

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MARC YOR

Sur certains commutateurs d'une filtration

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 526-528

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__526_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

1. Énoncé du problème.

$\mathbf{X} = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ est un espace de probabilité filtré usuel. On suppose \mathcal{F}_0 triviale, et $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty$ (déf $\bigvee_t \mathcal{F}_t$).

On se pose la question de caractériser toute sous-tribu \mathcal{G} de \mathcal{F} , supposée (\mathcal{F}, P) complète, telle que :

(C) pour tout (\mathcal{F}_t) temps d'arrêt T , $E^{\mathcal{F}_T} E^{\mathcal{G}} = E^{\mathcal{G}} E^{\mathcal{F}_T}$, la notation $E^{\mathcal{U}}$ désignant l'opérateur d'espérance conditionnelle (sous P) par rapport à la tribu \mathcal{U} , défini sur $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Ce problème a été complètement résolu sous l'hypothèse suivante ([1] et [2])

(T) : \mathbf{X} admet une martingale totalisatrice, c'est-à-dire :

il existe une (\mathcal{F}_t) martingale de carré intégrable (M_t) telle que toute variable $U \in L^2(\mathcal{F}_\infty, P)$ puisse s'écrire $U = E(U) + \int_0^\infty u_s dM_s$, avec (u_t) processus (\mathcal{F}_t) prévisible tel que $E[\int_0^\infty u_s^2 d\langle M \rangle_s] < \infty$.

On résoud ici le problème précédent, sans aucune hypothèse sur \mathbf{X} , répondant ainsi à une question de K.Carne et N.Varopoulos.

2. Rappels (d'après [2]).

On dit que \mathcal{G} vérifie l'hypothèse (\mathcal{H}_u) (u : pour universel) relativement à \mathbf{X} si, pour toute probabilité Q équivalente à P (sur \mathcal{F}), et tout $t \geq 0$, on a :

$$E_Q^{\mathcal{F}_t} E_Q^{\mathcal{G}} = E_Q^{\mathcal{G}} E_Q^{\mathcal{F}_t}.$$

Théorème (R1) : (\mathcal{H}_u) est vérifiée si, et seulement si, il existe un (\mathcal{F}_t) temps d'arrêt S tel que $\mathcal{F}_{S-} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}_S$.

Lemme (R2) : Soient (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilité complet, \mathcal{G} et \mathcal{U} deux sous-tribus de \mathcal{F} , supposées (\mathcal{F}, P) complètes.

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1) pour toute probabilité Q équivalente à P (sur \mathcal{F}), $E_Q^{\mathcal{G}} E_Q^{\mathcal{U}} = E_Q^{\mathcal{U}} E_Q^{\mathcal{G}}$.

2) (i) $E_P^{\mathcal{G}} E_P^{\mathcal{U}} = E_P^{\mathcal{U}} E_P^{\mathcal{G}}$

et (ii) pour toutes $g \in b\mathcal{G}$, $u \in b\mathcal{U}$, $(g - E_P^{\mathcal{U}}(g))u \in b\mathcal{G}$.

3) Résolution du problème.

Si $x \in L^1(\mathcal{F}, P)$, on note $(x_t)_{t \geq 0}$ une version càdlàg de $(E_P(x/\mathcal{F}_t))$.

Soit donc \mathcal{G} vérifiant (C). De façon à pouvoir appliquer le théorème (R1), on va montrer que la seconde assertion du lemme (R2) est vérifiée avec $\mathcal{U} = \mathcal{F}_t$, pour tout $t \geq 0$.

(i) est vérifiée (prendre $T=t$ dans (C)).

Il reste à montrer (ii). Fixons t , et associons à $g \in b\mathcal{G}$, $u \in b\mathcal{U}$, les martingales :

$$M_s = g_s - g_{t \wedge s} ; N_s = u_{t \wedge s} \quad (s \geq 0).$$

$$\text{On a : } (g - E_P^{\mathcal{U}}(g))u = \int_0^{\infty} N_{s-} dM_s + \int_0^{\infty} M_{s-} dN_s + [M, N]_{\infty}.$$

Le processus (M_s) étant nul sur $[0, t]$, et (N_s) constant sur $[t, \infty[$, on a :

$$(g - E_P^{\mathcal{U}}(g))u = \int_0^{\infty} N_{s-} dM_s = \int_t^{\infty} N_{s-} dg_s.$$

En conséquence, (ii) sera, a fortiori, vérifiée, une fois le lemme suivant obtenu.

Lemme : Supposons que \mathcal{G} vérifie (C).

Soit $x \in L^2(\mathcal{F}, P)$, et $g = E^{\mathcal{G}}(x)$.

Alors, pour tout processus prévisible borné (p_s) , on a :

$$E^{\mathcal{G}} \left[\int_0^{\infty} p_s dx_s \right] = \int_0^{\infty} p_s dg_s, \quad \text{P.p.s.}$$

Démonstration du lemme : L'égalité cherchée découle immédiatement de (C) lorsque p est un processus prévisible élémentaire, c'est-à-dire un processus de la forme $p = \sum \lambda_i 1_{]S_i, S_{i+1}[}$, avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$, et (S_i) une suite finie, croissante, de (\mathcal{F}_t) temps d'arrêt.

Le cas général s'en déduit en approchant p , processus prévisible borné, dans $L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{P}, d\langle x, \cdot \rangle_s + d\langle g, \cdot \rangle_s)$ par une suite de processus prévisibles élémentaires, bornés (\mathcal{P} désigne la tribu prévisible sur $\Omega \times \mathbb{R}_+$, associée à (\mathcal{F}_t)). \square

On peut maintenant énoncer le

Théorème : une sous-tribu \mathcal{G} de \mathcal{F} , (\mathcal{F}, P) complète, vérifie (C) si, et seulement si il existe un (\mathcal{F}_t) temps d'arrêt S tel que

$$\mathcal{F}_{S-} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}_S.$$

Démonstration du théorème :

- Les arguments précédents montrent, à l'aide du théorème (R1), que si \mathcal{G} vérifie (C), il existe un (\mathcal{F}_t) temps d'arrêt S tel que $\mathcal{F}_{S-} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}_S$.

- Inversement, supposons l'existence d'un tel temps d'arrêt S . Soit maintenant T un temps d'arrêt, et $f_T \in L^1(\mathcal{F}_T, P)$. On a :

$$E^{\mathcal{G}}(f_T) = E^{\mathcal{G}}[f_T 1_{(T < S)} + f_T 1_{(S \leq T)}]$$

Les processus $f_T 1_{]T, \infty[}$ et $1_{]0, T]}$ étant prévisibles, les variables $f_T 1_{(T < S)}$ et $1_{(S \leq T)}$ sont \mathcal{F}_{S-} mesurables. On a donc, d'après l'hypothèse :

$$E^{\mathcal{G}}(f_T) = f_T 1_{(T < S)} + E^{\mathcal{G}}(f_T) 1_{(S \leq T)}.$$

Toujours d'après l'hypothèse, $E^{\mathcal{G}}(f_T)$ est \mathcal{F}_S -mesurable, et finalement, $E^{\mathcal{G}}(f_T)$ est \mathcal{F}_T mesurable. \square

Remarques :

(1) Ainsi, les propriétés (C) et (\mathcal{H}_u) sont équivalentes, ce qui ne semble pas immédiat a priori.

(2) Si (T) est vérifiée, et S est un (\mathcal{F}_t) temps d'arrêt, il découle de [1] et [2] que les tribus \mathcal{G} , (\mathcal{F}, P) complètes, comprises entre \mathcal{F}_{S-} et \mathcal{F}_S , sont les tribus : $\mathcal{G}_B = \{C \in \mathcal{F}_S \mid C_{S-} \in \mathcal{F}_{S-}, C \cap B = C_{S-} \cap B\}$ où $B \in \mathcal{F}_{S-}$ est tel que S_B soit prévisible.

Corollaire :

Si toute (\mathcal{F}_t, P) martingale est continue, les seules sous-tribus \mathcal{G} de $\mathcal{F}, (\mathcal{F}, P)$ complètes, qui vérifient (C), sont les tribus \mathcal{F}_S , avec S (\mathcal{F}_t) temps d'arrêt.

Références :

- [1] M.Yor : Remarques sur la représentation des martingales comme intégrales stochastiques.
Sém. Proba. Strasbourg XI, Lect. Notes in Maths 581 (1977)
- [2] T.Jeuin et M.Yor : Nouveaux résultats sur le grossissement des tribus.
Ann. Scient. ENS. 4ième série, t.11, 1978, p.429-443.