SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CHANTHA YOEURP

Sur la dérivation stochastique au sens de Davis

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 399-412

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__399_0>

SUR LA DERIVATION STOCHASTIQUE AU SENS DE M.H.A. DAVIS

CH. YOEURP(*)

Isaacson [2] a montré que si (B_t) est un mouvement brownien et (H_t) est un processus prévisible continu, alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, le rapport $\frac{1}{B_{t+\varepsilon}-B_t}\int_t^{t+\varepsilon} H_s dB_s$ converge en probabilité vers H_t, quand $\varepsilon \to 0$. Nous avons donné un contre-exemple ([7]) prouvant que cette propriété devient fausse, en général, si on remplace le mouvement brownien par une martingale continue quelconque.

De son côté, M.H.A. Davis [1] a introduit une autre notion de dérivation stochastique par rapport à un mouvement brownien, en étudiant l'expression suivante :

$$\frac{1}{B_{T_t^\varepsilon}-B_t}\int_t^{T_t^\varepsilon} H_s dB_s, \text{ où } \quad T_t^\varepsilon = \mathrm{Inf}\{s > t \ / \ |B_s-B_t| \geq \varepsilon\}$$

L'objet de cet article est l'étude de cette notion de dérivation dans le cas d'une semi-martingale continue.

Notations et rappels :

On travaille sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t),P)$ vérifiant les conditions habituelles. On utilise les notations suivantes :

$\mathcal{L}^c$: espace des martingales locales continues.

$\mathcal{V}$: espace des processus continus à droite, adaptés, à variation finie sur tout compact.

$\mathcal{V}^c$: sous-espace de $\mathcal{V}$, constitué de processus continus.

$\mathcal{S}$: espace des semi-martingales.

$\mathcal{S}^c$: espace des semi-martingales continues.

Pour tout processus continu adapté (X_t) et pour tout t.a. fini S, on introduit les t.a. suivants :

$$\begin{aligned} T_S^\varepsilon(X) &= \mathrm{Inf}\{s > S \ / \ |X_s-X_S| \geq \varepsilon\} \\ &= \infty \quad \text{si } \{\cdot\} = \emptyset \\ T_S(X) &= \lim_{\varepsilon\to 0} T_S^\varepsilon(X) \end{aligned}$$

(*) Université Paris VI - Laboratoire des Probabilités - Tour 56 - Couloir 46-56 3ème Etage - 4, Place Jussieu - 75230 PARIS CEDEX 05

Quand $S = 0$, on notera simplement $T^{\varepsilon}(X), T(X)$. On omettra X, s'il n'y a pas de risque de confusion.

Supposons que $X = (X_t)$ soit une semi-martingale continue, et soit $H = (H_t)$ un processus prévisible càdlàg. Définissons $Y = (Y_t)$ et $K = (K_t)$, en posant :

$Y_t = X_{S+t} - X_S$, $K_t = H_{S+t}$. Alors, Y et K sont respectivement semi-martingale nulle en 0 et processus prévisible càdlàg, relativement à la filtration $(\mathcal{F}_{S+t})$.

De plus, on a $T_S^{\varepsilon}(X) = S + T^{\varepsilon}(Y)$. Il est donc facile de voir que l'on a l'égalité suivante :

$$\frac{\int_S^{T_S^{\varepsilon}(X)} H_s dX_s}{X_{T_S^{\varepsilon}(X)} - X_S} 1_{(T_S^{\varepsilon}(X)<\infty)} = \frac{\int_0^{T^{\varepsilon}(Y)} K_s dY_s}{Y_{T^{\varepsilon}(Y)}} 1_{(T^{\varepsilon}(Y)<\infty)}$$

<u>Ainsi, sans perdre de généralité, on peut se limiter à l'étude de la dérivation par rapport à X, au point 0, le résultat obtenu reste valable pour un t.a. fini S.</u> Mais alors, on fera attention à ne pas supposer que $X_0 = 0$, lorsque (H_t) est de la forme $(h(X_t))$, comme dans la proposition (1-3).

On rappelle ici deux cas particuliers d'inégalités de normes pour les intégrales stochastiques ([6]), que l'on utilise dans la suite. Etant donnés une martingale locale $M = (M_t)$ et un processus prévisible $H = (H_t)$, il existe des constantes universelles c_1 et c'_p, $p \in [1,\infty[$, telles que :

(1) $$\left|\left|\int_0^{\infty} H_s dM_s\right|\right|_1 \leq c_1 \left|\left| \sup_{s\geq 0} |H_s| \right|\right|_2 \, ||M_\infty||_2$$

(2) $$\left|\left|\int_0^{\infty} H_s dM_s\right|\right|_p \leq c'_p \left|\left| \sup_{s\geq 0} |H_s| \right|\right|_p \, ||M||_{BMO}$$

1 - <u>Cas d'une martingale continue.</u>

L'article [1] de M.H.A. Davis comporte en tout deux théorèmes.

Son premier résultat, relatif à la convergence presque sûre, reste encore vrai, si l'on remplace le temps constant t par un t.a. fini S, mais nous pensons qu'il n'en est pas de même pour son deuxième résultat, relatif à la convergence dans L^p.

Dans ce paragraphe, seule la proposition (1-4) se ramène au cas d'un mouvement brownien (par changement de temps) et utilise par conséquent le théorème 1 de Davis.

<u>Proposition (1-1)</u> :

<u>Etant donnée</u> $X = (X_t) \in \mathcal{S}^c$, <u>nulle en</u> 0, <u>soient</u> T^{ε} <u>et</u> T <u>les t.a. correspondants (voir les notations dans le paragraphe précédent)</u>.

<u>Soit</u> $H = (H_t)$ <u>un processus prévisible càdlàg.</u>

<u>Alors, le rapport</u> : $\dfrac{\int_0^{T^\varepsilon} H_s dX_s}{X_{T^\varepsilon}} 1_{(T = 0,\ T^\varepsilon < \infty)}$ <u>converge en probabilité vers</u> $H_0\, 1_{(T = 0)}$, <u>quand</u> $\varepsilon \to 0$.

Démonstration :

Notons d'abord que tout processus prévisible càdlàg est localement borné, de sorte que l'intégrale stochastique $\int_0^t H_s dX_s$ est bien définie.

Soit (T_n) une suite de t.a. tendant en croissant vers ∞ tels que H_t-H_0 soit borné par n, pour tout $t \in [0,T_n]$. Posons :

$$\delta^\varepsilon = \frac{\int_0^{T^\varepsilon} (H_s-H_0)dX_s}{X_{T^\varepsilon}} 1_{(T = 0,\ T^\varepsilon < \infty)}$$

on peut écrire :

$$|\delta^\varepsilon| = \frac{1}{\varepsilon}\left|\int_0^{T^\varepsilon \wedge T_n} (H_s-H_0)dX_s\right| 1_{(T = 0,\ T^\varepsilon < \infty,\ T^\varepsilon \leq T_n)} +$$
$$\frac{1}{\varepsilon}\left|\int_0^{T^\varepsilon} (H_s-H_0)dX_s\right| 1_{(T = 0,\ T^\varepsilon < \infty,\ T^\varepsilon > T_n)}.$$

Le 2^e terme du 2^e membre de l'égalité converge en probabilité vers 0, quand $n \to \infty$, en effet :

$$P\{T = 0,\ T^\varepsilon < \infty,\ T^\varepsilon > T_n\} \leq P\{T_n < T^\varepsilon < \infty\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Montrons que le 1^{er} terme du 2^e membre de l'égalité converge vers 0 en probabilité, quand $\varepsilon \to 0$; il y a en fait convergence dans L^p, $p \geq 1$. En effet, d'après l'inégalité (2) (voir les rappels), on a :

$$\frac{1}{\varepsilon}\left|\left|\int_0^{T^\varepsilon \wedge T_n} (H_s-H_0)dX_s\, 1_{(T = 0,\ T^\varepsilon < \infty,\ T^\varepsilon \leq T_n)}\right|\right|_p$$
$$\leq \frac{c'_p}{\varepsilon}\left|\left|\sup_{s\in[0,T^\varepsilon\wedge T_n]} |H_s-H_0|\, 1_{(T = 0)}\right|\right|_p \left|\left|X^{T^\varepsilon}\right|\right|_{BMO}$$

où X^{T^ε} désigne l'arrêté de X au t.a. T^ε.

$\leq c'_p \, || \sup_{s\in[0,T^\varepsilon \wedge T_n]} |H_s - H_0| \, 1_{(T=0)} ||_p$, qui converge vers 0, quand $\varepsilon \to 0$,

d'après la convergence dominée et la continuité à droite de H. Pour finir, il suffit de remarquer que $H_0 \, 1_{(T^\varepsilon < \infty,\, T=0)}$ converge vers $H_0 \, 1_{(T=0)}$, quand $\varepsilon \to 0$. □

On donne maintenant une condition sur H pour que la convergence dans la proposition (1-1) ait lieu dans L^p.

Proposition (1-2) :

Etant donnée $X = (X_t) \in \mathscr{L}^c$, nulle en 0, soient T^ε et T les t.a. correspondants.

Soit $H = (H_t)$ un processus prévisible càdlàg tel qu'il existe un t.a. $S > 0$ vérifiant : $\sup_{s\in[0,S]} |H_s| \in L^p$, $p \geq 1$.

Alors, le rapport : $\dfrac{\int_0^{T^\varepsilon} H_s dX_s}{X_{T^\varepsilon}} \, 1_{(T^\varepsilon < S,\, T=0)}$ converge dans L^p vers $H_0 \, 1_{(T=0)}$, quand $\varepsilon \to 0$.

Remarque :

Supposer qu'il existe un t.a. $S > 0$ tel que $\sup_{s\in[0,S]} |H_s| \in L^p$ revient exactement à supposer que $H_0 \in L^p$. En effet, soit :

$$R = \operatorname{Inf}\{s \geq 0 \,/\, |H_s - H_0| \geq k\}$$
$$= \infty \text{ si } \{\cdot\} = \emptyset.$$

Alors, R est un t.a. prévisible, strictement positif. Si (R_n) est une suite de t.a. qui l'annoncent, on pose :

$$S = \operatorname{Inf}\{s > 0 \,/\, s \in \bigcup_n [\![R_n]\!]\}, \quad [\![R_n]\!] \text{ désigne le graphe de } R_n$$
$$= \infty \text{ si } \{\cdot\} = \emptyset$$

on a immédiatement que $0 < S < R$ sur $\{R < \infty\}$, et que $\sup_{s\in[0,S]} |H_s - H_0| \leq k$. On en déduit que $\sup_{s\in[0,S]} |H_s| \leq k + |H_0|$ □

Démonstration de la proposition (1-2).

Posons :

$$\delta^{\varepsilon} = \frac{1}{X_{T^{\varepsilon}}} \int_0^{T^{\varepsilon}} (H_s - H_0)\, dX_s \, 1_{(T^{\varepsilon} < S,\ T = 0)}$$

L'inégalité (2) permet d'écrire :

$$||\delta^{\varepsilon}||_p \leq \frac{c'_p}{\varepsilon} \sup_{s \in [0, T^{\varepsilon} \wedge S]} |H_s - H_0| \, 1_{(T = 0)}||_p \; ||X^{T^{\varepsilon}}||_{BMO}$$

$$\leq c'_p \, || \sup_{s \in [0, T^{\varepsilon} \wedge S]} |H_s - H_0| \, 1_{(T = 0)}||_p \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0,$$

d'après la convergence dominée et la continuité à droite de H.

Pour terminer, il suffit de remarquer que $H_0 \, 1_{(T^{\varepsilon} < S,\ T = 0)}$ converge vers $H_0 \, 1_{(T = 0)}$, quand $\varepsilon \to 0$, car $S > 0$, par hypothèse. □

Lorsque H_t est de la forme $h(X_t)$, où h est une fonction réelle uniformément continue, on a le résultat suivant (déjà remarqué par Davis [1]), qui est un peu meilleur que la proposition précédente :

Proposition (1-3) :

Etant donnée $X = (X_t) \in \mathscr{L}^c$, soient T^{ε} et T les t.a. correspondants. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue telle que $h(X_0) \in L^p$, $p \geq 1$.

Alors, le rapport : $\displaystyle \frac{1}{X_{T^{\varepsilon}} - X_0} \int_0^{T^{\varepsilon}} h(X_s)\, dX_s \, 1_{(T^{\varepsilon} < \infty)}$ converge dans L^p vers $h(X_0) \, 1_{(T < \infty)}$, quand $\varepsilon \to 0$.

Démonstration :

Posons :

$$\delta^{\varepsilon} = \frac{1}{X_{T^{\varepsilon}} - X_0} \int_0^{T^{\varepsilon}} \big(h(X_s) - h(X_0)\big)\, dX_s \, 1_{(T^{\varepsilon} < \infty)}$$

D'après l'inégalité (2), on peut écrire :

$$||\delta^{\varepsilon}||_p \leq \frac{c'_p}{\varepsilon} \, || \sup_{s \in [0, T^{\varepsilon}]} |h(X_s) - h(X_0)| \, ||_p \; ||X^{T^{\varepsilon}}||_{BMO}$$

$$\leq c'_p \, || \sup_{s \in [0, T^{\varepsilon}]} |h(X_s) - h(X_0)| \, ||_p$$

Comme h est uniformément continue, on a :

$$\forall \alpha > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } |x-y| \leq \eta \Longrightarrow |h(x)-h(y)| \leq \alpha.$$

α et η étant ainsi fixés, pour tout $\varepsilon \leq \eta$, on a :

$$\forall s \in [0,T^\varepsilon], \quad |X_s - X_0| \leq \varepsilon \leq \eta, \text{ donc } \sup_{s\in[0,T^\varepsilon]} |h(X_s)-h(X_0)| \leq \alpha.$$

Ce qui montre que le 2^e membre de l'inégalité précédente converge vers 0, quand $\varepsilon \to 0$. □

Remarque :

Dans la démonstration précédente, on vient de voir que si l'on supprime l'hypothèse d'intégrabilité de $h(X_0)$, le rapport $\frac{1}{X_{T^\varepsilon}-X_0} \int_0^T (h(X_s)-h(X_0))dX_s \, 1_{(T^\varepsilon < \infty)}$. converge toujours vers 0 dans L^p, pour tout $p \geq 1$. □

La proposition suivante donne un critère pour que la convergence ait lieu presque sûrement :

Proposition (1-4) :

Etant donnée $X = (X_t) \in \mathcal{L}^c$, nulle en 0, soient T^ε et T les t.a. correspondants. On pose $c_t = \langle X,X\rangle_t$ et on définit (i_t) comme inverse à gauche de (c_t).

Soit $H = (H_t)$ un processus prévisible càdlàg vérifiant la condition suivante : il existe deux constantes strictement positives α et k telles que

$$\limsup_{s \searrow 0} \frac{|H_{i_s} - H_0|}{s^\alpha} \leq k \quad \text{p.s.}$$

Alors, le rapport : $\frac{1}{X_{T^\varepsilon}} \int_0^{T^\varepsilon} H_s dX_s \, 1_{(T^\varepsilon < \infty,\, T = 0)}$ converge p.s. vers $H_0 \, 1_{(T = 0)}$, quand $\varepsilon \to 0$.

Démonstration :

Désignons par (j_t) l'inverse à droite de (c_t) et posons $b_t = X_{j_t}$.

Alors, on sait que (b_t) est un mouvement brownien relativement à la filtration $(\mathcal{F}_{j_t})$, et que $X_t = b_{c_t}$.

Soit :

$$\delta^\varepsilon = \frac{1}{X_{T^\varepsilon}} \int_0^{T^\varepsilon} (H_s - H_0) dX_s \, 1_{(T^\varepsilon < \infty,\, T = 0)}.$$

La formule de changement de temps dans les intégrales stochastiques ([3], p. 390, formule (10)) permet d'écrire :

$$\delta^\varepsilon = \frac{1}{X_{T^\varepsilon}} \int_0^{T^\varepsilon} (H_s - H_0)\, db_{c_s}\, 1_{(T^\varepsilon < \infty,\ T = 0)}$$

$$= \frac{1}{X_{T^\varepsilon}} \int_0^{c_{T^\varepsilon}} (H_{i_s} - H_0)\, db_s\, 1_{(T^\varepsilon < \infty,\ T = 0)} .$$

Mais, sur $\{T^\varepsilon < \infty\}$, on a : $c_{T^\varepsilon} = \tau^\varepsilon \overset{\text{Déf.}}{=} \operatorname{Inf}\{s \geq 0 \ / \ |b_s| \geq \varepsilon\}$.

On a donc :

$$|\delta^\varepsilon| \leq \frac{1}{\varepsilon} \left| \int_0^{\tau^\varepsilon} (H_{i_s} - H_0)\, db_s \right| 1_{(T = 0)} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0,$$ d'après le théorème 1 de Davis ([1]).

Remarque :

A la fin de la démonstration précédente, on ne voit pas très bien l'utilité de l'indicatrice $1_{(T = 0)}$, laquelle est indispensable dans l'énoncé de la proposition (1-4). Cela provient des conventions faites au point 0 ($c_0 = i_0 = 0$), masquant ainsi une certaine difficulté qui apparaît clairement quand on considère un point t non nul. En effet, si on reprend la démonstration on obtient que sous la condition $\limsup\limits_{s \searrow 0} \dfrac{|H_{i_{c_t+s}} - H_{i_{c_t}}|}{s^\alpha} \leq k$, le rapport $\dfrac{1}{X_{T_t^\varepsilon} - X_t}\left(\displaystyle\int_0^{T_t^\varepsilon} H_s dX_s\right) 1_{(T_t^\varepsilon < \infty,\, T_t = t)}$ converge p.s. vers $H_{i_{c_t}} 1_{(T_t = t)}$, quand $\varepsilon \to 0$. Il nous reste encore à prouver que $H_{i_{c_t}} 1_{(T_t = t)} = H_t 1_{(T_t = t)}$. On a $i_{c_t} = t$ si t est un point de croissance à gauche de c, mais $T_t = t$ signifie que t est un point de croissance à droite de c. En fait, l'hypothèse sur H entraîne que $H_{i_{c_t}} = H_{i_{c_t+0}} = H_{j_{c_t}}$. Comme $j_{c_t} = t$ sur $\{T_t = t\}$, on a le résultat désiré. ♉

Corollaire (1-5) :

<u>Etant donnée</u> $X = (X_t) \in \mathscr{S}^c$, <u>soient</u> T^ε <u>et</u> T <u>les t.a. correspondants</u>.

<u>Soit</u> $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, <u>une fonction telle que sur tout compact</u> K <u>de</u> $\mathbb{R}$, h <u>est lipschitzienne de rapport</u> μ <u>et d'ordre</u> $\lambda > 0$, <u>c'est-à-dire que</u> :
$\forall x \in K$, $\forall y \in K$, $|h(x) - h(y)| \leq \mu |x - y|^\lambda$, λ <u>et</u> μ <u>peuvent dépendre du compact</u> K.

Alors, le rapport : $\dfrac{1}{X_{T^\varepsilon}-X_0}\displaystyle\int_0^{T^\varepsilon} h(X_s)dX_s\, 1_{(T^\varepsilon < \infty)}$ converge p.s. vers $h(X_0)\, 1_{(T < \infty)}$, quand $\varepsilon \to 0$.

Preuve :

Il suffit de démontrer le corollaire sur chaque ensemble $\{|X_0| \leq n\}$, $n \in \mathbb{N}$.
Pour cela, d'après la proposition (1-4), il s'agit de vérifier qu'il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $k > 0$ telles que

$$\limsup_{s \searrow 0} \frac{1}{s^\alpha} |h(X_{i_{c_0+s}})-h(X_{i_{c_0}})|\, 1_{(|X_0| \leq n)} \leq k.$$

Mais, $X_{i_{c_0+s}} = b_{c_{i_{c_0+s}}} = b_{c_0+s}$ et $X_{i_{c_0}} = b_{c_0} = X_0$. Il revient donc à vérifier que $\displaystyle\limsup_{s \searrow 0} \frac{1}{s^\alpha} |h(b_{c_0+s})-h(b_{c_0})|\, 1_{(|b_{c_0}| \leq n)} \leq k$.

Cette condition est évidemment satisfaite, puisque h est lipschitzienne d'ordre $\lambda > 0$ sur $\{|b_{c_0}| \leq n+1\}$ et que $\displaystyle\limsup_{s \searrow 0} \frac{|b_{c_0+s}-b_{c_0}|}{\sqrt{2s \text{ Log Log } 1/s}} \leq 1$. □

Ce corollaire peut se démontrer facilement sans passer par le mouvement brownien. Voici comment on procède :

On peut se restreindre à $\{|X_0| \leq m\}$, que nous n'écrirons pas, et on considère le compact $[-m-1,m+1]$, sur lequel h est lipschitzienne de rapport μ et d'ordre $\lambda > 0$. On pose :

$$\delta^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \sup_u \left|\int_0^{T^\varepsilon \wedge u} (h(X_s)-h(X_0))dX_s\right|$$

A l'aide de l'inégalité de Tchebycheff et du lemme de Borel-Cantelli, on montre que la suite δ^{r_n}, avec $r_n = \dfrac{1}{n^{1/\lambda}}$, converge p.s. vers 0.

Pour $\varepsilon > 0$, quelconque, mais assez petit, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $r_{n+1} \leq \varepsilon < r_n$. Alors, on a :

$$\delta^\varepsilon \leq \frac{r_n}{r_{n+1}} \delta^{r_n} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0.$$

c.q.f.d.

2 - Cas d'une semi-martingale continue.

Dans le cas général, la proposition (1-1) n'a pas d'analogue, cela provient du terme à variation finie (non monotone) de la semi-martingale. Par contre, on a le résultat suivant :

Proposition (2-1) :

Etant donnée $X = (X_t) \in \mathcal{S}^c$, soient T^ε et T les t.a. correspondants. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction localement lipschitzienne.

Alors, le rapport : $\dfrac{1}{X_{T^\varepsilon} - X_0} \displaystyle\int_0^{T^\varepsilon} h(X_s)\, dX_s \; 1_{(T^\varepsilon < \infty)}$ converge en probabilité vers $h(X_0)\, 1_{(T < \infty)}$, quand $\varepsilon \to 0$.

Démonstration :

Soit $X = M + A$ la décomposition canonique de X, et soit :

$$S_n = \mathrm{Inf}\{s \geq 0 \;/\; |M_s - M_0| \geq n\}$$

$$= \infty, \quad \text{si } \{\cdot\} = \emptyset$$

Il suffit de prouver que pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\delta^\varepsilon \overset{\text{Déf.}}{=} \frac{1}{X_{T^\varepsilon} - X_0} \left[\int_0^{T^\varepsilon \wedge S_n} (h(X_s) - h(X_0))\, 1_{(|X_0| \leq m)}\, dX_s \right] 1_{(T^\varepsilon < \infty)} \quad \text{converge}$$

vers 0 en probabilité, quand $\varepsilon \to 0$.

Pour cela, remarquons d'abord que X, M et A sont constants sur l'intervalle $[0,T]$. On a, en effet :

$$\forall s \geq 0, \; \forall \varepsilon > 0, \quad |X_{T^\varepsilon \wedge s} - X_0| \leq \varepsilon$$

D'où, quand $\varepsilon \to 0$, on obtient :

$$\forall s \geq 0, \quad |X_{T \wedge s} - X_0| = 0.$$

Ce qui montre que X est constant sur $[0,T]$, et il en est de même pour M et A, d'après l'unicité de la décomposition canonique de X.

Cela étant, soit $\varepsilon \leq 1$ et soit k le rapport de lipschitz de h sur le compact $[-m-1, m+1]$. On a alors :

$$|\delta^\varepsilon| \leq \frac{1}{\varepsilon} \left| \int_0^{T^\varepsilon \wedge S_n} (h(X_s) - h(X_0))\, 1_{(|X_0| \leq m)}\, dM_s \right| + \frac{1}{\varepsilon} \left| \int_0^{T^\varepsilon \wedge S_n} (h(X_s) - h(X_0))\, 1_{(|X_0| \leq m)}\, dA_s \right|$$

$$\overset{\text{Déf.}}{=} a^\varepsilon + b^\varepsilon.$$

Montrons que a^{ε} converge vers 0 dans L^2 :

$$||a^{\varepsilon}||_2 = \frac{1}{\varepsilon} \{E(\int_0^{T^{\varepsilon}\wedge S_n} (h(X_s)-h(X_0))^2 \, 1_{(|X_0| \leq m)} d\langle M,M\rangle_s)\}^{1/2}$$

$$\leq k \, \{E(\langle M,M\rangle_{T^{\varepsilon}\wedge S_n} - \langle M,M\rangle_0)\}^{1/2}$$

$$= k \, \{E(M_{T^{\varepsilon}\wedge S_n} - M_0)^2\}^{1/2} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} k\{E(M_{T\wedge S_n} - M_0)^2\}^{1/2} = 0,$$

d'après la convergence dominée et la continuité à droite de M.

Montrons que b^{ε} converge p.s. vers 0 :

$$|b^{\varepsilon}| \leq \frac{k\varepsilon}{\varepsilon} \int_0^{T^{\varepsilon}} |dA_s| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} k \int_0^{T} |dA_s| = 0.$$

On a donc terminé la démonstration. □

Remarque :

Comme on a pu voir dans la démonstration précédente, si X se réduit à un processus à variation finie (non monotone et non nul en 0), alors, dans la proposition (2-1), la convergence a lieu presque sûrement. □

Lorsque le terme à variation finie de X est croissant (resp. décroissant), X est une sous-martingale locale (resp. sur-martingale locale). Dans ces conditions, on a l'analogue de la proposition (1-1) :

Proposition (2-2) :

Etant donnée $X = M + A \in \mathcal{L}^c + \mathcal{V}^c_+$ (resp. $X = M - A \in \mathcal{L}^c - \mathcal{V}^c_+$) une sous-martingale locale (resp. sur-martingale locale), nulle en 0, soit T^{ε} et T les t.a. correspondants.

Soit $H = (H_t)$ un processus prévisible càdlàg.

Alors, le rapport : $\frac{1}{X_{T^{\varepsilon}}} \int_0^{T^{\varepsilon}} H_s dX_s \, 1_{(T^{\varepsilon} < \infty,\, T = 0)}$ converge en probabilité vers $H_0 \, 1_{(T = 0)}$, quand $\varepsilon \to 0$.

Démonstration :

On fait la démonstration dans le cas où X est une sous-martingale locale ; le cas d'une sur-martingale locale se ramène au cas précédent en considérant son opposé.

Soit (S_n) une suite de t.a. tendant en croissant vers $+\infty$ tels que $(H_t - H_0)$ soit borné par n, pour tout $t \in [0, S_n]$. Il nous suffit de prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\delta^\varepsilon \overset{\text{Déf.}}{=} \frac{1}{X_{T^\varepsilon}} \int_0^{T^\varepsilon \wedge S_n} (H_s - H_0) dX_s \, 1_{(T^\varepsilon < \infty,\ T = 0)}$ converge vers 0 en probabilité, quand $\varepsilon \to 0$.

Puisque $(X_{T^\varepsilon \wedge t})$ est une sous-martingale locale, il existe une constante c telle que ([4], théorème 3-2) :

$$||A_{T^\varepsilon}||_2 \leq c \, ||\sup_{s \geq 0} |X_{T^\varepsilon \wedge s}|||_2 = c\varepsilon$$

On en déduit que :

$$||M_{T^\varepsilon}||_2 \leq ||X_{T^\varepsilon}||_2 + ||A_{T^\varepsilon}||_2 \leq (1+c)\varepsilon$$

Cela étant, revenons à δ^ε. On peut écrire :

$$|\delta^\varepsilon| \leq \frac{1}{\varepsilon} \left| \int_0^{T^\varepsilon \wedge S_n} (H_s - H_0) \, 1_{(T = 0)} dM_s \right| + \frac{1}{\varepsilon} \left| \int_0^{T^\varepsilon \wedge S_n} (H_s - H_0) \, 1_{(T = 0)} dA_s \right|$$

$$\overset{\text{Déf.}}{=} a^\varepsilon + b^\varepsilon .$$

Pour prouver que a^ε converge vers 0 dans L^1, on utilise l'inégalité (1), qui permet d'écrire :

$$||a^\varepsilon||_1 \leq \frac{c_1}{\varepsilon} ||\sup_{s \in [0, T^\varepsilon \wedge S_n]} |H_s - H_0| \, 1_{(T = 0)}||_2 \, ||M_{T^\varepsilon}||_2$$

$$\leq c_1 (1+c) \, ||\sup_{s \in [0, T^\varepsilon \wedge S_n]} |H_s - H_0| \, 1_{(T = 0)}||_2 \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0,$$

d'après la convergence dominée et la continuité à droite de H.

Pour prouver que b^ε converge vers 0 dans L^1, on utilise l'inégalité de Schwarz qui donne :

$$||b^\varepsilon||_1 \leq \frac{1}{\varepsilon} ||\sup_{s \in [0, T^\varepsilon \wedge S_n]} |H_s - H_0| \, 1_{(T = 0)}||_2 \, ||A_{T^\varepsilon}||_2$$

$$\leq c \, ||\sup_{s \in [0, T^\varepsilon \wedge S_n]} |H_s - H_0| \, 1_{(T = 0)}||_2 \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

D'où le résultat désiré. □

Dans le cas où H est à variation finie sur tout compact, la formule de changement de variables permet d'obtenir le joli résultat suivant, où la convergence a lieu presque sûrement :

Proposition (2-3) :

Etant donnée $X = (X_t) \in \mathcal{S}^c$, nulle en 0, soient T^ε et T les t.a. correspondants.

Soit $V = (V_t) \in \mathcal{V}$.

Alors, le rapport : $\frac{1}{X_{T^\varepsilon}} \int_0^{T^\varepsilon} V_s dX_s \, 1_{(T^\varepsilon < \infty,\ T = 0)}$ converge presque sûrement vers $V_0 \, 1_{(T = 0)}$, quand $\varepsilon \to 0$.

Démonstration :

Posons : $\delta^\varepsilon = \frac{1}{X_{T^\varepsilon}} \int_0^{T^\varepsilon} (V_s - V_0) dX_s \, 1_{(T^\varepsilon < \infty,\ T = 0)}$

Par intégration par parties, il vaut :

$$\delta^\varepsilon = \frac{1}{X_{T^\varepsilon}} \left[(V_{T^\varepsilon} - V_0) X_{T^\varepsilon} - \int_0^{T^\varepsilon} X_s dV_s \right] 1_{(T^\varepsilon < \infty,\ T = 0)}$$

Donc, on obtient la majoration suivante :

$$|\delta^\varepsilon| \leq (|V_{T^\varepsilon} - V_0| + \int_0^{T^\varepsilon} |dV_s|) \, 1_{(T = 0)} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0,$$

d'après la continuité à droite de V. □

Remarque :

Contrairement à ce qu'on pourrait croire, le fait que X se réduit à un processus à variation finie (non monotone) ne simplifie pas les choses : on ne sait pas démontrer que le rapport $\frac{1}{X_{T^\varepsilon}} \int_0^{T^\varepsilon} H_s dX_s \, 1_{(T^\varepsilon < \infty,\ T = 0)}$ converge en probabilité vers $H_0 \, 1_{(T = 0)}$, sauf dans le cas où H est une semi-martingale, car alors, on peut appliquer la formule d'intégration par parties. □

Nous terminons ce paragraphe en étudiant le cas où X est de la forme $X_t = M_t + \int_0^t \phi_s d\langle M,M\rangle_s$, où $(M_t) \in \mathcal{L}^c$ et où (ϕ_t) est un processus prévisible càdlàg. On dit alors que X est un processus du type d'Itô généralisé.

Proposition (2-4) :

Etant donné $X_t = M_t + \int_0^t \phi_s d\langle M,M\rangle_s$ un processus du type d'Itô généralisé nul en 0, soient T^ε et T les t.a. correspondants.

Soit $H = (H_t)$ un processus prévisible càdlàg.

Alors, le rapport : $\frac{1}{X_{T^\varepsilon}} \int_0^{T^\varepsilon} H_s dX_s \, 1_{(T^\varepsilon < \infty,\ T = 0)}$ converge en probabilité vers $H_0 \, 1_{(T = 0)}$, quand $\varepsilon \to 0$.

Démonstration :

Soit $L = \mathcal{E}(- \int_0^{\cdot} \phi_s dM_s)$, l'exponentielle de la martingale locale continue $-\int_0^t \phi_s dM_s$, qui vaut 1 en 0. Soit (S_n) une suite croissante de t.a., tendant P-p.s. vers $+\infty$, et tels que L^{S_n} soit une martingale uniformément intégrable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $Q^n = L^{S_n} \cdot P$. Alors, Q^n est une probabilité équivalente à P, et d'après le théorème de Girsanov ([5] p. 377), $(X_t^{S_n})$ est une martingale locale sous la loi Q^n. Définissons maintenant :

$$T^{\varepsilon,n} = \mathrm{Inf}\{s \geq 0 \ / \ |X_s^{S_n}| \geq \varepsilon\}$$
$$= \infty \text{ si } \{\cdot\} = \emptyset$$
$$T^n = \lim_{\varepsilon \to 0} T^{\varepsilon,n}$$

Alors, d'après la proposition (1-1), l'expression suivante :

$$\frac{1}{\varepsilon} \left| \int_0^{T^{\varepsilon,n} \wedge S_n} (H_s - H_0) dX_s^{S_n} \right| 1_{\{T^{\varepsilon,n} < \infty,\ T^n = 0\}}$$

converge vers 0 en probabilité sous la loi Q^n, donc aussi sous la loi P.
D'autre part, on a $T^{\varepsilon,n} \wedge S_n = T^\varepsilon \wedge S_n$, car : $T^{\varepsilon,n} = T^\varepsilon$ sur l'ensemble $\{T^{\varepsilon,n} \leq S_n\} \equiv \{T^\varepsilon \leq S_n\}$. Donc finalement, $\frac{1}{\varepsilon} \left| \int_0^{T^\varepsilon \wedge S_n} (H_s - H_0) dX_s \right| 1_{(T^\varepsilon \leq S_n,\ T = 0)}$ converge vers 0 en probabilité sous la loi P. D'où le résultat désiré, puisque $S_n \nearrow +\infty$.

BIBLIOGRAPHIE :

[1] M.H.A. DAVIS : On stochastic differentiation, SIAM, Theory of Probability and its applications, vol. 20, N° 4 (1975).

[2] D. ISAACSON : Stochastic integrals and derivatives, Ann. Math. Stat., 40 (1969), p. 1610-1616.

[3] Y. LE JAN : Martingales et changements de temps. Sém. Proba. XIII, Lect. Notes in Math. N° 721, Springer Verlag (1979).

[4] E. LENGLART, D. LEPINGLE, M. PRATELLI : Présentation unifiée de certaines inégalités de la théorie des martingales. Sém. Proba. XIV, Lect. Notes in Math. N° 784, Springer Verlag (1980).

[5] P.A. MEYER : Un cours sur les intégrales stochastiques. Sém. Proba. X, Lect. Notes in Math. N° 511, Springer Verlag (1976).

[6] P.A. MEYER : Inégalités de normes pour les intégrales stochastiques. Sém. Proba. XII, Lect. Notes in Math. N° 649, Springer Verlag (1978).

[7] CH. YOEURP : Sur la dérivation des intégrales stochastiques. Sém. Proba. XIV, Lect. Notes in Math. N° 784, Springer Verlag (1980).