CLAUDE DELLACHERIE

Sur les noyaux σ-finis

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 371-387
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__371_0>

SUR LES NOYAUX σ-FINIS

par C. Dellacherie

Cet exposé est essentiellement consacré au problème suivant (qui sera défini précisément plus loin)

> Si $m^x(dy)$ est une mesure σ-finie dépendant mesurablement de x, peut-on trouver une probabilité $P^x(dy)$ mesurable en x et une fonction $g(x,y)$ mesurable en (x,y) de sorte que $m^x(dy) = g(x,y)\,P^x(dy)$?

problème que m'a suggéré la lecture de l'exposé "Sur l'extension d'un théorème de Doob à un noyau σ-fini, d'après Mokobodzki" de M. Yor et P.A. Meyer, paru dans le volume XII du Séminaire (L.N. n°649, p 482 à 488), et désigné par [°] par la suite.

Dans toute la suite, on désigne par $(X,\underline{\underline{X}})$ un espace mesurable, par $(Y,\underline{\underline{Y}})$ un espace mesurable <u>séparable</u> et par M un noyau σ-fini de $(X,\underline{\underline{X}})$ dans $(Y,\underline{\underline{Y}})$, i.e. une application de $X\times\underline{\underline{Y}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ vérifiant

(1) pour $x\in X$ fixé, l'application $A\to M(x,A)$ est une mesure positive, σ-finie, sur $(Y,\underline{\underline{Y}})$, que nous noterons m^x

(2) pour $A\in\underline{\underline{Y}}$ fixé, la fonction $x\to M(x,A) = m^x(A)$ est $\underline{\underline{X}}$-mesurable.

Nous dirons que le noyau M est <u>mesurable</u> s'il vérifie la propriété de mesurabilité à la Fubini suivante

(3) pour tout espace mesurable auxiliaire $(Z,\underline{\underline{Z}})$ et pour tout $B\in\underline{\underline{Z}}\times\underline{\underline{Y}}$, la fonction $(x,z)\to m^x(B_z)$ est $\underline{\underline{X}}\times\underline{\underline{Z}}$-mesurable.

où $\underline{\underline{X}}\times\underline{\underline{Z}}$, $\underline{\underline{Z}}\times\underline{\underline{Y}}$ dénotent les tribus produits, et B_z la coupe de B selon z.

Il est clair que (3) implique (2), mais l'inverse n'est pas vrai (nous donnerons des contre-exemples). Il est bien connu que (2) est équivalente à (3) si les mesures m^x sont bornées (il est clair que (2) implique (3) pour tout rectangle $B\in\underline{\underline{Z}}\times\underline{\underline{Y}}$, et on obtient le cas général par classes monotones, la bornitude des m^x intervenant dans la considération des suites décroissantes), et, plus généralement, si le noyau M est <u>propre</u> (i.e. s'il existe une fonction $\underline{\underline{Y}}$-mesurable u partout >0 telle que la fonction $m^x(u) = \int u(y)\,M(x,dy)$ soit finie partout). Notons par ailleurs que (3) s'écrit aussi "si Ψ est l'indicatrice d'un élément de $\underline{\underline{Z}}\times\underline{\underline{Y}}$, la fonction $(x,z)\to\int\Psi(z,y)\,M(x,dy)$ est

$\underline{\underline{X}}x\underline{\underline{Z}}$-mesurable" , et qu'alors cette assertion est encore vraie si on suppose seulement que Ψ est une fonction $\underline{\underline{Z}}x\underline{\underline{Y}}$-mesurable positive (en effet, Ψ est limite d'une suite croissante de fonctions étagées). On en déduit en particulier que, si M est mesurable, alors la fonction $x \to \int f(x,y)\, M(x,dy)$ est $\underline{\underline{X}}$-mesurable pour toute fonction $\underline{\underline{X}}x\underline{\underline{Y}}$-mesurable positive f (ce que (2) ne me semble pas impliquer, mais je n'ai pas de contre-exemple). Enfin, nous rassurons le lecteur quant au nombre d'espaces auxiliaires à envisager dans (3)

PROPOSITION 1.- <u>Pour que le noyau</u> M <u>soit mesurable</u>, <u>il suffit qu'il vérifie</u> (3) <u>pour le seul espace auxiliaire</u> $(\mathbb{R},\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}))$.

DEMONSTRATION. Soient $(Z,\underline{\underline{Z}})$ un espace mesurable auxiliaire et B un élément de $\underline{\underline{Z}}x\underline{\underline{Y}}$. Comme il existe une sous-tribu séparable $\underline{\underline{Z}}°$ de $\underline{\underline{Z}}$ telle que B appartienne à $\underline{\underline{Z}}°x\underline{\underline{Y}}$, on peut supposer $\underline{\underline{Z}}$ séparable. Mais alors, des arguments classiques, exposés aux n°I.9 et I.11 du livre rose (i.e. 1er volume de "Probabilités et Potentiel"), montrent que, quitte à remplacer $(Z,\underline{\underline{Z}})$ par son séparé, on peut supposer que Z est une partie de $\mathbb{R}$ et $\underline{\underline{Z}}$ sa tribu borélienne. L'ensemble B est alors la trace sur ZxY d'un élément C de $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})x\underline{\underline{Y}}$, et $(x,z) \to m^x(B_z)$ la restriction à ZxY de $(x,t) \to m^x(C_t)$. C'est fini.

REMARQUE.- On pourrait prendre à la place de $\mathbb{R}$ n'importe quel autre espace polonais non dénombrable car, d'après un résultat classique (livre rose III.80), deux tels espaces sont "Borel-isomorphes".

Nous poursuivrons l'étude de la mesurabilité des noyaux σ-finis à la fin de l'exposé. Nous revenons à notre problème :

DEFINITION.- <u>Soient</u> $\underline{\underline{X}}^*$ <u>une tribu sur</u> X <u>contenant</u> $\underline{\underline{X}}$, N <u>un noyau markovien de</u> $(X,\underline{\underline{X}}^*)$ <u>dans</u> $(Y,\underline{\underline{Y}})$ <u>et</u> g <u>une fonction</u> $\underline{\underline{X}}^*x\underline{\underline{Y}}$ <u>-mesurable à valeurs dans</u> $\mathbb{R}_+$. <u>Nous dirons que</u> (N,g) <u>est une</u> $\underline{\underline{X}}^*$-réalisation <u>du noyau</u> M <u>si on a</u> $M(x,dy) = g(x,y)\, N(x,dy)$ <u>pour tout</u> $x\varepsilon X$.

Il est clair qu'un noyau admettant une $\underline{\underline{X}}$-réalisation est mesurable. Réciproquement, nous démontrerons un résultat plus faible : si M est mesurable, il admet une $\hat{\underline{\underline{X}}}$-réalisation, où $\hat{\underline{\underline{X}}}$ est la tribu sur X engendrée par ses parties $\underline{\underline{X}}$-analytiques. Cependant, lorsqu'on connait un noyau markovien $x \to P^x$ de $(X,\underline{\underline{X}})$ dans $(Y,\underline{\underline{Y}})$ de sorte que m^x soit absolument continue par rapport à P^x pour tout $x\varepsilon X$ (autrement dit, si l'on connait la moitié d'une $\underline{\underline{X}}$-réalisation éventuelle), nous prouverons que M, mesurable, admet une $\underline{\underline{X}}$-réalisation (où $N(x,dy) = P(x,dy)$) quand l'espace mesurable $(X,\underline{\underline{X}})$ est de Blackwell. Nous commencerons par traiter le cas, plus facile, où M est un noyau <u>basique</u> (i.e. il existe une probabilité fixe P sur $(Y,\underline{\underline{Y}})$ telle que m^x soit absolument continue par rapport à P pour tout $x\varepsilon X$; c'est l'hypothèse qui est faite dans [°]) : nous montrons alors que M est mesurable en notre sens ssi il est mesurable au sens de [°], puis, améliorant un résultat de [°], nous montrons en particulier que M, mesurable, admet une $\underline{\underline{X}}$-réalisation (où $N(x,dy) = P(dy)$) quand $(X,\underline{\underline{X}})$ est de Blackwell.

Lorsqu'on connait la moitié $x \to P^x$ d'une $\underline{\underline{X}}$-réalisation éventuelle, trouver l'autre moitié g revient à étendre un théorème classique de Doob au cas d'un noyau σ-fini. Avant de nous mettre au travail, nous rappelons ce théorème car nous aurons besoin d'un énoncé précisé.

THEOREME DE DOOB.- Soit $x \to P^x$ un noyau markovien de $(X,\underline{\underline{X}})$ dans $(Y,\underline{\underline{Y}})$ et soit $x \to Q^x$ un noyau borné de $(X,\underline{\underline{X}})$ dans $(Y,\underline{\underline{Y}})$ tel que Q^x soit absolument continue par rapport à P^x pour tout $x \in X$. Il existe alors une fonction $\underline{\underline{X}}\times\underline{\underline{Y}}$-mesurable g, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, telle qu'on ait $Q(x,dy) = g(x,y)\,P(x,dy)$ pour tout $x \in X$. De plus, on peut supposer que l'on a $g(x,.) = g(\xi,.)$ pour tout couple (x,ξ) d'éléments de X tel que l'on ait $Q^x = Q^\xi$ et $P^x = P^\xi$.

DEMONSTRATION. Nous rappelons brièvement la démonstration, en suivant de près les n°V.56 et V.58 du livre bleu (i.e. 2ème volume de "Probabilités et Potentiel", Hermann 1980). Soient $(\underline{\underline{A}}_n)$ une suite croissante de sous-tribus finies de $\underline{\underline{Y}}$, engendrant $\underline{\underline{Y}}$, et $(\underline{\underline{P}}_n)$ la suite des partitions de Y constituées des atomes des tribus $\underline{\underline{A}}_n$. Posons alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $(x,y) \in X\times Y$,

$$g_n(x,y) = \sum_{A \in \underline{\underline{P}}_n} \frac{Q^x(A)}{P^x(A)} 1_A(y) \qquad (\text{avec } 0/0 = 0)$$

Les fonctions g_n sont évidemment $\underline{\underline{X}}\times\underline{\underline{Y}}$-mesurables. D'autre part, pour $x \in X$ fixé, les $g_n(x,.)$ constituent une P^x-martingale positive, uniformément intégrable, relativement à la filtration $(\underline{\underline{A}}_n)$; elles convergent donc P^x-p.s. et dans $L^1(P^x)$. Il ne reste plus qu'à poser $g = h\,1_{\{h<\infty\}}$ où $h = \limsup_n g_n$, le "de plus" de l'énoncé étant assuré par le choix des g_n.

LE CAS BASIQUE

Dans ce paragraphe, nous désignons par P une probabilité de base pour M sur $(Y,\underline{\underline{Y}})$, par F l'espace $L^0_+(\underline{\underline{Y}},P)$ des classes des fonctions $\underline{\underline{Y}}$-mesurables, à valeurs P-p.s. dans $\mathbb{R}_+$, muni de la convergence en probabilité (c'est un espace polonais, de tribu borélienne $\underline{\underline{B}}(F)$), et par E le sous-espace de F constitué des classes (d'indicatrices) des éléments de $\underline{\underline{Y}}$ (c'est aussi un espace polonais, de tribu borélienne $\underline{\underline{B}}(E)$). Si on identifie m^x à l'ensemble de ses densités par rapport à P, le noyau M s'identifie alors à une application $x \to m^x$ de X dans F. La propriété (2) de "mesurabilité faible" exprime alors exactement que cette application est mesurable de $(X,\underline{\underline{X}})$ dans $(F,\underline{\underline{T}})$ où $\underline{\underline{T}}$ est la tribu sur F engendrée par les fonctions $f \to \int_A f\,dP$ quand A parcourt la tribu $\underline{\underline{Y}}$; il est montré dans [°] que $\underline{\underline{T}}$ est une sous-tribu de $\underline{\underline{B}}(F)$, non séparable (et donc distincte de $\underline{\underline{B}}(F)$) si P n'est pas purement atomique. Nous redémontrerons cela dans un appendice consacré à quelques remarques sur les rapports entre $\underline{\underline{T}}$ et $\underline{\underline{B}}(F)$.

Considérons $(x,A) \to m^x(A)$ comme une fonction définie sur XxE (au lieu de $X\times\underline{\underline{Y}}$). On voit sans peine que la mesurabilité faible (2) de M équivaut à la mesurabilité séparée en x et en A de cette fonction pour les tribus $\underline{\underline{X}}$ et $\underline{\underline{B}}(E)$; nous prouvons maintenant que la mesurabilité (3) de M équivaut à la mesurabilité en le couple (x,A) de cette fonction pour la tribu $\underline{\underline{X}}\times\underline{\underline{B}}(E)$, laquelle sert à définir la notion de noyau mesurable basique dans [°] (il y a un "lapsus" dans [°] : E doit y être muni de la tribu borélienne induite par $L^0(\underline{\underline{Y}},P)$, et non de celle induite par $L^\infty(\underline{\underline{Y}},P)$).

THEOREME 1.- <u>Le noyau</u> M <u>de base</u> P <u>est mesurable ssi l'application</u> $(x,A) \to m^x(A)$ <u>définie sur</u> XxE <u>est une fonction</u> $\underline{\underline{X}}\times\underline{\underline{B}}(E)$<u>-mesurable</u>.

DEMONSTRATION. Supposons d'abord que $(x,A) \to m^x(A)$ soit une fonction $\underline{\underline{X}}\times\underline{\underline{B}}(E)$-mesurable, et soient $(Z,\underline{\underline{Z}})$ un espace mesurable auxiliaire et B un élément de $\underline{\underline{Z}}\times\underline{\underline{Y}}$. Identifiant la coupe B_z de B selon $z\in Z$, qui est un élément de $\underline{\underline{Y}}$, à sa classe modulo P, qui est un élément de E, on voit aisément que $z \to B_z$ est une application mesurable de $(Z,\underline{\underline{Z}})$ dans $(E,\underline{\underline{B}}(E))$ (c'est trivial si B est un rectangle, et on obtient le cas général par classes monotones). On en déduit que la fonction $(x,z) \to m^x(B_z)$ est $\underline{\underline{X}}\times\underline{\underline{Z}}$-mesurable par composition d'applications mesurables. Supposons maintenant que M soit un noyau mesurable et prenons $(Z,\underline{\underline{Z}}) = (E,\underline{\underline{B}}(E))$ si bien que, confondant un ensemble avec son indicatrice, un élément z de Z est une fonction $y \to z(y)$ modulo P. Définissons alors un noyau borné N, de base P, de $(Z,\underline{\underline{Z}})$ dans $(Y,\underline{\underline{Y}})$ par $N(z,dy) = z(y)P(dy)$. D'après le théorème de Doob, il existe une fonction $\underline{\underline{Z}}\times\underline{\underline{Y}}$-mesurable g , à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, telle que l'on ait $N(z,dy) = g(z,y)P(dy)$, soit encore telle que, pour $z\in Z$ fixé, la fonction $g(z,.)$ soit un représentant de la classe de fonctions z . On a alors, pour tout $z\in Z$ et tout $x\in X$,

$$m^x(z) = \int g(z,y)\,M(x,dy)$$

et (3) implique que $(x,z) \to m^x(z)$ est $\underline{\underline{X}}\times\underline{\underline{Z}}$-mesurable : c'est fini.

REMARQUE.- Prenons $(X,\underline{\underline{X}}) = (F,\underline{\underline{T}})$, où $\underline{\underline{T}}$ est la tribu "faible" sur F définie plus haut. D'après [°], le noyau σ-fini M, de base P, induit par l'application identité de F (i.e. $M(x,dy) = x(y)P(dy)$) n'est pas mesurable si P n'est pas purement atomique. Cet exemple ne me satisfait pas entièrement car $(X,\underline{\underline{X}})$ y est un espace "lamentable", mais je n'ai pas réussi à trouver d'exemple où l'espace $(X,\underline{\underline{X}})$ serait au moins séparable.

Revenant à l'interprétation du noyau M de base P comme application $x \to m^x$ de X dans F, nous allons maintenant nous intéresser à la traduction de la mesurabilité de M dans ce cadre. Suivant [°], le noyau M est dit <u>fort</u> si $x \to m^x$ est une application mesurable de $(X,\underline{\underline{X}})$ dans $(F,\underline{\underline{B}}(F))$. On sait d'après [°] (et nous le redémontrerons) que M est mesurable s'il est fort ; nous allons voir que la réciproque est vraie si $(X,\underline{\underline{X}})$ est un espace de Blackwell (nous parlerons du cas général dans une remarque).

THEOREME 2.- <u>Si</u> M <u>de base</u> P <u>induit une application mesurable</u> $x \to m^x$ <u>de</u> $(X,\underline{\underline{X}})$ <u>dans</u> $(F,\underline{\underline{B}}(F))$, <u>alors</u> M <u>est mesurable</u>. <u>Réciproquement</u>, <u>si</u> M <u>de base</u> P <u>est mesurable</u>, <u>l'application induite de</u> $(X,\underline{\underline{X}})$ <u>dans</u> $(F,\underline{\underline{B}}(F))$ <u>est mesurable lorsque</u> $(X,\underline{\underline{X}})$ <u>est un espace de Blackwell</u>.

DEMONSTRATION. D'abord le premier point. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $f \to f \wedge n$ de F dans lui-même est continue ; on en déduit sans peine que, M étant fort, l'application $x \to m^x \wedge nP$ est un noyau borné M_n de $(X,\underline{\underline{X}})$ dans $(Y,\underline{\underline{Y}})$, et donc mesurable. Alors M, limite de la suite croissante des M_n, est aussi mesurable. Passons au second point. Le noyau M étant mesurable, nous montrons d'abord, sans hypothèse sur $(X,\underline{\underline{X}})$, que le graphe de $x \to m^x$ dans XxF appartient à $\underline{\underline{X}} \times \underline{\underline{B}}(F)$. D'après le théorème 1, la fonction $(x,A) \to m^x(A)$ est $\underline{\underline{X}} \times \underline{\underline{B}}(E)$-mesurable. On en déduit que la fonction $(x,f) \to m^x(f) = \int f\, dm^x$, définie sur XxF, est $\underline{\underline{X}} \times \underline{\underline{B}}(F)$-mesurable, par exemple en remarquant que

$$m^x(f) = \int_0^\infty m^x[\{f \geq t\}]\, dt$$

et que l'application $(f,t) \to \{f \geq t\}$ de $F \times \mathbb{R}_+$ dans E est mesurable pour les tribus $\underline{\underline{B}}(F) \times \underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)$ et $\underline{\underline{B}}(E)$ (noter que $1_{\{f \geq t\}}$ est la limite dans F de la suite décroissante des fonctions $f_n = (\frac{f}{t} \wedge 1)^n$). Soit par ailleurs $\underline{\underline{A}}$ une algèbre de Boole dénombrable engendrant $\underline{\underline{Y}}$ et définissons une partie G de XxF par

$$(x,f) \in G \Leftrightarrow \forall A \in \underline{\underline{A}} \quad P(A) = \int_A f\, dm^x + \int_A f\, dP \,.$$

Pour $x \in X$ fixé, on a $(x,f) \in G$ ssi f est la densité (en tant que classe) de la mesure P par rapport à la mesure $m^x + P$. D'autre part, $\underline{\underline{A}}$ est dénombrable et, pour $A \in \underline{\underline{A}}$ fixé, l'application $f \to f1_A$ de F dans lui-même est continue ; comme $(x,f) \to m^x(f)$ est $\underline{\underline{X}} \times \underline{\underline{B}}(F)$-mesurable, on en déduit que G appartient à $\underline{\underline{X}} \times \underline{\underline{B}}(F)$. Enfin, le graphe de $x \to m^x$ dans XxF appartient à $\underline{\underline{X}} \times \underline{\underline{B}}(F)$ car c'est l'image réciproque de G par l'application $(x,g) \to (x, 1/1+g)$ de XxF dans lui-même, qui est mesurable pour la tribu $\underline{\underline{X}} \times \underline{\underline{B}}(F)$. Soit H le graphe de $x \to m^x$; si B est un borélien de F, l'ensemble $\{x : m^x \in B\}$ est projection sur X de $(X \times B) \cap H$ et donc d'un élément de $\underline{\underline{X}}\times\underline{\underline{B}}(F)$. Comme F est polonais, on en déduit que $\{x : m^x \in B\}$ est une partie $\underline{\underline{X}}$-analytique de X, et donc $\underline{\underline{X}}$-bianalytique car son complémentaire, égal à $\{x : m^x \in B^c\}$, est aussi $\underline{\underline{X}}$-analytique. Si $(X,\underline{\underline{X}})$ est un espace de Blackwell, toute partie $\underline{\underline{X}}$-bianalytique de X appartient à $\underline{\underline{X}}$, et alors $x \to m^x$ est mesurable pour les tribus $\underline{\underline{X}}$ et $\underline{\underline{B}}(F)$.

REMARQUE.- Sans rien supposer sur $(X,\underline{\underline{X}})$, on a vu que, si M de base P est mesurable, le graphe de $x \to m^x$ dans $X\times F$ appartient à $\breve{\underline{\underline{X}}}\times\underline{\underline{B}}(F)$, et que donc $x \to m^x$ est mesurable de $(X,\breve{\underline{\underline{X}}})$ dans $(F,\underline{\underline{B}}(F))$, où $\breve{\underline{\underline{X}}}$ est la tribu des parties $\underline{\underline{X}}$-bianalytiques de X. Cette tribu est en général plus petite que la tribu $\hat{\underline{\underline{X}}}$ engendrée par les parties $\underline{\underline{X}}$-analytiques de X : lorsque $(X,\underline{\underline{X}})$ est l'espace de Blackwell $(\mathbb{R},\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}))$, on a $\breve{\underline{\underline{X}}} = \underline{\underline{X}}$, mais $\hat{\underline{\underline{X}}} \neq \underline{\underline{X}}$.

On pourrait tout de suite, en invoquant [°], déduire du théorème précédent que le noyau M "satisfait au théorème de Doob" s'il est mesurable et si $(X,\underline{\underline{X}})$ est de Blackwell. Mais nous préférons donner d'abord une version canonique de ce résultat, implicite dans [°], car elle éclairera notre démarche dans le cas général.

THEOREME 3.- *Il existe une fonction* $\underline{\underline{B}}(F)\times\underline{\underline{Y}}$-*mesurable* Ψ, *à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$, *telle que, pour tout* $z \in F$, *la fonction* $\Psi(z,.)$ *soit un représentant de la classe* z. *De plus, on peut supposer que* $\Psi(z,.)$ *est partout* >0 *si* z *est* >0 P-p.s. .

DEMONSTRATION. L'application identité de F dans lui-même induit évidemment un noyau fort de $(F,\underline{\underline{B}}(F))$ dans $(Y,\underline{\underline{Y}})$; d'après [°], ce noyau est donc de la forme $g(z,y)\,P(dy)$ où g est une fonction $\underline{\underline{B}}(F)\times\underline{\underline{Y}}$-mesurable et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ (rappelons la démonstration : on applique le théorème de Doob au noyau borné induit par $z \to z\wedge n$, d'où une fonction g_n, et on prend $g = h\,1_{\{h<\infty\}}$ où $h = \limsup_n g_n$). De plus, l'ensemble $B = \{z \in F : z \text{ est } >0 \text{ P-p.s.}\}$ appartient à $\underline{\underline{B}}(F)$ (on a $z \in B \Leftrightarrow \lim_n (z\wedge 1)^{-n} = 1$), et on assure alors le "de plus" de l'énoncé en prenant Ψ égale à g sur $(B^c\times Y)\cup\{g>0\}$ et à 1 ailleurs.

REMARQUE.- Si on désigne par $\underline{\underline{L}}^0_+(\underline{\underline{Y}})$ l'ensemble des fonctions (et non des classes) $\underline{\underline{Y}}$-mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, alors, pour tout $f \in \underline{\underline{L}}^0_+(\underline{\underline{Y}})$, il existe $z \in F$ tel que $f = \Psi(z,.)$ P-p.s. : autrement dit, la fonction Ψ est une fonction "P-presque universelle" pour $\underline{\underline{L}}^0_+(\underline{\underline{Y}})$, douée par ailleurs d'autres propriétés (il y a unicité de $z \in F$ représentant $f \in \underline{\underline{L}}^0_+(\underline{\underline{Y}})$ et on a $f \in z$).

COROLLAIRE.- *Si* M *de base* P *est mesurable et si* $(X,\underline{\underline{X}})$ *est de Blackwell, il existe une fonction* $\underline{\underline{X}}\times\underline{\underline{Y}}$-*mesurable* g *à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$ *telle qu'on ait* $M(x,dy) = g(x,y)\,P(dy)$ *pour tout* $x \in X$.

DEMONSTRATION. D'après le théorème 2, $x \to m^x$ est une application mesurable de $(X,\underline{\underline{X}})$ dans $(F,\underline{\underline{B}}(F))$; d'après le théorème 3, on peut alors prendre $g(x,y) = \Psi(m^x,y)$.

REMARQUE.- Autrement dit, (P,g) est une $\underline{\underline{X}}$-réalisation de M. Si on ne fait aucune hypothèse sur $(X,\underline{\underline{X}})$, on obtient de même une $\widehat{\underline{\underline{X}}}$-réalisation (P,g) de M d'après la remarque du théorème 2.

LE CAS GENERAL

Nous continuons à désigner par M un noyau σ-fini de $(X,\underline{\underline{X}})$ dans $(Y,\underline{\underline{Y}})$, mais nous ne supposons plus M basique. Désignant par Ω l'espace polonais $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, nous commençons par établir l'existence d'une fonction $\underline{\underline{B}}(\Omega)\times\underline{\underline{Y}}$-mesurable Ψ, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, qui soit, pour toute probabilité P sur $(Y,\underline{\underline{Y}})$, "P-presque universelle" pour l'ensemble $\underline{\underline{L}}^0_+(\underline{\underline{Y}})$ des fonctions $\underline{\underline{Y}}$-mesurables, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. On n'aura cependant pas ici d'unicité du "code" $\omega\in\Omega$ représentant $f\in\underline{\underline{L}}^0_+(\underline{\underline{Y}})$ pour P donnée, ce qui nous compliquera un peu la vie.

PROPOSITION 2.- Il existe une fonction $\underline{\underline{B}}(\Omega)\times\underline{\underline{Y}}$-mesurable Ψ, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, telle que, pour toute probabilité P sur $(Y,\underline{\underline{Y}})$ et toute fonction $f\in\underline{\underline{L}}^0_+(\underline{\underline{Y}})$, il existe (au moins) un $\omega\in\Omega$ de sorte que l'on ait $f = \Psi(\omega,.)$ P-p.s. et que, de plus, $\Psi(\omega,.)$ soit partout >0 si f est partout >0. Nous dirons qu'une telle fonction Ψ est une fonction presque universelle pour l'ensemble $\underline{\underline{L}}^0_+(\underline{\underline{Y}})$.

DEMONSTRATION. Toute $f\in\underline{\underline{L}}^0_+(\underline{\underline{Y}})$ est limite d'une suite décroissante de fonctions dans $\underline{\underline{L}}^0_+(\underline{\underline{Y}})$ dénombrablement étagées et à valeurs dans $\mathbb{Q}_+$. D'autre part, si $\underline{\underline{A}}$ désigne une algèbre de Boole dénombrable engendrant la tribu $\underline{\underline{Y}}$, on sait que, pour tout $B\in\underline{\underline{Y}}$ et toute probabilité P sur $(Y,\underline{\underline{Y}})$, il existe une suite double (A^q_p) d'éléments de $\underline{\underline{A}}$ telle que B soit contenu dans et P-p.s. égal à $\bigcap_q \bigcup_p A^q_p$. Par conséquent, la proposition sera établie si l'on trouve une fonction $\underline{\underline{B}}(\Omega)\times\underline{\underline{Y}}$-mesurable Ψ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ vérifiant la propriété suivante : pour $f\in\underline{\underline{L}}^0_+(\underline{\underline{Y}})$, il existe $\omega\in\Omega$ de sorte qu'on ait $\Psi(\omega,.) = f$ partout si f est de la forme $f = \inf_n \sup_m f^n_m$, où chaque f^n_m est combinaison linéaire dénombrable, à coefficients dans $\mathbb{Q}_+$, d'indicatrices d'éléments de $\underline{\underline{A}}$. Nous fixons une énumération $p \to r_p$ de $\mathbb{Q}_+$ et $q \to A_q$ de $\underline{\underline{A}}$, puis un homéomorphisme $\omega \to (\alpha,\beta)$ de Ω sur $\Omega^3\times\Omega^3$ (α et β sont donc des applications de $\mathbb{N}^3$ dans $\mathbb{N}$) et nous posons, pour $\omega\in\Omega$ et $y\in Y$,

$$\Phi(\omega,y) = \inf_n \sup_m \textstyle\sum_k r_{\alpha(m,n,k)}\, 1_{A_{\beta(m,n,k)}}$$

On vérifie sans peine que Φ, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, est $\underline{\underline{B}}(\Omega)\times\underline{\underline{Y}}$-mesurable, et il ne reste plus qu'à poser $\Psi = \Phi\, 1_{\{\Phi<\infty\}}$.

REMARQUE. Si, par exemple, on a $(Y,\underline{\underline{Y}}) = (\mathbb{R},\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}))$, l'énoncé analogue obtenu en oubliant "P-p.s." est faux, même en remplaçant $(\Omega,\underline{\underline{B}}(\Omega))$ par n'importe quel espace mesurable. Cela résulte aisément des propriétés de la hiérarchie de Baire sur $\underline{\underline{L}}^0_+(\mathbb{R})$.

Voici maintenant l'extension annoncée du théorème de Doob au cas où le noyau qu'on dérive est σ-fini. C'est aussi une généralisation du corollaire du théorème 3.

THEOREME 4.- <u>Supposons</u> $(X,\underline{\underline{X}})$ <u>de Blackwell et</u> M <u>mesurable</u>. <u>Si</u> $x \to P^x$ <u>est un noyau markovien de</u> $(X,\underline{\underline{X}})$ <u>dans</u> $(Y,\underline{\underline{Y}})$ <u>tel que</u> m^x <u>soit absolument continue par rapport à</u> P^x <u>pour tout</u> $x\varepsilon X$, <u>alors il existe une fonction</u> $\underline{\underline{X}}\times\underline{\underline{Y}}$<u>-mesurable</u> g , <u>à valeurs dans</u> $\mathbb{R}_+$, <u>telle qu'on ait</u>

$$M(x,dy) = g(x,y)\ P(x,dy)$$

<u>pour tout</u> $x\varepsilon X$.

DEMONSTRATION. Nous supposons dans un premier temps que $(Y,\underline{\underline{Y}})$ est aussi un espace de Blackwell (le cas où $(Y,\underline{\underline{Y}}) = (\mathbb{R},\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}))$ nous suffirait d'ailleurs) et nous désignons par $\underline{\underline{A}}$ une algèbre de Boole dénombrable engendrant $\underline{\underline{Y}}$, par Ψ une fonction $\underline{\underline{B}}(\Omega)\times\underline{\underline{Y}}$-mesurable presque universelle pour $\underline{\underline{L}}^0_+(\underline{\underline{Y}})$. Définissons une partie Z de $X\times\Omega$ par

$$(x,\omega)\varepsilon Z \Leftrightarrow \forall A\varepsilon\underline{\underline{A}}\quad P^x(A) = \int_A \Psi(\omega,.)\, dm^x + \int_A \Psi(\omega,.)\, dP^x$$

Pour x fixé, on a $(x,\omega)\varepsilon Z$ ssi $\Psi(\omega,.)$ est une densité de la mesure P^x par rapport à la mesure m^x+P^x ; cette dernière étant équivalente à une probabilité, il existe, d'après les propriétés de Ψ (cf proposition 2), <u>au moins</u> un $\omega\varepsilon\Omega$ tel que $(x,\omega)\varepsilon Z$. D'autre part, les noyaux $x\to m^x$ et $x\to P^x$ étant mesurables, et $\underline{\underline{A}}$ étant dénombrable, il est clair que Z appartient à $\underline{\underline{X}}\times\underline{\underline{B}}(\Omega)$. Ayant muni Z de la tribu $\underline{\underline{Z}}$, trace de $\underline{\underline{X}}\times\underline{\underline{B}}(\Omega)$ sur Z, nous définissons un noyau markovien $z\to P^z$ et un noyau sousmarkovien $z\to Q^z$ de $(Z,\underline{\underline{Z}})$ dans $(Y,\underline{\underline{Y}})$ comme suit :

$$\text{si } z=(x,\omega),\quad P(z,dy)=P(x,dy) \text{ et } Q(z,dy)=\Psi(\omega,y)\,P(x,dy)$$

Noter que, si $z=(x,\omega)$ et $\zeta=(x,w)$ sont deux éléments de Z ayant même première composante, alors on a $P^z=P^\zeta$ et aussi $Q^z=Q^\zeta$ (car $\Psi(\omega,.)$ et $\Psi(w,.)$ sont deux densités de P^x par rapport à m^x+P^x) ; il résulte alors du théorème de Doob "précisé" (i.e., notre énoncé avec son "de plus") qu'il existe une fonction $\underline{\underline{Z}}\times\underline{\underline{Y}}$-mesurable f , à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, telle que $Q(z,dy)=f(z,y)\,P(z,dy)$ pour tout $z\varepsilon Z$ et vérifiant de plus la propriété suivante : si z et ζ sont deux éléments de Z ayant même première composante, alors $f(z,.)=f(\zeta,.)$. Comme par ailleurs la projection de Z sur X est égale à X, cette dernière propriété nous permet de définir une fonction h de $X\times Y$ dans $\mathbb{R}_+$ en posant, pour tout $(x,y)\varepsilon X\times Y$ et tout $t\varepsilon\mathbb{R}$,

$$h(x,y)=t \Leftrightarrow \exists\omega\varepsilon\Omega\quad (x,\omega)\varepsilon Z \text{ et } f((x,\omega),y)=t$$

Comme Ω est polonais, le graphe H de h défini ci-dessus, projection le long de Ω d'un élément de la tribu $\underline{\underline{X}}\times\underline{\underline{B}}(\Omega)\times\underline{\underline{Y}}\times\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})$, est une partie $\underline{\underline{X}}\times\underline{\underline{Y}}\times\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})$-analytique de $X\times Y\times\mathbb{R}$. Maintenant, si B est un borélien de $\mathbb{R}$, l'ensemble $h^{-1}(B)$ est la projection de $H\cap(X\times Y\times B)$ sur $X\times Y$ et est donc $\underline{\underline{X}}\times\underline{\underline{Y}}$-analytique ; comme il en est de même pour B^c, $h^{-1}(B)$ est finalement $\underline{\underline{X}}\times\underline{\underline{Y}}$-bianalytique, et donc appartient à $\underline{\underline{X}}\times\underline{\underline{Y}}$ si $\underline{\underline{X}}$ et $\underline{\underline{Y}}$ sont des tribus de Blackwell - ce que nous supposons. Par conséquent, la fonction h est $\underline{\underline{X}}\times\underline{\underline{Y}}$-mesurable, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, et, par ailleurs, pour tout $x\in X$, $h(x,.)$ est une densité de P^x par rapport à m^x+P^x. Il ne reste plus alors qu'à poser $g=(\frac{1}{h}-1)\,1_{\{0<h<1\}}$. Nous voyons enfin, rapidement, comment traiter le cas où $(Y,\underline{\underline{Y}})$ est un espace séparable quelconque. D'abord, des arguments classiques (évoqués dans la démonstration de la proposition 1) permettent de se ramener au cas où Y est une partie de $\mathbb{R}$ et $\underline{\underline{Y}}$ sa tribu borélienne. Soient alors $x\to\overline{P}^x$ et $x\to\overline{m}^x$ les noyaux mesurables de $(X,\underline{\underline{X}})$ dans $(\mathbb{R},\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}))$ où $\overline{P}^x$, $\overline{m}^x$ sont les images de P^x, m^x par l'injection de Y dans $\mathbb{R}$, et appliquons leur la première partie de la démonstration : on obtient une fonction $\overline{g}$, d'où g en restreignant $\overline{g}$ à $X\times Y$.

REMARQUES.- 1) On peut ajouter un "de plus" dans l'énoncé, analogue à celui de notre énoncé du théorème de Doob.

2) Si $(X,\underline{\underline{X}})$ est un espace mesurable quelconque, la même démonstration fournit une fonction $\tilde{g}$ mesurable pour la tribu $\widetilde{\underline{\underline{X}}\times\underline{\underline{Y}}}$ des parties $\underline{\underline{X}}\times\underline{\underline{Y}}$-bianalytiques, laquelle est en général strictement plus grande que $\tilde{\underline{\underline{X}}}\times\tilde{\underline{\underline{Y}}}$ (même si $\underline{\underline{Y}}$ est de Blackwell). Il faut alors encore un coup de pouce pour obtenir une fonction $\tilde{\underline{\underline{X}}}\times\underline{\underline{Y}}$-mesurable g telle que $((P^x)_{x\in X}, g)$ soit une $\tilde{\underline{\underline{X}}}$-réalisation de M : pour tout $n\in\mathbb{N}$, on applique le théorème de Doob au noyau borné $x\to Q_n^x$ de $(X,\tilde{\underline{\underline{X}}})$ dans $(Y,\underline{\underline{Y}})$ défini par $Q_n(x,dy)=n\wedge\tilde{g}(x,y)\,P(x,dy)$, ce qui nous fournit une fonction $\tilde{\underline{\underline{X}}}\times\underline{\underline{Y}}$-mesurable g_n, et on prend alors pour g la fonction $h\,1_{\{h<\infty\}}$, où $h=\limsup_n g_n$.

En corollaire, nous obtenons, dans un cas bien particulier, une caractérisation de la mesurabilité de M, qui étend un résultat de [°]

COROLLAIRE.- _Supposons_ $(X,\underline{\underline{X}})$ _de Blackwell, et, sans supposer_ M _mesurable, supposons connu un noyau markovien_ $x\to P^x$ _de_ $(X,\underline{\underline{X}})$ _dans_ $(Y,\underline{\underline{Y}})$ _tel que_ m^x _soit absolument continue par rapport à_ P^x _pour tout_ $x\in X$. _Alors le noyau_ M _est mesurable ssi, pour tout_ $k\in\mathbb{N}$, _l'application_ $M_k : x\to m^x\wedge kP^x$ _est un noyau (borné) de_ $(X,\underline{\underline{X}})$ _dans_ $(Y,\underline{\underline{Y}})$.

DEMONSTRATION. Le noyau M étant la limite croissante des M_k, la condition suffisante est triviale. Réciproquement, supposons M mesurable. D'après le théorème, on a alors $M(x,dy)=g(x,y)\,P(x,dy)$ où g est $\underline{\underline{X}}\times\underline{\underline{Y}}$-mesurable, et donc $m^x\wedge kP^x=k\wedge g(x,.)\,P^x$, d'où M_k est un noyau.

Nous terminons nos constructions de réalisation de M par ce que nous savons dire de mieux dans le cas le plus général ; ici, supposer $\underline{\underline{X}}$ de Blackwell ne nous apporterait rien de plus (voir cependant une conjecture en remarque)

THEOREME 5.- Si le noyau M est mesurable, il admet une $\hat{\underline{\underline{X}}}$-réalisation, où $\hat{\underline{\underline{X}}}$ est la tribu engendrée par les parties $\underline{\underline{X}}$-analytiques de X.

DEMONSTRATION. Soit Ψ une fonction $\underline{\underline{B}}(\Omega)\times\underline{\underline{Y}}$-mesurable, presque universelle pour $\underline{\underline{L}}^0_+(\underline{\underline{Y}})$, et posons $\Theta = \Psi + 1_{\{\Psi = 0\}}$; la fonction Θ est $\underline{\underline{B}}(\Omega)\times\underline{\underline{Y}}$-mesurable, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, et partout >0, et le "de plus" de la proposition 2 assure que, si $f\in\underline{\underline{L}}^0_+(\underline{\underline{Y}})$ est partout >0, alors, pour toute mesure σ-finie m sur $(Y,\underline{\underline{Y}})$, il existe au moins un $\omega\in\Omega$ tel que $f = \Theta(\omega,.)$ m-p.s. Soit alors Z la partie de $X\times\Omega$ définie par

$$(x,\omega)\in Z \Leftrightarrow \int \Theta(\omega,.)\, dm^x = 1$$

Comme M est mesurable, Z appartient à $\underline{\underline{X}}\times\underline{\underline{B}}(\Omega)$; par ailleurs, l'ensemble $H = \{x : m^x \neq 0\}$ appartient à $\underline{\underline{X}}$ et, pour $x\in H$ fixé, il existe au moins un $\omega\in\Omega$ tel que $(x,\omega)\in H$, si bien que H est la projection de Z sur X. Appliquons à Z la forme abstraite du théorème de section de Jankov-Von Neumann (cf les n°III.81-82 du livre rose, où le rôle de notre Ω est joué par $\mathbb{R}_+$, qui a même structure borélienne) : on obtient une application mesurable $x \to \omega(x)$ de $(X,\hat{\underline{\underline{X}}})$ dans $(\Omega,\underline{\underline{B}}(\Omega))$ telle que $(x,\omega(x))$ appartienne à Z pour tout $x\in H$. Alors M admet comme $\hat{\underline{\underline{X}}}$-réalisation le couple (N,g) où $N(x,dy) = \Theta(\omega(x),y)M(x,dy)$ pour $x\in H$ et $N(x,dy) = \varepsilon_\eta$, η point fixé dans Y, pour $x\notin H$, et $g(x,y) = 1/\Theta(\omega(x),y)$ pour $x\in H$ et $g(x,y) = 0$ pour $x\notin H$.

REMARQUE.- Le problème de trouver une $\underline{\underline{X}}$-réalisation d'un noyau σ-fini mesurable ressemble (mais c'est peut-être superficiel) à celui de décomposer un borélien à coupes $\underline{\underline{F}}_\sigma$ dans un produit d'espaces polonais en une réunion dénombrable de boréliens à coupes fermées (problème que Saint-Raymond a résolu positivement). Aussi ne serais je pas étonné que le noyau mesurable M ait une $\underline{\underline{X}}$-réalisation dans le cas où $(X,\underline{\underline{X}})$ est un espace de Blackwell.

En prime, nous avons une extension du théorème de Doob au cas de deux noyaux σ-finis

COROLLAIRE.- Supposons M mesurable et soit L un autre noyau σ-fini mesurable de $(X,\underline{\underline{X}})$ dans $(Y,\underline{\underline{Y}})$. Si, pour tout $x\in X$, la mesure M(x,dy) est absolument continue par rapport à la mesure L(x,dy), alors il existe une fonction $\hat{\underline{\underline{X}}}\times\underline{\underline{Y}}$-mesurable g, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, telle qu'on ait $M(x,dy) = g(x,y)L(x,dy)$ pour tout $x\in X$.

DEMONSTRATION. Soient (V,v) une $\hat{\underline{\underline{X}}}$-réalisation de M et (U,u) une $\hat{\underline{\underline{X}}}$-réalisation de L. Posons, pour tout $x\in X$,

$$P(x,dy) = U(x,dy) \qquad Q(x,dy) = 1_{\{v>0\}}(x,y)\,V(x,dy)$$

et appliquons le théorème de Doob aux noyaux $x \to P^x$ et $x \to Q^x$: on obtient une fonction $\hat{\underline{\underline{X}}}\times\underline{\underline{Y}}$-mesurable w, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, telle que $Q(x,dy) = w(x,y)\,P(x,dy)$. On prend alors $g = \frac{vw}{u}\,1_{\{u>0\}}$.

Nous terminons ce paragraphe en donnant, rapidement, un exemple où le noyau M n'est pas mesurable alors que chaque mesure m^x est somme de mesures de Dirac (cela ne peut évidemment pas arriver dans le cas basique). Nous prenons $(Y,\underline{\underline{Y}}) = (\mathbb{R},\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}))$, puis $X = \mathbb{R}$ muni de la tribu $\underline{\underline{X}}$ des boréliens invariants par toutes les translations rationnelles. Enfin, nous posons, pour tout $x \in X$, $M(x,dy) = \sum_{r\in\mathbb{Q}} \varepsilon_{x+r}$. Pour $A \in \underline{\underline{B}}(\mathbb{R})$, $M(x,A)$ est le nombre des $y \in A$ tels que xRy où R est la relation d'équivalence $xRy \Leftrightarrow x-y \in \mathbb{Q}$. Comme le saturé d'un borélien A pour R (encore égal à $\{x : M(x,A) \geq 1\}$) est un borélien, on peut montrer que l'application $M : x \to M(x,dy)$ est un noyau de $(X,\underline{\underline{X}})$ dans $(Y,\underline{\underline{Y}})$; plus précisément, $A \in \underline{\underline{B}}(\mathbb{R})$ étant fixé, posons $M_0(x,A) = 1$ si on a $M(x,A) \geq 1$ et $M_0(x,A) = 0$ sinon, puis, $\underline{\underline{P}}_n$ étant la n-ième partition dyadique de $\mathbb{R}$, posons $M_n(x,A) = \sum_{B\in\underline{\underline{P}}_n} M_0(x,A\cap B)$: pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'application $x \to M_n(x,A)$ est $\underline{\underline{X}}$-mesurable, et on a $M(x,A) = \lim_n \uparrow M_n(x,A)$. Cependant, le noyau M n'est pas mesurable. En effet, s'il l'était, l'ensemble $\{(x,y) : M(x,\{y\}) = 1\}$, qui est le graphe de la relation R, appartiendrait à $\underline{\underline{X}}\times\underline{\underline{Y}}$, et il est bien connu que ce n'est pas le cas ; plus précisément, si ce graphe appartenait à $\underline{\underline{X}}\times\underline{\underline{Y}}$, on en déduirait, à l'aide du théorème de section de Jankov-Von Neumann, l'existence d'une sélection universellement mesurable pour R, en contradiction avec un résultat célèbre de Vitali. Noter que la tribu $\underline{\underline{X}}$ n'est pas séparable (si elle l'était, le graphe de R appartiendrait à $\underline{\underline{X}}\times\underline{\underline{X}}$, car $\underline{\underline{X}}$ serait de Blackwell), si bien, qu'ici encore, l'espace mesurable $(X,\underline{\underline{X}})$ est "lamentable".

AUTOUR DE LA MESURABILITE

Nous continuons ici à explorer notre définition de la mesurabilité d'un noyau σ-fini (nous jetterons un coup d'oeil sur le cas non σ-fini à la fin). L'espace $(Y,\underline{\underline{Y}})$ est toujours supposé séparable, et nous supposerons désormais que $(X,\underline{\underline{X}})$ est un espace de Blackwell. Si m et n sont deux mesures σ-finies sur $(Y,\underline{\underline{Y}})$, nous noterons $m \lessapprox n$ (resp $m \sim n$) l'absolue continuité de m par rapport à n (resp l'équivalence de m et de n), puis $m|n$ la plus grande mesure $\lessapprox n$ et majorée par m, $m\wedge n$ la plus grande mesure majorée par m et n, et $(m-n)^+$ l'unique mesure telle que $m = m\wedge n + (m-n)^+$. Enfin, nous désignons par M et N deux noyaux σ-finis $x \to m^x$ et $x \to n^x$ de $(X,\underline{\underline{X}})$ dans $(Y,\underline{\underline{Y}})$, d'où les notations $M|N$, etc, pour $x \to m^x|n^x$, etc.

THEOREME 6.- Si M et N sont mesurables, alors $M|N$, $M\wedge N$ et $(M-N)^+$ sont des noyaux mesurables.

DEMONSTRATION. Afin de traiter à la fois les trois fonctions de M,N considérées, nous démontrerons un énoncé plus général. Soit f une fonction de $\mathbb{R}_+^2$ dans $\mathbb{R}_+$, homogène de degré 1 ; si m et n sont deux mesures σ-finies sur $(Y,\underline{\underline{Y}})$, on définit classiquement une nouvelle mesure σ-finie $f(m,n)$ sur $(Y,\underline{\underline{Y}})$ comme suit : P étant une probabilité telle que $m\lessapprox P$ et $n\lessapprox P$, et a,b des densités, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ de m,n par rapport à P, on pose $f(m,n)(dy) = f(a(y),b(y))\,P(dy)$, la mesure $f(m,n)$ ainsi définie ne dépendant pas de la probabilité de base P choisie. Et, si $f(s,t)=s1_{]0,\infty[}(t)$ (resp $f(s,t)=s\wedge t$, $=(s-t)^+$), on a $f(m,n)=m|n$ (resp $f(m,n)=m\wedge n$, $=(m-n)^+$). Nous nous donnons une telle fonction f et nous allons montrer que $f(M,N): x\to f(m^x,n^x)$ est un noyau mesurable, M et N étant supposés mesurables. D'abord, comme $f(0,.)=0$ et que $\{x: m^x=0\}$ appartient à $\underline{\underline{X}}$, quitte à tout restreindre à $\{x: m^x\neq 0\}$, on se ramène au cas où m^x est non nulle pour tout $x\varepsilon X$. Soit alors Ψ une fonction $\underline{\underline{B}}(\Omega)x\underline{\underline{Y}}$-mesurable presque universelle pour $\underline{\underline{L}}_+^0(\underline{\underline{Y}})$ et posons comme plus haut $\Theta = \Psi + 1_{\{\Psi=0\}}$, puis définissons une partie Z de $X\times\Omega$ par

$$(x,\omega)\varepsilon Z \Leftrightarrow \int\Theta(\omega,.)\,dm^x + \int\Theta(\omega,.)\,dn^x = 1$$

Comme M et N sont mesurables, Z appartient à $\underline{\underline{X}}x\underline{\underline{B}}(\Omega)$, et nous munissons Z de la tribu $\underline{\underline{Z}}$, trace de $\underline{\underline{X}}x\underline{\underline{B}}(\Omega)$ sur Z : $(Z,\underline{\underline{Z}})$ est alors un espace de Blackwell, $(X,\underline{\underline{X}})$ l'étant par hypothèse et Ω étant polonais. Nous définissons maintenant deux noyaux σ-finis mesurables $z\to m^z$, $z\to n^z$ et un noyau markovien $z\to P^z$ de $(Z,\underline{\underline{Z}})$ dans $(Y,\underline{\underline{Y}})$ en posant, pour $z=(x,\omega)\varepsilon Z$, $m^z=m^x$, $n^z=n^x$ et $P^z=\Theta(\omega,.)\,(m^x+n^x)$. D'après le théorème 4, il existe deux fonctions $\underline{\underline{Z}}x\underline{\underline{Y}}$-mesurables a et b, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, telles que $m^z=a(z,.)\,P^z$ et $n^z=b(z,.)\,P^z$, ce qui nous permet de définir un noyau mesurable $z\to f(m^z,n^z)=f[a(z,.),b(z,.)]\;P^z$ de $(Z,\underline{\underline{Z}})$ dans $(Y,\underline{\underline{Y}})$ tel que $f(m^z,n^z)=f(m^x,n^x)$ si $z=(x,\omega)$. Vérifions que $x\to f(m^x,n^x)$ est un noyau mesurable : d'après la proposition 1, nous devons vérifier que, si B appartient à $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})x\underline{\underline{Y}}$, alors la fonction $\phi: (x,s)\to f(m^x,n^x)(B_s)$ est $\underline{\underline{X}}x\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})$-mesurable. Comme $\underline{\underline{X}}$ et $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})$ sont de Blackwell, il nous suffit de montrer que le graphe de ϕ dans $X\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ est une partie $\underline{\underline{X}}x\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})x\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})$-analytique (cf la fin de la démonstration du théorème 4), et cela résulte de l'équivalence logique, pour $x\varepsilon X$ et $s,t\,\varepsilon\,\mathbb{R}$,

$$\phi(x,s)=t \Leftrightarrow \exists\omega\varepsilon\Omega\quad (x,\omega)\varepsilon Z \text{ et } f(m^{x,\omega},n^{x,\omega})(B_s)=t$$

car Ω est polonais, Z appartient à $\underline{\underline{X}}x\underline{\underline{B}}(\Omega)$ et $z\to f(m^z,n^z)$ est un noyau mesurable.

REMARQUE.- Si M n'est pas mesurable, $M\wedge N$ n'est même pas un noyau en général, même si N est un noyau borné. En effet, si M, de base P, n'est pas mesurable, il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $x\to m^x\wedge kP$ ne soit pas un noyau (partie triviale du corollaire du théorème 4).

COROLLAIRE 1.- <u>Si les noyaux</u> M <u>et</u> N <u>sont mesurables, les ensembles</u> $\{x : m^x\leq n^x\}$, $\{x : m^x = n^x\}$, $\{x : m^x \lessdot n^x\}$ <u>et</u> $\{x : m^x \perp n^x\}$ <u>appartiennent à</u> $\underline{\underline{X}}$.

DEMONSTRATION. Cela résulte immédiatement du fait que l'on a $m^x\leq n^x$ ssi $(m^x-n^x)^+=0$ et $m^x\lessdot n^x$ ssi $(m^x-m^x|n^x)^+=0$.

REMARQUE.- Si le noyau N n'est pas défini sur $(X,\underline{\underline{X}})$ comme M, mais sur un autre espace de Blackwell $(Z,\underline{\underline{Z}})$, on a des résultats analogues pour $(x,z)\to m^x|n^z$, etc et pour $\{(x,z) : m^x\leq n^z\}$, etc : il suffit d'étendre de manière triviale M et N à l'espace produit $(X,Z,\underline{\underline{X}}\times\underline{\underline{Z}})$, qui est de Blackwell, pour pouvoir appliquer le théorème et son corollaire.

COROLLAIRE 2.- <u>Si</u> M <u>est mesurable, et si, pour tout</u> $x\in X$, <u>on désigne par</u> a^x (<u>resp</u> d^x) <u>la partie atomique</u> (<u>resp la partie sans atomes</u>) <u>de la mesure</u> m^x, <u>alors</u> $x\to a^x$ <u>et</u> $x\to d^x$ <u>sont des noyaux mesurables</u>.

DEMONSTRATION. Soit $A=\{(x,y) : M(x,[y])>0\}$, où $[y]$ est l'atome de $\underline{\underline{Y}}$ contenant y. Si M est mesurable, on voit aisément que A appartient à $\underline{\underline{X}}\times\underline{\underline{Y}}$, si bien que $x\to a^x=1_A(x,.)\,m^x$ est un noyau mesurable, ainsi que $x\to d^x=(m^x-a^x)^+$ d'après le théorème.

Nous allons maintenant caractériser la mesurabilité d'un noyau σ-fini en termes de noyaux à mesures bornées (donc, quelque chose comme le corollaire du théorème 4, mais ce sera plus compliqué !). Cela ne donnera pas un critère "utile", mais sera satisfaisant pour l'esprit. Nous supposons désormais que Y est un espace polonais, $\underline{\underline{Y}}$ sa tribu borélienne (ce qui n'est pas vraiment une restriction : cf la fin de la démonstration du théorème 4), et nous désignons par Z l'ensemble des mesures bornées sur $(Y,\underline{\underline{Y}})$, que nous munissons de la tribu $\underline{\underline{Z}}$, tribu borélienne pour la convergence étroite sur Z : Z étant polonais pour la convergence étroite, l'espace $(Z,\underline{\underline{Z}})$ est de Blackwell. Notons qu'un noyau à mesures bornées de $(X,\underline{\underline{X}})$ dans $(Y,\underline{\underline{Y}})$ est alors exactement une application mesurable de $(X,\underline{\underline{X}})$ dans $(Z,\underline{\underline{Z}})$.

THEOREME 7.- <u>Le noyau</u> σ-<u>fini</u> M <u>est mesurable ssi</u> $\{(x,z) : m^x\lessdot z\}$ <u>appartient à</u> $\underline{\underline{X}}\times\underline{\underline{Z}}$ <u>et</u> $(x,z)\to m^x\wedge z$ <u>est un noyau de</u> $(X\times Z,\underline{\underline{X}}\times\underline{\underline{Z}})$ <u>dans</u> $(Y,\underline{\underline{Y}})$.

DEMONSTRATION. La nécessité résulte du théorème précédent et de son corollaire 1. Démontrons la suffisance. Nous remarquons d'abord que, lorsque k parcourt $\mathbb{N}$, on a $m^x|z=\sup_k m^x\wedge kz$ si bien que l'application $(x,z)\to m^x|z$ est un noyau σ-fini mesurable de $(X\times Z,\underline{\underline{X}}\times\underline{\underline{Z}})$ dans $(Y,\underline{\underline{Y}})$ si $(x,z)\to m^x\wedge z$ est un noyau. On achève alors la démonstration comme celle du théorème 6 : si B appartient à $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})\times\underline{\underline{Y}}$, on a

$$m^x(B_s) = t \Leftrightarrow \exists z \varepsilon Z \quad m^x \gtrless z \text{ et } m^x|z\,(B_s) = t \qquad x\varepsilon X,\ s\varepsilon \mathbb{R},\ t\varepsilon \overline{\mathbb{R}}$$

Comme $\{(x,z) : m^x \gtrless z\}$ appartient à $\underline{\underline{X}}x\underline{\underline{Z}}$ par hypothèse, on en déduit que la fonction $(x,s) \rightarrow m^x(B_s)$ a un graphe $\underline{\underline{X}}x\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})x\underline{\underline{B}}(\overline{\mathbb{R}})$-analytique et donc, finalement, que cette fonction est $\underline{\underline{X}}x\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})$-mesurable.

Maintenant, que peut-on dire si on sort du cadre des mesures σ-finies ? En fait, je ne sais pas dire grand chose, sauf que notre notion de mesurabilité est alors trop forte. En effet, soient m une mesure (positive) sur l'espace polonais Y, A une partie analytique de $\mathbb{R}$xY et f_A la fonction $s \rightarrow m(A_s)$ de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Si m est une mesure "décente" (par exemple, la limite d'une suite croissante de capacités), f_A est une fonction analytique (i.e. $\{f_A > t\}$ est analytique pour tout $t\varepsilon\mathbb{R}_+$) ; de plus, si A est borélien et si m est une mesure σ-finie (ou plus généralement la somme d'une série de mesures bornées), f_A est une fonction borélienne, mais, si m est par exemple la mesure de comptage des points (mesure bien décente), alors f_A est en général "seulement" analytique pour A borélien (noter que $\{f_A > 0\}$ est alors la projection de A sur $\mathbb{R}$). On pourrait alors dire qu'une application $x \rightarrow m^x$ de $(X,\underline{\underline{X}})$ dans l'ensemble des mesures sur $(Y,\underline{\underline{Y}})$ est un noyau décent si, pour toute partie analytique A de $\mathbb{R}$xY, la fonction $(x,s) \rightarrow m^x(A_s)$ est $\underline{\underline{X}}x\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})$-analytique. Je laisse au lecteur, à titre d'exercice, le soin de montrer que tout noyau σ-fini mesurable est un noyau décent.

APPENDICE

Ayant muni notre espace séparable $(Y,\underline{\underline{Y}})$ d'une probabilité P, nous désignons comme au début par F l'espace polonais $L^0_+(\underline{\underline{Y}},P)$, par $\underline{\underline{B}}(F)$ sa tribu borélienne et par $\underline{\underline{T}}$ la tribu "faible" sur F, sous-tribu de $\underline{\underline{B}}(F)$ engendrée par les fonctions $z \rightarrow \int_A z\,dP$ de F dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, A parcourant $\underline{\underline{Y}}$. Nous dirons qu'une partie H de F est <u>faiblement séparable</u> si la trace $\underline{\underline{T}}_{|H}$ de $\underline{\underline{T}}$ sur H est une tribu séparable ; lorsque H appartient à $\underline{\underline{B}}(F)$, on a alors $\underline{\underline{T}}_{|H} = \underline{\underline{B}}(F)_{|H}$ d'après le théorème de Blackwell. Enfin, nous dirons qu'une partie C de F est un L-<u>convexe</u> si c'est un convexe, héréditaire (i.e. pour $z,z'\varepsilon F$, $z\varepsilon C$ et $z' \leq z \Rightarrow z'\varepsilon C$), vérifiant la condition suivante : pour toute suite (z_n) dans C, il existe une suite (c_n) de réels >0 telle que $\sum c_n z_n$ appartienne à C. Il résulte du lemme de Borel-Cantelli que F lui-même, et donc tout convexe héréditaire fermé de F, est un L-convexe ; par ailleurs, pour tout $p\varepsilon[0,\infty]$, $L^p_+(\underline{\underline{Y}},P)$ est un L-convexe partout dense.

PROPOSITION A1.- <u>Une partie</u> H <u>de</u> F <u>est contenue dans un</u> L-<u>convexe faiblement séparable ssi il existe une</u> $\underline{\underline{Y}}$-<u>partition dénombrable</u> (A_n) <u>de</u> Y <u>telle que</u> H <u>soit contenu dans</u> $C = \{z\varepsilon F : \forall n \int_{A_n} z\,dP < \infty\}$, <u>ensemble qui est un cône</u> L-<u>convexe</u>, <u>faiblement séparable</u>, <u>appartenant à</u> $\underline{\underline{T}}$.

DEMONSTRATION. La condition suffisante et les propriétés de C sont immédiates. Pour la nécessité, on peut évidemment supposer que H est un L-convexe faiblement séparable, non vide et distinct de $\{0\}$. Soit alors (B^n) une suite d'éléments de $\underline{\underline{Y}}$ telle que les fonctions sur H $z \to \int_{B^n} z\,dP$ engendrent $\underline{\underline{T}}_{|H}$ et qu'aucune d'elles ne soient identiquement nulle ; je dis qu'il existe un n tel que tout $z \in H$ soit intégrable sur B^n. En effet, sinon, il existerait pour tout n un élément z_n de H non intégrable sur B^n et donc, H étant L-convexe, un élément z de H d'intégrale infinie sur chaque B^n ; mais alors la suite (B^n) ne distinguerait pas z de z/2, ce qui est absurde $\{z\}$ étant atome de $\underline{\underline{T}}_{|H}$. Maintenant, soit (A^i) une famille maximale d'éléments de $\underline{\underline{Y}}$ disjoints et de probabilité >0 telle que tout $z \in H$ soit intégrable sur chacun des A^i ; c'est nécessairement une famille dénombrable (A^n), et, si $A = Y - (\bigcup_n A^n)$, l'ensemble $H_A = \{z 1_A\,,\ z \in H\}$ est égal à $\{0\}$. En effet, cet ensemble est L-convexe, faiblement séparable (il est contenu dans H) et, s'il était distinct de $\{0\}$, le raisonnement du début appliqué à H_A fournirait un $B \in \underline{\underline{Y}}$ de sorte que tout $z \in H$ soit intégrable sur $A \cap B$ avec au moins un z d'intégrale non nulle, ce qui contredirait la maximalité de notre famille. Il ne reste plus qu'à prendre pour (A_n) la partition fournie par A et les A^n.

$L^1_+(\underline{\underline{Y}},P)$ est évidemment faiblement séparable ; pour $p<1$, nous obtenons en corollaire un peu mieux que le résultat de [°] (mais notre démonstration est un avatar de celle de [°])

COROLLAIRE.- <u>L'ensemble</u> $H = \bigcap_{p<1} L^p_+(\underline{\underline{Y}},P)$ <u>n'est pas faiblement séparable si</u> P <u>n'est pas purement atomique</u>.

DEMONSTRATION. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que H est L-convexe. Supposons que P ne soit pas purement atomique, et soit (A_n) une $\underline{\underline{Y}}$-partition dénombrable de Y. Il existe alors $A \in \underline{\underline{Y}}$, contenu dans un des A_n et non négligeable, tel que la restriction de P à $(A, \underline{\underline{Y}}_{|A})$ soit sans atomes. Dans un tel ensemble A, il existe une suite décroissante (B^n) d'éléments de $\underline{\underline{Y}}$ telle que $P(B_n) = P(A)/n$. Mais alors la fonction $\sum_n n\, 1_{B^n - B^{n+1}}$ appartient à tout L^p_+ pour $p<1$ et n'est pas intégrable sur A. Elle n'est donc pas intégrable sur un des éléments de notre partition, d'où la conclusion.

REMARQUES.- 1) Si $u \in F$ est >0 P-p.s., l'ensemble C_u des $z \in F$ tels que le produit zu soit intégrable est un L-convexe faiblement séparable. Sauf si P purement atomique n'a qu'un nombre fini d'atomes, un L-convexe faiblement séparable C n'est pas nécessairement contenu dans un tel C_u ; mais, c'est quand même "presque" vrai : pour toute probabilité Q sur $(F, \underline{\underline{B}}(F))$, il existe $u>0$ P-p.s. tel que $C - C_u$ soit Q-négligeable. Cela résulte aisément de la proposition A1 et du lemme de Borel-Cantelli

2) Soient $(X,\underline{\underline{X}},Q)$ un autre espace probabilisé et g une fonction $\underline{\underline{X}}\times\underline{\underline{Y}}$-mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Il résulte de la remarque précédente qu'il existe une fonction $\underline{\underline{Y}}$-mesurable u à valeurs dnas $]0,\infty[$ telle que $x \to \int g(x,y)\, u(y)\, P(dy)$ soit Q-p.s. finie ssi l'image de Q par l'application mesurable $x \to g(x,.)$ de $(X,\underline{\underline{X}})$ dans $(F,\underline{\underline{B}}(F))$ est portée par un L-convexe faiblement séparable.

Nous allons montrer maintenant qu'en un certain sens il y a peu de boréliens de F faiblement séparables et encore moins de L-convexes faiblement séparables en prouvant qu'il existe

a) une mesure de probabilité Q_1 sur $(F,\underline{\underline{B}}(F))$ négligeant tout borélien faiblement séparable,

b) une mesure de probabilité Q_2 sur $(F,\underline{\underline{B}}(F))$ portée par un borélien faiblement séparable et appartenant à $\underline{\underline{T}}$, mais négligeant tout L-convexe faiblement séparable,

lorsque la probabilité P n'est pas purement atomique. Nous nous contenterons de traiter le cas où $Y = \mathbb{R}$, $\underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{B}}(\mathbb{R})$ et où P est équivalente à la mesure de Lebesgue, le cas général s'y ramenant par des procédés classiques.

Nous prenons désormais $(X,\underline{\underline{X}}) = (Y,\underline{\underline{Y}}) = (\mathbb{R},\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}))$, que nous munissons de la mesure de Lebesgue λ. La fonction $f : (x,y) \to |x-y|^{-1}$ sur $X\times Y$ est finie $\lambda\times\lambda$-p.p. et $x \to f(x,.)$ est une application continue de X dans F. L'image B de X par cette application est un borélien de F (c'est en fait un $\underline{\underline{K}}_\sigma$), et, si (A^n) est une énumération des intervalles compacts à extrémités rationnelles, la tribu $\underline{\underline{T}}_{|B}$ est engendrée par les fonctions $\Psi_n : z \to \int_{A^n} z\, d\lambda$, si bien que B est faiblement séparable et appartient à $\underline{\underline{T}}$ (la tribu engendrée par les Ψ_n sur tout F est séparable ; comme les points de B sont des atomes de cette tribu, le théorème de Blackwell entraine que B appartient à cette tribu, et donc à $\underline{\underline{T}}$). Le point b) ci-dessus résulte alors immédiatement de la remarque 2) précédente et de la proposition suivante

PROPOSITION A2.- <u>La fonction</u> $f : (x,y) \to |x-y|^{-1}$ <u>est finie</u> $\lambda\times\lambda$-<u>p.p. mais</u>, <u>pour tout borélien</u> A, <u>la fonction</u> $x \to \int_A f(x,y)\, dy$ <u>vaut</u> $+\infty$ λ-<u>p.p. sur</u> A.

DEMONSTRATION. Rappelons que, si A est un borélien de $\mathbb{R}$, λ-presque tout point x de A est un point de densité de A, i.e., lorsque I parcourt les intervalles bornés contenant x, le rapport $\lambda(A\cap I)/\lambda(I)$ tend vers 1 lorsque le diamètre de I tend vers 0. Nous montrons que, si x est un point de densité de A, alors $\int_A f(x,y)\, dy = +\infty$. Par translation, on se ramène au cas où $x=0$. On a alors

$$\int_A |y|^{-1}\,dy = \int_0^{\infty}\lambda[A\cap(-\tfrac{1}{t},+\tfrac{1}{t})]\,dt \geq \sum_n \lambda[A\cap(-\tfrac{1}{n},+\tfrac{1}{n})] = +\infty$$

REMARQUE.- Feyel m'a indiqué qu'un peu de théorie du potentiel permet de montrer beaucoup mieux. En effet, notre fonction f est la restriction à $\mathbb{R}$ du noyau newtonien dans $\mathbb{R}^3$, et $\mathbb{R}$ est polaire dans $\mathbb{R}^3$. Par conséquent, pour toute mesure de Radon μ sur $\mathbb{R}$, la restriction à $\mathbb{R}$ $x\to\int f(x,y)\,\mu(dy)$ du potentiel de μ vaut $+\infty$ μ-presque partout.

Nous nous donnons maintenant une énumération (r_n) des rationnels et choisissons, à l'aide du lemme de Borel-Cantelli, des réels $c_n>0$ tels que la fonction $y\to\sum_n c_n|r_n-y|^{-1}$ soit finie λ-p.p. . Nous posons alors $g(x,y)=\sum_n c_n|x+r_n-y|^{-1}$ et définissons ainsi une fonction g sur $X\times Y$ finie $\lambda\times\lambda$-p.p. . L'application $x\to g(x,.)$ de X dans F est continue, et le point a) ci-dessus résulte alors immédiatement de la proposition suivante

PROPOSITION A3.- <u>La fonction</u> $g:(x,y)\to\sum_n c_n|x+r_n-y|^{-1}$ <u>est finie</u> $\lambda\times\lambda$-p.p., <u>mais</u>, <u>pour tout borélien</u> A <u>tel que</u> $\lambda(A)>0$, <u>la fonction</u> $x\to\int_A g(x,y)\,dy$ <u>est</u> λ-<u>p.p. égale à</u> $+\infty$.

DEMONSTRATION. Fixons A non négligeable et soit B l'ensemble des x tels que $\int_A g(x,y)\,dy=+\infty$. D'après la proposition précédente, B est non négligeable et invariant par les translations rationnelles. Il est bien connu que cela entraine que B^c est négligeable.