\subset\bigvee_{(\alpha)}\underline{\underline{F}}(R_\alpha)$ <u>aux ensembles</u> P-<u>négligeables près</u>.

<u>Démonstration</u>. Seule la condition suffisante est à montrer. On pose $\underline{\underline{F}}' = \bigvee_{(\alpha)}\underline{\underline{F}}(R_\alpha)$ et $\underline{\underline{F}}'' = \underline{\underline{F}}'\bigvee\underline{\underline{F}}(R)$, et on considère les factorisations (3.10): $R_\alpha(d\omega,dx) = P(d\omega)Q_\alpha(\omega,dx)$ et $R(d\omega,dx) = P(d\omega)Q(\omega,dx)$. A l'aide d'approximations uniformes, on voit aisément que $R_\alpha(U\otimes f) \longrightarrow R(U\otimes f)$ pour toutes $f\in C_u(\mathcal{X})$, $U\in B(\Omega,\underline{\underline{F}}'')$.

Soit $f\in C_u(\mathcal{X})$, $A\in\underline{\underline{F}}$ et $U = E(I_A|\underline{\underline{F}}'')$. On a

$$R_\alpha(I_A\otimes f) = E[I_A\,Q\,(.,f)] = E[U\,Q\,(.,f)] = R_\alpha(U\otimes f),$$

et de même $R(I_A\otimes f) = R(U\otimes f)$. On en déduit que $R_\alpha(I_A\otimes f)\longrightarrow R(I_A\otimes f)$, donc $R_\alpha\longrightarrow R$ d'après (2.4). Si de plus on pose $V = E(I_A|\underline{\underline{F}}')$, on voit comme ci-dessus que $R_\alpha(I_A\otimes f) = R\,(V\otimes f)$ pour tout α. Ce qui précède implique que $R_\alpha(I_A\otimes f)\longrightarrow R(I_A\otimes f)$ et que $R_\alpha(V\otimes f)\longrightarrow R(V\otimes f)$; par suite $R(I_A\otimes f) = R(V\otimes f)$, soit

$$E[I_A\,Q(.,f)] = E[E(I_A|\underline{\underline{F}}')\,Q(.,f)]$$

pour tout $A\in\underline{\underline{F}}$ et toute $f\in C_u(\mathcal{X})$. Par suite $Q(.,f)$ est $\underline{\underline{F}}'$-mesurable (aux ensembles P-négligeables près), et $\underline{\underline{F}}(R)\subset\underline{\underline{F}}'$ aux ensembles P-négligeables près. ∎

Si $R\in\mathcal{R}(P)$, on appelle <u>support de</u> R tout ensemble $F\in\bar{\mathcal{F}}$ tel que

$$(3.12) \quad \begin{cases} R(F) = 1 \\ F' \in \overline{\overline{\mathcal{F}}}, \quad R(F') = 1 \longrightarrow P(\{\omega : F_\omega \not\subset F'_\omega\}) = 0 . \end{cases}$$

Lorsque Ω est réduit à un point, on retrouve la notion usuelle de support d'une mesure sur l'espace polonais $\mathcal{X}$. Lorsque $\mathcal{X}$ est réduit à un point, on retrouve la notion de "support", ou "ensemble minimal portant la probabilité" P.

(3.13) PROPOSITION: <u>Soit</u> $R \in \mathcal{R}(P)$ <u>admettant la factorisation (3.10)</u>.

(i) <u>Si</u> F_ω <u>désigne le support de</u> $Q(\omega,.)$ <u>dans</u> $\mathcal{X}$, <u>l'ensemble</u> F <u>de coupes</u> F_ω <u>est un support de</u> R.

(ii) <u>Si</u> F' <u>est un autre support de</u> R, <u>on a</u> $P(\{\omega : F'_\omega \neq F_\omega\}) = 0$.

<u>Démonstration</u>. Soit (G_n) une suite d'ouverts constituant une base de la topologie de $\mathcal{X}$. Par définition du support de $Q(\omega,.)$ on a

$$F_\omega = [\textstyle\bigcup_{n : Q(\omega,G_n)=0} G_n]^c ,$$

de sorte que

$$(3.14) \qquad F = [\textstyle\bigcup_{(n)} \{(\omega,x) : Q(\omega,G_n) = 0 \text{ et } x \in G_n\}]^c .$$

Par suite $F \in \overline{\overline{\mathcal{F}}}$. Il est évident que $R(F) = 1$. Soit $F' \in \overline{\overline{\mathcal{F}}}$ avec $R(F') = 1$. Pour P-presque tout ω on a alors $Q(\omega,F') = 1$, donc $F'_\omega \supset F_\omega$ par définition de F_ω. Donc F vérifie (3.12), et on a (i). Enfin (ii) est évident. ∎

Le résultat suivant, sur la caractérisation du support de la limite d'une suite de v.a. convergeant de manière stable, est essentiellement dû à Aldous [1].

(3.15) PROPOSITION: <u>Soit</u> (X_n) <u>une suite de v.a. sur</u> $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$, <u>convergeant de manière stable vers</u> $R \in \mathcal{R}(P)$ (i.e., $(R^P_{X_n})$ converge vers R dans $M_{mc}(\bar{\Omega})$). <u>Soit</u> F <u>un support de</u> R. <u>Il existe une sous-suite</u> $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ <u>telle que, pour</u> P-<u>presque tout</u> ω, F_ω <u>soit égal à l'ensemble des points limite de la suite</u> $(X_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}'}$.

On pourra comparer ce résultat à l'existence, lorsque (X_n) converge en probabilité vers une v.a. X, d'une sous-suite convergeant p.s. vers X.

<u>Démonstration</u>. D'après (3.13,ii) on peut prendre pour F l'ensemble défini par (3.14). Soit $G(p,n) = \{x : \delta(x,G_p^c) \geq 1/n\}$. On a $G_p = \bigcup_{(m)} G(p,m)$, et si

$$A(p,m) = \{\omega : Q(\omega,G_p) = 0\} \times G(p,m) ,$$

on a $F^c = \bigcup_{p,m} A(p,m)$, tandis que $A(p,m) \in \overline{\overline{\mathcal{F}}}$. On a aussi $R(A(p,m)) = 0$, donc (2.11) entraine que

$$P(\{\omega : X_n(\omega) \in A(p,m)_\omega\}) \quad = \quad R_n(A(p,m)) \xrightarrow[(n)]{} 0 .$$

Un raisonnement classique permet alors de trouver une sous-suite $\mathbb{N}'$ et une partie P-négligeable B de Ω tels que, pour tous $\omega \notin B$, $m,p \in \mathbb{N}$, il existe $N(\omega,p,m) \in \mathbb{N}$ avec $X_n(\omega) \notin A(p,m)_\omega$ pour $n \in \mathbb{N}'$, $n \geq N(\omega,p,m)$. Si $\tilde{F}_\omega$ désigne l'ensemble des points limite de la suite $(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}'}$ on a donc $\tilde{F}_\omega \cap A(p,m)_\omega = \emptyset$ si $\omega \notin B$, soit $\tilde{F}_\omega \subset F_\omega$ pour $\omega \notin B$.

Par ailleurs $F^m = \{(\omega,x) : \inf_{n\in\mathbb{N}',n\geq m} \delta(x,X_n(\omega)) = 0\}$ est dans $\bar{\mathcal{F}}$ et $R_n(F^m) = 1$ si $n \geq m$, $n \in \mathbb{N}'$. D'après (2.11) on a donc $R(F^m) = 1$. D'après (3.12) il existe une partie P-négligeable B' de Ω telle que $F_\omega \subset F^m_\omega$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ si $\omega \notin B'$. Mais $\tilde{F}_\omega = \bigcap_{(m)} F^m_\omega$. On en déduit que $\tilde{F}_\omega = F_\omega$ si $\omega \notin B \cup B'$. ∎

(3.16) REMARQUE: Plus généralement, on pourrait se demander si on n'a pas l'assertion suivante: soit (R_n) une suite de $\mathcal{R}(P)$ convergeant vers R; soit F^n un support de R_n et F un support de R ; il existe une sous-suite $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ telle que pour P-presque tout ω, on ait $F_\omega = \bigcap_{(m)} \overline{[\bigcup_{n\in\mathbb{N}',n\geq m} F^m_\omega]}$.

C'est évidemment faux: prendre $R_n(d\omega,dx) = \varepsilon_{\omega_0}(d\omega)S_n(dx)$, où (S_n) est une suite de probabilités sur $\mathcal{X}$ de supports égaux à $\mathcal{X}$, mais qui converge vers une mesure de Dirac. ∎

Le résultat suivant est évident (utiliser (2.16)).

(3.17) PROPOSITION: <u>Soit</u> (R_n) <u>une suite de</u> $\mathcal{R}(P)$ <u>convergeant vers</u> R <u>dans</u> $M_{mc}(\bar{\Omega})$, <u>avec les factorisations</u> $R_n(d\omega,dx) = P(d\omega)Q_n(\omega,dx)$ <u>et</u> $R(d\omega,dx) = P(d\omega)Q(\omega,dx)$. <u>Soit</u> $P' \ll P$. <u>Si</u> $R'_n(d\omega,dx) = P'(d\omega)Q_n(\omega,dx)$ <u>et</u> $R'(d\omega,dx) = P'(d\omega)Q(\omega,dx)$, <u>la suite</u> (R'_n) <u>converge vers</u> R'.

En particulier si la suite de v.a. (X_n) converge de manière stable sur $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$, elle converge aussi de manière stable sur $(\Omega,\underline{\underline{F}},P')$.

Terminons enfin ce paragraphe par un résultat dont l'idée est due à Meyer [9]. D'après la proposition (2.10), ce résultat est évidemment sans objet si $\underline{\underline{F}}$ est séparable.

(3.18) PROPOSITION: <u>Si</u> (R_n) <u>est une suite relativement compacte dans</u> $\mathcal{R}(P)$ <u>on peut en extraire une sous-suite convergente</u> (autrement dit: toute partie relativement compacte de $\mathcal{R}(P)$ est séquentiellement relativement compacte).

<u>Démonstration</u>. Soit $\underline{\underline{F}}' = \bigvee_{(n)} \underline{\underline{F}}(R_n)$, qui est séparable. Notons P' la restriction de P à $(\Omega,\underline{\underline{F}}')$, R'_n celle de R_n à $(\bar{\Omega},\underline{\underline{F}}'\otimes\underline{\underline{\mathcal{X}}})$. D'après le théorème (2.8), la suite (R'_n) est relativement compacte dans $\mathcal{R}(P')$,

espace des probabilités μ sur $(\bar{\Omega},\underline{\underline{F}}'\otimes\underline{\underline{\mathfrak{X}}})$ telles que $\mu^{\Omega}=P'$. Mais $\mathcal{R}(P')$ est métrisable, donc on peut extraire une sous-suite (R'_{n_k}) qui converge dans $\mathcal{R}(P')$ vers une limite R' admettant la factorisation $R'(d\omega,dx)=P'(d\omega)Q(\omega,dx)$.

Soit alors $R\in\mathcal{R}(P)$ défini par $R(A\times B)=E[I_A\,Q(.,B)]$. Remarquer que $\underline{\underline{F}}(R)\subset\underline{\underline{F}}'$, et par définition de R on a pour tous $A\in\underline{\underline{F}}'$, $f\in C_u(\mathfrak{X})$:

$$R_{n_k}(I_A\otimes f) \;=\; R'_{n_k}(I_A\otimes f) \longrightarrow R'(I_A\otimes f) \;=\; R(I_A\otimes f)\,.$$

D'après la proposition (3.11) on a alors $R_{n_k}\longrightarrow R$ dans $\mathcal{R}(P)$. ∎

§c - <u>Variables floues et variables non floues</u>. Voici d'abord un résultat déjà annoncé plus haut.

(3.19) PROPOSITION: <u>Pour que</u> $\mathcal{R}^o(P)$ <u>soit fermé dans</u> $M_{mc}(\bar{\Omega})$, <u>il faut et il suffit que</u> $\mathfrak{X}$ <u>soit réduit à un point, ou que l'espace</u> $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ <u>soit purement atomique</u>.

<u>Démonstration</u>. Lorsque $\mathfrak{X}$ est réduit à un point, on a $\mathcal{R}^o(P)=\mathcal{R}(P)$, qui est fermé. Supposons donc $\mathfrak{X}$ non réduit à un point.

Supposons d'abord $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ purement atomique, d'atomes (A_n). Soit $(R_\alpha=R^P_{X_\alpha})$ une famille filtrante de $\mathcal{R}^o(P)$ convergeant vers R dans $M_{mc}(\bar{\Omega})$. X_α prend P-p.s. une valeur constante $x(\alpha,n)$ sur A_n, et on a pour $A\in\underline{\underline{F}}$, $f\in C(\mathfrak{X})$:

$$R_\alpha(I_A\otimes f) \;=\; \Sigma_{(n)}\; P(A\cap A_n)\; f(x(\alpha,n))\,,$$

tandis qu'il existe des probabilités Q_n sur $(\mathfrak{X},\underline{\underline{\mathfrak{X}}})$ telles que

$$R(I_A\otimes f) \;=\; \Sigma_{(n)}\; P(A\cap A_n)\; Q_n(f)\,.$$

Comme $R_\alpha\longrightarrow R$, on a $\varepsilon_{x(\alpha,n)}\longrightarrow Q_n$ dans $M_c(\mathfrak{X})$ si $P(A_n)>0$. Donc si $P(A_n)>0$, Q_n ne saurait être qu'une masse de Dirac $Q_n=\varepsilon_{x(n)}$, et si $X(\omega)=x(n)$ pour $\omega\in A_n$ on a $R=R^P_X$.

Supposons que $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ ne soit pas purement atomique. On peut alors construire une suite (X_n) de v.a. prennant seulement deux valeurs x_1 et x_2 de $\mathfrak{X}$, indépendantes, telles que: $\inf_{(n)} P(X_n=x_i)>0$ pour $i=1,2$. On ne peut extraire de (X_n) aucune suite convergeant P-p.s. vers une limite X, donc d'après (3.5) les points limite de la suite $(R^P_{X_n})$ ne sont pas dans $\mathcal{R}^o(P)$. Cependant d'après (3.8) la suite $(R^P_{X_n})$ est relativement compacte, dont $\mathcal{R}^o(P)$ n'est pas fermé. ∎

Nous allons maintenant donner un critère d'appartenance à $\mathcal{R}^o(P)$. Ce critère est fortement inspiré de la situation qu'on rencontre dans la théorie des équations différentielles stochastiques (et notamment du théorème de Yamada et Watanabe sur l'unicité trajectorielle, voir [8]).

Dans l'énoncé suivant, on considère un espace probabilisé auxiliaire $(\tilde{\Omega},\tilde{\underline{\underline{F}}},\tilde{P})$ sur lequel sont définies des variables $\overline{X}$, $\overline{X}'$ à valeurs dans $\overline{\Omega}$: la "loi" de $\overline{X}$ sous $\tilde{P}$ est alors l'image $\tilde{P}\circ\overline{X}^{-1}$ de $\tilde{P}$ sur $(\overline{\Omega},\overline{\underline{\underline{F}}})$. La variable $\overline{X}$ admet deux "composantes" X_1 et X_2 à valeurs dans Ω et dans $\mathscr{X}$ respectivement.

(3.20) THEOREME: Soit $N\subset\mathcal{R}(P)$. Il y a équivalence entre:

(i) N ne contient qu'un seul élément R, qui appartient à $\mathcal{R}^o(P)$;

(ii) si $(\tilde{\Omega},\tilde{\underline{\underline{F}}},\tilde{P})$ est un espace probabilisé quelconque sur lequel sont définies deux v.a. $\overline{X}=(X_1,X_2)$ et $\overline{X}'=(X_1',X_2')$ à valeurs dans $\overline{\Omega}$ et vérifiant $X_1=X_1'$ $\tilde{P}$-p.s. et $\tilde{P}\circ\overline{X}^{-1}\in N$, $\tilde{P}\circ\overline{X}'^{-1}\in N$, alors $\overline{X}=\overline{X}'$ $\tilde{P}$-p.s.

Dans la situation des équations différentielles stochastiques, N représente l'ensemble des solutions faibles (solutions-mesure); une solution-mesure appartenant à $\mathcal{R}^o(P)$ est forte, et (ii) est l'unicité trajectorielle (X_1 est le processus directeur, X_2 et X_2' les processus-solution)

Démonstration. Supposons (i). On a $R=R_X^P$. Soit $\overline{X}$, $\overline{X}'$ deux v.a. sur $(\tilde{\Omega},\tilde{\underline{\underline{F}}},\tilde{P})$ vérifiant $X_1=X_1'$ $\tilde{P}$-p.s., $\tilde{P}\circ\overline{X}^{-1}=\tilde{P}\circ\overline{X}'^{-1}=R$. On a alors

$$\tilde{P}(\{\tilde{\omega}:\ X_2(\tilde{\omega})\neq X\circ X_1(\tilde{\omega})\}) \quad=\quad R(\{\overline{\omega}=(\omega,x):x\neq X(\omega)\}) \quad=\quad 0$$

d'après la forme $R(d\omega,dx)=P(d\omega)\varepsilon_{X(\omega)}(dx)$ de R. On a donc $X_2=X\circ X_1$ $\tilde{P}$-p.s., et de même $X_2'=X\circ X_1'$ $\tilde{P}$-p.s. Comme $X_1=X_1'$ $\tilde{P}$-p.s., on a aussi $\overline{X}=\overline{X}'$ $\tilde{P}$-p.s.

Supposons inversement (ii). Soit $R,R'\in N$ admettant les factorisations:

$$R(d\omega,dx) = P(d\omega)Q(\omega,dx)\ ,\qquad R'(d\omega,dx) = P(d\omega)Q'(\omega,dx)\ .$$

Considérons l'espace probabilisé filtré:

$$\begin{cases} \tilde{\Omega} = \Omega\times\mathscr{X}\times\mathscr{X}, & \tilde{\underline{\underline{F}}} = \underline{\underline{F}}\otimes\underline{\underline{\mathscr{X}}}\otimes\underline{\underline{\mathscr{X}}} \\ \tilde{P}(d\omega,dx_1,dx_2) & = P(d\omega)\ Q(\omega,dx_1)\ Q'(\omega,dx_2)\ , \end{cases}$$

avec

$$\overline{X} = (X_1,X_2)\ ,\quad \text{où } \overline{X}(\omega,x_1,x_2) = (\omega,x_1)$$

$$\overline{X}' = (X_1',X_2')\ ,\quad \text{où } \overline{X}'(\omega,x_1,x_2) = (\omega,x_2)\ .$$

Par construction $X_1'=X_1$, $\tilde{P}\circ\overline{X}^{-1}=R$ et $\tilde{P}\circ\overline{X}'^{-1}=R'$. D'après (ii) on a alors $\overline{X}=\overline{X}'$ $\tilde{P}$-p.s., donc $R=R'$, ce qui prouve que N ne contient qu'un seul élément R. En outre, $\tilde{P}$ ne charge que l'ensemble $\{(\omega,x,x):x\in\mathscr{X},\omega\in\Omega\}$. Donc en dehors d'un ensemble P-négligeable A, $Q(\omega,dx)Q(\omega,dx')$ ne charge que la diagonale $\{(x,x):x\in\mathscr{X}\}$. Mais ceci n'est possible que si, pour tout $\omega\notin A$, $Q(\omega,.)$ est une masse de Dirac en un point $X(\omega)\in\mathscr{X}$. En choisissant arbitrairement $X(\omega)$ pour $\omega\in A$, on définit une variable aléatoire X telle que $R=R_X^P$, et on a (i).■

BIBLIOGRAPHIE

1 D.J. ALDOUS: Limit Theorems for subsequences of arbitrarily-dependent sequences of random variables. Z. für Wahr. 40, 59-82, 1977.

2 D.J. ALDOUS, G.K. EAGLESON: On mixing and stability of limit theorems. Ann. Probability. 6, 325-331, 1978.

3 J.R. BAXTER, R.V. CHACON: Compactness of stopping times. Z. für Wahr. 40, 169-182, 1977.

4 P. BILLINGSLEY: Convergence of probability measures. Wiley and Sons: New-York, 1968.

5 C. DELLACHERIE: Convergence en probabilité et topologie de Baxter-Chacon. Sém. Probab. Strasbourg XII, Lect. Notes in Math. 649, 424, Springer: Berlin, 1978.

6 C. DELLACHERIE, P.A. MEYER: Probabilités et potentiel I (2ème édition) Hermann: Paris, 1976.

7 J. JACOD, J. MEMIN: Existence of weak solutions for stochastic differential equations driven by semimartingales. A paraitre dans Stochastics.

8 J. JACOD, J. MEMIN: Weak and strong solutions of stochastic differential equations: existence and stability. A paraitre, Proc. Durham Conf. 1980.

9 P.A. MEYER: Convergence faible et compacité des temps d'arrêt, d'après Baxter et Chacon. Sém. Probab. Strasbourg XII, Lect Notes in Math. 649, 411-423, Springer: Berlin, 1978.

10 K.R. PARTHASARATHY: Probability measures on metric spaces. Academic Press: New-York, 1967.

11 J. PELLAUMAIL: Sur l'intégrale stochastique et la décomposition de Doob-Meyer. Astérisque 9, 1973.

12 J. PELLAUMAIL: Convergence en règle. C.R.A.S. 290 (A) 289-291, 1980.

13 J. PELLAUMAIL: Solutions faibles pour des processus discontinus. C.R.A.S. 290 (A) 431-433, 1980.

14 A. RENYI: On stable sequences of events. Sankhya Ser. A, 25, 293-302, 1963.

15 A. RENYI: Probability Theory. North Holland: Amsterdam, 1970.

16 M. SCHAL: Conditions for optimality in dynamic programming and for the limit of n-stages optimal policies to be optimal. Z. für Wahr. 32, 179-196, 1975.

Département de Mathématiques et Informatique

Université de Rennes

35 042 - RENNES - Cedex