SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CHRISTOPHE STRICKER

Quasi-martingales et variations

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 493-498
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__493_0>

QUASIMARTINGALES ET VARIATIONS

par C. Stricker

La notion de quasimartingale s'est révélée très fructueuse au cours des dernières années. C'est le moyen le plus commode pour montrer qu'un processus est une semimartingale sans avoir à le décomposer explicitement. Dans cette note nous nous proposons de donner quelques précisions sur le calcul de la variation des quasimartingales.

1. QUELQUES RAPPELS

Soit $(\Omega,\mathcal{F}_\infty,(\mathcal{F}_t),P)$ un espace probabilisé filtré vérifiant les conditions habituelles. Nous désignons par $\mathcal{O}$ et $\mathcal{P}$ les tribus optionnelle et prévisible. Tous les processus considérés sont supposés nuls à l'infini.

DEFINITION 1.1. <u>On dit qu'un processus</u> $X = (X_t)_{t\geq 0}$ <u>est une quasimartingale par rapport à la filtration</u> $(\mathcal{F}_t)$ <u>si</u> X <u>est adapté, si</u> $E|X_t| < +\infty$ <u>pour tout</u> t <u>et si</u> $\mathrm{Var}(X) = \sup E[\sum_{i=1}^{n-1} | E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}]|]$ <u>est finie, le sup étant pris sur l'ensemble des subdivisions</u> $0 = t_o < t_1 < \ldots < t_n < +\infty$.

La décomposition de Rao est le résultat fondamental sur les quasimartingales : toute quasimartingale est la différence de deux surmartingales positives uniques X' et X'' telles que $\mathrm{Var}(X) = E[X'_0] + E[X''_0]$. Ainsi la variation de la quasimartingale n'augmente pas si on remplace les subdivisions ordinaires par des subdivisions aléatoires construites au moyen de temps d'arrêt. L'objet du paragraphe suivant est de montrer qu'on peut se restreindre à des temps d'arrêt engendrant $\mathcal{O}$, mais auparavant nous démontrons un petit lemme de théorie générale des processus.

2. UN PETIT LEMME DE THEORIE GENERALE DES PROCESSUS

LEMME 2.1. Soient X et Y deux processus optionnels (resp. prévisibles) continus à droite et $\mathcal{J}$ une famille de temps d'arrêt, telle que la tribu $\sigma(\mathcal{J})$ engendrée par les intervalles stochastiques $[\alpha,\beta[$ (resp. $]\alpha,\beta]$), α et β appartenant à $\mathcal{J}$, soit la tribu optionnelle (resp. prévisible) aux ensembles évanescents près. Si $X_\alpha = Y_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathcal{J}$, alors X et Y sont indistinguables.

DEMONSTRATION. Si $\{X \neq Y\}$ n'est pas évanescent, il existe d'après le théorème de section un temps d'arrêt T (resp. prévisible) tel que $P[Y_T > X_T] > 0$ ou $P[Y_T < X_T] > 0$. Supposons par exemple que $P[Y_T > X_T] > 0$ et notons $U = \inf\{t \geq T\ ,\ X_t \geq Y_t\}$. Comme $X_\alpha = Y_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathcal{J}$, aucun bout de graphe de temps d'arrêt de $\mathcal{J}$ ne passe dans $[T,U[$ et par conséquent pour tout α,β appartenant à $\mathcal{J}$, $[\alpha,\beta[\ \cap\ [T,U[\ = \{\beta > T \geq \alpha\} \times [T,U[$. Ainsi les éléments de $\sigma(\mathcal{J})$ sont de la forme : $K \cap [0,T[$, $K \cap [U,+\infty[$ ou $A \times [T,U[$ avec $K \in \mathcal{O}$ et $A \in \mathcal{F}_T$, ce qui est absurde puisque $\sigma(\mathcal{J}) = \mathcal{O}$. Dans le cas prévisible on introduit aussi les temps d'arrêt T et U et on note que U est prévisible car c'est le début d'un ensemble prévisible fermé à droite. Les éléments de $\sigma(\mathcal{J})$ seront de la forme : $K \cap [0,T]$, $K \cap [U,+\infty[$ où $A \times]T,U[$ avec $K \in \mathcal{P}$ et $A \in \mathcal{F}_T$, ce qui est aussi absurde car $\sigma(\mathcal{J}) = \mathcal{P}$.

Voici une première application de ce lemme.

PROPOSITION 2.2. Soient X un processus continu à droite adapté et $\mathcal{J}$ une famille de temps d'arrêt, stable pour $\vee$ et $\wedge$, vérifiant $\sigma(\mathcal{J}) = \mathcal{O}$. Alors X est une quasimartingale si et seulement si X_T est intégrable pour tout $T \in \mathcal{J}$ et $\mathrm{Var}(X,\mathcal{J}) = \sup_\sigma E[\sum_{i=0}^{n-1} | E[X_{T_{i+1}} - X_{T_i} \mid \mathcal{F}_{T_i}]|$ est finie, où $\sigma = (T_0,\dots,T_n)$ est une suite finie croissante d'éléments de $\mathcal{J}$. De plus $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(X,\mathcal{J})$.

DEMONSTRATION. D'après [1] il existe une «quasimartingale forte» Z non nécessairement continue à droite qui coïncide avec X sur $\mathcal{J}$. Démontrons qu'elle est continue à droite. La régularisée à droite de Z (que nous noterons Y) est encore une quasimartingale. Pour montrer que X et Y sont indistinguables il suffit d'établir que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$ et tout temps d'arrêt T, $P[Y_T > X_T + \alpha] = P[Y_T < X_T - \alpha] = 0$. Raisonnons par l'absurde et supposons par exemple que $P[Y_T > X_T + \alpha] > 0$. Soit $U = \inf\{t > T\,,\ Z_t \leq X_t + \frac{\alpha}{2}\}$. Comme $P[Y_T > X_T + \alpha] > 0$, on a aussi $P[Y_T > X_T + \alpha\,,\ U > T] > 0$. L'égalité $Z_\beta = X_\beta$ pour tout $\beta \in \mathcal{T}$ entraîne qu'aucun bout de graphe de temps d'arrêt de $\mathcal{T}$ ne passe dans $\{Y_T > X_T + \alpha\} \times]T,U]$, ce qui est absurde. Ainsi X et Y sont indistinguables et X est une quasimartingale. Quant à l'égalité $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(X,\mathcal{T})$ elle résulte aisément de la proposition 21 de [1].

REMARQUE 2.3. **Chemin faisant nous avons amélioré le lemme. Si X et Y sont deux processus optionnels qui coïncident sur $\mathcal{T}$ et admettent des limites à droite, alors leurs régularisées à droite sont indistinguables. On a le même résultat dans le cas prévisible avec les régularisées à gauche.**

3. VARIATION RELATIVE A LA FILTRATION $(\mathcal{F}_{t-})$

Nous nous proposons maintenant de retrouver directement (sans utiliser la décomposition de Rao) un résultat établi dans [2].

PROPOSITION 3.1. Soit X un processus continu à droite tel que X_t soit intégrable pour tout t et $\mathrm{Var}_-(X) = \sup E[\sum_{i=0}^{n-1} |E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_i-}]|] < +\infty$, le sup étant pris sur l'ensemble des subdivisions finies $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$. Alors X est une quasimartingale et $\mathrm{Var}\,X = \mathrm{Var}_-X$.

Pour démontrer cette proposition nous aurons besoin d'un lemme plus ou moins classique. Désignons par $\mathcal{H}$ la tribu sur Ω engendrée par X, qui est séparable en vertu de la continuité à droite de X.

LEMME 3.2. Il existe un ensemble dénombrable $D \subset \mathbb{R}^+$ tel que pour toute variable aléatoire intégrable Y de $\mathcal{H}$, l'application $t \to E|E[Y|\mathcal{F}_t]|$ soit continue en dehors de D.

DEMONSTRATION. Comme $\mathcal{H}$ est séparable, l'espace de Banach $\mathcal{L}^1(\Omega,\mathcal{H},P)$ est aussi séparable. Soit (Y_n) une suite d'éléments de $\mathcal{L}^1(\Omega,\mathcal{H},P)$ dense dans cet espace. Il existe un ensemble dénombrable D tel que toutes les applications croissantes $t \to E|E[Y_n \mid \mathcal{F}_t]|$ soient continues en dehors de D. Par ailleurs d'après l'inégalité de Doob, $\lambda P[\sup_t \mid E[Y - Y_k \mid \mathcal{F}_t]| > \lambda] \leq E|Y - Y_k|$, si bien que l'application croissante $t \to E|E[Y \mid \mathcal{F}_t]|$ est aussi continue en dehors de D et le lemme lemme est établi.

La démonstration de la proposition 3.1. est alors à peu près évidente. En effet d'après le lemme 3.2. $Var_-(X,\mathbb{R}^+ - D) = Var(X,\mathbb{R}^+ - D) = Var(X)$ car X est continu à droite. Donc X est une quasimartingale et la proposition 3.1. est démontrée.

REMARQUE 3.3. L'hypothèse de la continuité à droite (éventuellement en probabilité) est essentielle. Il est aisé de construire des exemples de processus optionnels bornés X tels que $Var_-(X) < +\infty$ et $Var(X) = +\infty$. Il existe aussi des quasimartingales fortes telles que $Var_-(X) < Var(X)$.

PROPOSITION 3.4. Soient X un processus adapté, continu à droite et D un ensemble dense dans $\mathbb{R}^+$. Si $Var_-(X,D) < +\infty$ et si pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et toute suite (t_n) d'éléments de D tendant en décroissant vers t, (X_{t_n}) est uniformément intégrable, alors X est une quasimartingale et $Var_-(X,D) = Var(X)$.

DEMONSTRATION. Soit σ la subdivision $0 < t_o < t_1 < \dots < t_n$. Choisissons une suite finie (u_i) de D vérifiant $t_i < u_i < t_{i+1}$ pour tout i et posons $A_i = \{E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_i}] > 0\}$. On a :

$$E|E[X_{u_{i+1}} - X_{u_i} | \mathcal{F}_{u_{i-}}]| \geq E|E[X_{u_{i+1}} - X_{u_i} | \mathcal{F}_{t_i}]|$$

$$\geq |E[(X_{u_{i+1}} - X_{u_i})1_{A_i}]| + |E[(X_{u_{i+1}} - X_{u_i})1_{A_i^c}]| .$$

Faisons maintenant tendre chaque u_i vers t_i. En vertu de l'intégrabilité uniforme, X_{u_i} tend vers X_{t_i} dans $\mathcal{L}^1$ et il en résulte que $\mathrm{Var}(X) \leq \mathrm{Var}_-(X,D)$ Comme $\mathrm{Var}(X) \geq \mathrm{Var}_-(X,D)$ pour tout processus X, on en déduit que X est une quasimartingale et que $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}_-(X)$.

4. UNE REMARQUE SUR LES FONCTIONS A VARIATION BORNEE

Meyer [3] a posé récemment la question suivante : si X est un processus et si pour toute fonction continue bornée les sommes de Riemann $\sum_i f(X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$ convergent lorsque le pas de la subdivision tend vers 0, que peut-on dire sur le processus X ? Voici une réponse partielle dans le cas continu et déterministe.

PROPOSITION 4.1. Soit a_s une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Si pour toute fonction continue bornée φ sur $\mathbb{R}$, les sommes de Riemann $\sum_i \varphi(a_{s_i})(a_{s_{i+1}} - a_{s_i})$ convergent lorsque le pas de la subdivision tend vers 0, alors a est à variation bornée sur $\mathbb{R}$.

DEMONSTRATION. Soit E l'espace de Banach des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme. Les formes linéaires

$$H_\tau : E \to \mathbb{R}$$
$$\varphi \to \sum_i \varphi(a_{s_i})(a_{s_{i+1}} - a_{s_i})$$

sont continues, τ désignant la subdivision $s_0 < s_1 < \ldots < s_n$ de $[0,+\infty[$. D'après le théorème de Barnach-Steinhaus, $\lim H_\tau$ est aussi continue et $M = \sup_{\varphi\in E,\ \|\varphi\|\leq 1} (\sup_\tau |H_\tau(\varphi)|)$ est fini. Il s'agit maintenant de démontrer que $\sum_i |a_{s_{i+1}} - a_{s_i}| \leq M$. Si tous les a_{s_i} sont distincts on peut évidemment choisir une fonction continue φ avec $\|\varphi\| = 1$ et $\varphi(a_{s_i}) = \mathrm{sign}(a_{s_{i+1}} - a_{s_i})$ si bien que $\sum_i |a_{s_{i+1}} - a_{s_i}| \leq M$. Sinon on se ramène à la situation précédente de la manière suivante : soit n le nombre d'éléments de la subdivision τ . On construit par récurrence une nouvelle suite (s'_p) en posant $s'_1 = s_1$ et $\varphi(a_{s_1}) = \mathrm{sign}(a_{s_2} - a_{s_1})$. Supposons s'_i et $\varphi(a_{s'_i})$ construits jusqu'à l'ordre p . Si $a_{s_{p+2}} = a_{s_{p+1}}$ on prend $\varphi(a_{s_{p+1}})$ quelconque (mais quand même compatible avec les valeurs précédentes) et on pose $s'_{p+1} = s_{p+1}$. Si $a_{s_{p+2}} \neq a_{s_{p+1}}$ on peut choisir s'_{p+1} tel que :

i) $a_{s'_{p+1}} \neq a_{s_i}$ et $a_{s'_{p+1}} \neq a_{s'_i}$ pour tout $i = 1,\dots,p$

ii) $|a_{s'_{p+1}} - a_{s_{p+1}}| < \frac{\varepsilon}{n}$ $\varepsilon > 0$ fixé.

On pose $\varphi(a_{s'_{p+1}}) = \mathrm{sign}(a_{s_{p+2}} - a_{s'_{p+1}})$ et en considérant la subdivision obtenue en mélangeant les suites (s_p) et (s'_p) on montre aisément que :

$\sum_i |a_{s_{i+1}} - a_{s_i}| \leq M + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.

=:=:=:=:=:=:=:=

REFERENCES

[1] DELLACHERIE C., LENGLART E. : Sur les problèmes de régularisation, de recollement et d'interpolation en théorie des martingales. **Dans ce volume.**

[2] DELLACHERIE C., MEYER P.A. : Probabilités et potentiel. Chapitre V à VIII (Herrmann, Paris 1980).

[3] MEYER P.A. : Une question de théorie des processus. **Dans ce volume.**