Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Christophe Stricker

Sur deux questions posées par Schwartz

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 490-492

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__490_0>

SUR DEUX QUESTIONS POSEES PAR L. SCHWARTZ

par C. Stricker

Dans [1] SCHWARTZ a montré la proposition suivante :

Soient X une semimartingale continue, A un ouvert de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) X est croissante par morceaux sur A.

2) X est équivalente sur A à un processus adapté càdlàg croissant.

Si X n'est pas continue, 2) ⇒ 1) est toujours trivialement vraie, mais 1) n'implique pas 2). Voici un contre-exemple.

Soient $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t),P)$ un espace probabilisé filtré et X un processus. On dit que X est croissant par morceaux (resp. équivalent à un processus Y) sur un ouvert aléatoire A si pour presque tout ω et pour tout intervalle $[a,b]$ contenu dans la coupe $A(\omega)$ de A, $X(\omega)$ est croissant (resp. $X(\omega)-Y(\omega)$ est constant) sur $[a,b]$. Supposons qu'il existe une suite strictement croissante de temps d'arrêt (T_n) totalement inaccessibles à valeurs dans $[0,1]$. Soit X la martingale de carré intégrable purement discontinue dont les sauts sont : $\Delta N_{T_i} = \frac{1}{i}$. Notons B^i le processus croissant : $B^i = \frac{1}{i} 1_{[T_i,+\infty[}$ et soit $\tilde{B}^i$ sa projection duale prévisible. Sur chaque intervalle $[T_i,T_{i+1}[$, $N_t = N_{t_i} - \tilde{B}^{i+1}_t$. Ainsi la martingale $X = -N$ est croissante par morceaux sur l'ouvert $A = \bigcup_i]T_i,T_{i+1}[$ mais il n'existe pas de processus croissant adapté C équivalent à X sur A. En effet, raisonnons par l'absurde et supposons que C existe. Chaque $\tilde{B}^i$ est croissant sur $[T_{i-1},T_i[$, continu au point T_i, nul avant T_{i-1} et constant après T_i. Or $C \geq 1_A \cdot C = \sum_i \tilde{B}^i$ qui est prévisible et croissant, donc localement intégrable. Par arrêt nous pouvons supposer que $E[1_A \cdot C_\infty] < \infty$. Comme $\tilde{B}^i$ est la projection duale prévisible de B_i, il en résulte que $E[1_A \cdot C_\infty] = E[\sum_i B_\infty^i]$; donc $\sum_i B_\infty^i$ converge, ce qui est absurde car $\sum_i \Delta N_{T_i} = +\infty$!

Ce contre-exemple permet de répondre par la négative à une deuxième question de SCHWARTZ [2] . Est-ce qu'une semimartingale X définie sur $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ qui est continue sur un ouvert aléatoire A est équivalente (sur A) à une semimartingale continue ? Pour cela il suffit de prendre par exemple la filtration naturelle d'un processus de Poisson et de remplacer l'intervalle $[0,1]$ par $[0,+\infty]$. Toutes les martingales locales sont purement discontinues, et donc les seules semimartingales continues sont les processus adaptés continus à variation bornée. Reprenons la semimartingale X et l'ouvert A précédents et supposons que X soit équivalente sur A à un processus à variation bornée C . Dans ce cas $1_A \cdot C = \sum_i \tilde{B}_i$, ce qui est absurde !

Toutefois si l'ouvert A est accessible on a une réponse positive.

PROPOSITION 1. <u>Soit</u> X <u>une semimartingale sur</u> $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ <u>qui est continue sur un ouvert accessible</u> A . <u>Alors elle est équivalente sur</u> A <u>à une semimartingale continue</u>.

DEMONSTRATION. Pour tout rationnel h nous posons $D_h = \inf\{t \geq h,\ t \notin A\}$. Comme A est un ouvert accessible, D_h est un temps d'arrêt accessible. Ainsi il existe une suite (T_n) de temps d'arrêt prévisibles à graphes deux à deux disjoints qui recouvrent les graphes des temps d'arrêt D_h lorsque h parcourt les rationnels. Soient $B = \bigcup_{h\in\mathbb{Q}}]h,D_h]$, $C = \bigcup_n [T_n]$ et $Y = 1_{B\setminus C} \cdot X$.

La semimartingale Y est continue : en effet si T est un temps d'arrêt , $\Delta Y_T = 1_{B\setminus C}(T)\, \Delta X_T = 0$ car $B\setminus C$ est inclus dans A et X est continue sur A . Il reste à vérifier que X est bien équivalente à Y sur A . Restreignons la loi P à l'ensemble $\{D_h > u > h\}$, h et u étant deux rationnels fixés. Pour $h \leq t \leq u$, $Y_t - Y_h = X_t - X_h - \sum_n \Delta X_{T_n} 1_{\{t \geq T_n > h\}}$, la série convergeant en probabilité. Comme X est continue sur $[h,u]$, $Y_t - Y_h = X_t - X_h$ et les deux semimartingales X et Y sont équivalentes.

PROPOSITION 2. Soit X une semimartingale accessible. Il existe un plus grand ouvert A tel que X soit équivalente sur A à une semimartingale continue.

DEMONSTRATION. Pour tout h rationnel, nous posons : $D_h = \inf\{t \geq h, X_t \neq X_{t-}\}$ et $A = \bigcup_{h \in \mathbb{Q}^+}]h,D_h[$. Comme A est le plus grand ouvert sur lequel X est continue, il suffit de démontrer que X est équivalente sur A à une semimartingale continue Y . Il existe une suite de temps d'arrêt prévisibles (T_n) qui recouvre la partie accessible des temps d'arrêt D_h lorsque h parcourt les rationnels positifs. Soient $B = \bigcup_h]h,D_h]$, $C = \bigcup_n [T_n]$ et $Y = 1_{B \setminus C} \cdot X$. On vérifie comme avant que la semimartingale Y est continue car X ne saute qu'à des temps d'arrêt accessibles. De même X est équivalente à Y sur A .

=:=:=:=:=:=:

REFERENCES

[1] SCHWARTZ L. : Semimartingales sur des variétés et martingales conformes sur des variétés analytiques complexes. Lecture Notes in M. n° 780 page 26 (1980).

[2] SCHWARTZ L. : Article à paraître.