CLAUDE DELLACHERIE

# Mesurabilité des débuts et théorème de section : le lot à la portée de toutes les bourses

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 15 (1981), p. 351-370
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__351_0>

MESURABILITE DES DEBUTS ET THEOREME DE SECTION :
LE LOT A LA PORTEE DE TOUTES LES BOURSES

par C. Dellacherie

Cet exposé, rédigé à la demande de Chung et Protter entr'autres, a la prétention d'écarter définitivement la crainte qu'inspire à bon nombre de probabilistes non friands d'ensembles analytiques la démonstration des théorèmes cités dans le titre. J'avais déjà tenté il y a quelques années, dans le premier chapitre de ma monographie [3] "Capacités et processus stochastiques", de présenter les choses sans parler d'ensembles analytiques grâce à la technique des "rabotages de Sierpinski" ; mais - pêché de jeunesse - j'avais fait alors pis que mieux. Aussi aurais-je pu adopter comme titre de cet exposé :

Comment j'aurais dû écrire mon chapitre I, ou
les rabotages de Sierpinski sans sabotage de Dellacherie.

J'ai cette fois pris la résolution d'écrire le minimum de choses nécessaire pour présenter la matière avec clarté (ainsi, chaque concept "nouveau" sera introduit dans un contexte suffisamment général pour mettre en valeur ses traits saillants, mais sera illustré au même moment par les quelques exemples d'applications que nous avons en vue ici), et j'ai aussi mis à profit une simplification notable, due à Telgarsky, de la présentation des rabotages (ils deviennent ici des stratégies gagnantes pour un joueur dans un certain jeu topologique à deux personnes). On trouvera cependant, annoncés par la rubrique "Commentaires", des compléments pour le lecteur curieux d'aller au delà de notre cadre strict : on doit omettre en première lecture ces passages (que j'aurais écrits en petits caractères si j'en avais eu la possibilité).

## §I. ESPACES PAVES ET CAPACITES

1 Dans cet exposé, nous entendrons par pavage sur un ensemble E un ensemble $\underline{\underline{E}}$ de parties de E contenant $\emptyset$ et stable pour les réunions finies et les intersections dénombrables ; le couple $(E,\underline{\underline{E}})$ est appelé

<u>espace pavé</u>. Quelques pavages bien connus du lecteur : le pavage constitué des parties fermées, ou encore des parties compactes d'un espace topologique, et celui constitué par les éléments d'une tribu sur un ensemble "abstrait". En théorie des processus, on est amené à considérer un "produit" de ces deux types :

EXEMPLE. Soit $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ un espace mesurable ; désignons par $\underline{\underline{R}}$ l'ensemble des rectangles $K \times A$ où $K$ est un compact de $\mathbb{R}_+$ et $A$ un élément de $\underline{\underline{F}}$ et par $\underline{\underline{S}}$ l'ensemble des réunions finies de tels rectangles : comme $\underline{\underline{R}}$ est stable pour les intersections finies, il en est de même pour $\underline{\underline{S}}$. Nous posons $E = \mathbb{R}_+ \times \Omega$ que nous munissons du pavage $\underline{\underline{E}}$ engendré par $\underline{\underline{R}}$ : les éléments de $\underline{\underline{E}}$ sont les parties $L$ de la forme $L = \bigcap_n L_n$ où $(L_n)$ est une suite dans $\underline{\underline{S}}$ - suite que l'on peut supposer décroissante (cela est important pour la suite).

**2** Pour abréger nous écrirons $A_n \uparrow A$ (resp $A_n \downarrow A$) pour signifier que $(A_n)$ est une suite croissante (resp décroissante) d'ensembles de limite $A$ ; nous ferons de même pour les suites de réels.

DEFINITION. <u>Etant donné un espace pavé</u> $(E,\underline{\underline{E}})$, <u>une application</u> $C$ <u>de</u> $\underline{\underline{P}}(E)$ <u>dans</u> $\mathbb{R}_+$ <u>est une</u> $\underline{\underline{E}}$-capacité (de Choquet) sur $E$ <u>si elle est</u>

a) <u>croissante</u> : $A \subseteq B \Rightarrow C(A) \leq C(B)$

b) <u>montante</u> : $A_n \uparrow A \Rightarrow C(A_n) \uparrow C(A)$

c) <u>descendante sur</u> $\underline{\underline{E}}$ : $L_n \in \underline{\underline{E}}$ et $L_n \downarrow L \Rightarrow C(L_n) \downarrow C(L)$

EXEMPLES. 1) Si $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ est un espace probabilisé, la probabilité extérieure $P^*$ définie sur $\underline{\underline{P}}(\Omega)$ par

$$P^*(A) = \inf P(B) \,,\, B \in \underline{\underline{F}} \,,\, B \supseteq A$$

est évidemment une $\underline{\underline{F}}$-capacité.

2) Si $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ est un espace probabilisé et si $E = \mathbb{R}_+ \times \Omega$ est muni du pavage $\underline{\underline{E}}$ défini au n°1, la fonction $C$ sur $\underline{\underline{P}}(E)$ définie par

$$C(A) = P^*[\pi(A)] \text{ avec } \pi \text{ projection de } E \text{ sur } \Omega$$

est une $\underline{\underline{E}}$-capacité. Cela résulte immédiatement du petit lemme suivant (rédigé en ayant en vue une utilisation future).

LEMME. <u>La projection</u> $\pi$, <u>considérée comme application de</u> $\underline{\underline{P}}(E)$ <u>dans</u> $\underline{\underline{P}}(\Omega)$, <u>a les propriétés suivantes</u>

a) <u>elle est croissante</u> : $A \subseteq B \Rightarrow \pi(A) \subseteq \pi(B)$

b) <u>elle est montante</u> : $A_n \uparrow A \Rightarrow \pi(A_n) \uparrow \pi(A)$

c) <u>sa restriction à</u> $\underline{\underline{E}}$ <u>est à valeur dans</u> $\underline{\underline{F}}$ <u>et est descendante</u> :

$$L_n \in \underline{\underline{E}} \text{ et } L_n \downarrow L \Rightarrow \pi(L_n) \in F \text{ et } \pi(L_n) \downarrow \pi(L)$$

DEMONSTRATION. Seule c) n'est pas tout à fait évidente. D'abord, il est facile de voir qu'on a $\pi(L_n) \downarrow \pi(L)$ pour $L_n \downarrow L$ dès que les $L_n$ ont leurs coupes $L_n(\omega)$ compactes pour tout $\omega \in \Omega$ (ce qui est le cas quand les $L_n$ appartiennent à $\underline{\underline{E}}$). Ensuite, pour $L\varepsilon\underline{\underline{E}}$, il existe des $L_n\varepsilon\underline{\underline{S}}$ tels que $L_n \downarrow L$ (cf n°1) ; on a alors $\pi(L_n)\downarrow\pi(L)$ et donc $\pi(L)\varepsilon\underline{\underline{F}}$.

Etant donnés deux espaces pavés $(E,\underline{\underline{E}})$ et $(F,\underline{\underline{F}})$, nous dirons qu'une application de $\underline{\underline{P}}(E)$ dans $\underline{\underline{P}}(F)$ est une <u>opération</u> $(\underline{\underline{E}},\underline{\underline{F}})$-<u>capacitaire de</u> E <u>dans</u> F si elle vérifie les propriétés a),b),c) du lemme.

3 Soient $(E,\underline{\underline{E}})$ un espace pavé et C une $\underline{\underline{E}}$-capacité. Une partie A de E est dite C-<u>capacitable</u> si on a

$$C(A) = \sup C(L)\ ,\ L\varepsilon\underline{\underline{E}}\ ,\ L\subseteq A$$

Nous reprenons les exemples du n°2, dans leur ordre

EXEMPLES. 1) Il est clair qu'une partie A de $\Omega$ est $P^*$-capacitable ssi elle appartient à la complétée $\underline{\underline{F}}^*$ de $\underline{\underline{F}}$ pour P.

2) D'abord, si une partie A de $\mathbb{R}_+\times\Omega$ est $P^*[\pi(.)]$-capacitable, alors sa projection $\pi(A)$ appartient à $\underline{\underline{F}}^*$ (on a $\pi(L)\varepsilon\underline{\underline{F}}$ pour $L\varepsilon\underline{\underline{E}}$ d'après le lemme du n°2). Cela nous fournira plus loin la mesurabilité des débuts tandis que le lemme suivant, où sont caractérisées les parties $P^*[\pi(.)]$-capacitables, nous fournira le théorème de section

LEMME. <u>Une partie</u> A <u>de</u> $\mathbb{R}_+\times\Omega$ <u>est</u> $P^*[\pi(.)]$-<u>capacitable ssi</u>, <u>pour tout</u> $\varepsilon>0$, <u>il existe une v.a.</u> S <u>à valeur dans</u> $\overline{\mathbb{R}}_+$ <u>vérifiant</u>

a) <u>le graphe de</u> S <u>dans</u> $\mathbb{R}_+\times\Omega$ <u>est contenu dans</u> A :

$$S(\omega)<+\infty \Rightarrow (S(\omega),\omega)\in A$$

b) S <u>est finie "à</u> $\varepsilon$ <u>près" sur la projection de</u> A :

$$P\{S<\infty\} \geq P^*[\pi(A)] - \varepsilon$$

DEMONSTRATION. Fixons $\varepsilon>0$. Si A est capacitable, il existe un élément L de $\underline{\underline{E}}$ inclus dans A tel que $P[\pi(L)] \geq P^*[\pi(A)] - \varepsilon$ ; le début S de L, défini par

$$S(\omega) = \inf\ \{t : (t,\omega)\varepsilon L\} \quad (\inf\emptyset = +\infty)$$

vérifie alors a) et b). En effet, pour $\omega\varepsilon\{S<\infty\}$, $S(\omega)$ appartient à la coupe $L(\omega)$, qui est compacte ; d'autre part S est une v.a. car c'est la limite de la suite croissante des débuts des $L_n$ où $(L_n)$ est une suite dans $\underline{\underline{S}}$ telle que $L_n\downarrow L$. Pour établir la réciproque, on peut évidemment supposer qu'il existe une constante k telle que l'on ait $S\leq k$ sur $\{S<\infty\}$ ; en encadrant convenablement S par des v.a. étagées, on obtient alors que le graphe de S dans $\mathbb{R}_+\times\Omega$ appartient à L, ce qui permet de conclure.

REMARQUE. Avec un iota de travail supplémentaire, on voit qu'on peut prendre $\varepsilon = 0$ dans le lemme - nous laissons cela au lecteur. De toute manière, il ne sera pas possible de prendre $\varepsilon = 0$ dans l'énoncé à venir du théorème de section.

Nous verrons plus loin que tout élément de $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}$ est capacitable.

4 Etant donné un espace pavé $(E,\underline{\underline{E}})$, nous dirons qu'une partie A de E est $\underline{\underline{E}}$-capacitable si elle est C-capacitable pour toute $\underline{\underline{E}}$-capacité C (lorsque E est un espace métrisable compact muni du pavage de ses compacts, on dit plutôt universellement capacitable). L'étude de la stabilité de l'ensemble des parties $\underline{\underline{E}}$-capacitables pour les opérations ensemblistes usuelles n'est pas facile (et ne peut d'ailleurs être "complète" que si on renforce d'une manière ou d'une autre les axiomes habituels de la théorie des ensembles). Nous citons, sans démonstration (plus précisément, voir les "commentaires" plus loin), un résultat "négatif" : le complémentaire d'une partie $\underline{\underline{E}}$-capacitable n'est pas $\underline{\underline{E}}$-capacitable en général (même si E est un espace métrisable compact muni du pavage de ses parties compactes). Et nous donnons deux résultats "positifs" simples et précieux

PROPOSITION. a) Si $(A_n)$ est une suite croissante de parties $\underline{\underline{E}}$-capacitables de E, alors $A = \lim\uparrow A_n$ est encore $\underline{\underline{E}}$-capacitable.

b) Si $\pi$ est une opération $(\underline{\underline{E}},\underline{\underline{F}})$-capacitaire de E dans F (cf n°2), alors $\pi(A)$ est $\underline{\underline{F}}$-capacitable dès que A est $\underline{\underline{E}}$-capacitable.

DEMONSTRATION. a) résulte immédiatement du fait que toute capacité est montante. Démontrons b). Si I est une $\underline{\underline{F}}$-capacité, alors J définie sur $\underline{\underline{P}}(E)$ par $J(H) = I[\pi(H)]$ est une $\underline{\underline{E}}$-capacité, et, si A est une partie $\underline{\underline{E}}$-capacitable de E, on a $J(A) = \sup J(L) = \sup I[\pi(L)]$ où L parcourt les éléments de $\underline{\underline{E}}$ contenus dans A. D'où la conclusion puisque, par hypothèse, $\pi(\underline{\underline{E}})$ est inclus dans $\underline{\underline{F}}$.

Commentaires. 1) Plaçons nous, pour fixer les idées, dans le cadre des espaces métrisables compacts munis des pavages constitués par leurs parties compactes. Si $\pi_1,\pi_2$ sont les projections de $E\times E$ sur E et si A , B sont des parties de E telles que $A\times B$ soit universellement capacitable dans $E\times E$, alors A , B , $A\cup B$ et $A\cap B$ sont universellement capacitables dans E ; en effet, les opérations de $E\times E$ dans E qui à H associent $\pi_1(H)$ , $\pi_2(H)$ , $\pi_1(H)\cup\pi_2(H)$ et $\pi_1(H)\cap\pi_2(H)$ sont toutes capacitaires. Cependant, si A et B sont universellement capacitables dans E, on ne sait pas démontrer en général que $A\times B$ est universellement capacitable dans $E\times E$.

2) Nous restons dans notre cadre topologique simple. Si A est une partie de E telle que $A\times A^c$ soit universellement capacitable dans $E\times E$, alors A est nécessairement borélien. Soit en effet C la capacité sur $E\times E$ définie par $C(H) = 0$ si H est disjoint de la diagonale et $C(H) = 1$ sinon et définissons C' sur $\underline{\underline{P}}(E\times E)$ par

$$C'(H) = \inf C(R)\ ,\ R\in\underline{\underline{B}}_r\ ,\ R\supseteq H$$

où $\underline{\underline{B}}_r$ est l'ensemble des rectangles à côtés boréliens de $E\times E$ (noter que l'inf est atteint). Comme $\underline{\underline{B}}_r$ est stable pour les lim inf de suites, on voit aisément que C' est aussi une capacité. Mais C' coincide avec C sur les rectangles à côtés compacts, et donc sur les rectangles universellement capacitables dans $E \times E$. En écrivant que l'on a $C'(A \times A^c) = C(A \times A^c) = 0$, on obtient alors que A est borélien.

3) Nous revenons à notre cadre abstrait. Soient $(E,\underline{\underline{E}})$ et $(F,\underline{\underline{F}})$ des espaces pavés, et $\pi$ une opération $(\underline{\underline{E}},\underline{\underline{F}})$-capacitaire de E dans F. On démontre assez facilement que tout élément B de $\underline{\underline{E}}_{\sigma\delta}$ (i.e. on a $B = \bigcap_n \bigcup_m L^n_m$ où $(L^n_m)$ est une suite double dans $\underline{\underline{E}}$) est $\underline{\underline{E}}$-capacitable d'où l'on déduit que $A = \pi(B)$ est $\underline{\underline{F}}$-capacitable. On retrouve là, sous un habillage un peu différent, la voie classique (celle de Choquet) pour aborder le théorème de capacitabilité. En effet, on peut montrer que les parties A de F qui peuvent s'écrire $A = \pi(B)$ comme ci-dessus (avec $(E,\underline{\underline{E}})$, $\pi$ et B variables) sont ce qu'on appelle les parties $\underline{\underline{F}}$-<u>analytiques</u> ou encore $\underline{\underline{F}}$-<u>sousliniennes</u> de F (voir [8]) ; et on montre classiquement que l'ensemble $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{F}})$ de ces parties de F est, par exemple, stable pour les réunions dénombrables et les intersections dénombrables (voir [8] ou [5] pour une démonstration reposant sur la notion d'opération capacitaire à un nombre fini ou infini dénombrable d'arguments). Comme $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{F}})$ contient évidemment $\underline{\underline{F}}$, il contient aussi le stabilisé $\hat{\underline{\underline{F}}}$ de $\underline{\underline{F}}$ pour les réunions dénombrables et les intersections dénombrables ; en particulier, tout élément de $\hat{\underline{\underline{F}}}$ est $\underline{\underline{F}}$-capacitable - ce que nous allons redémontrer plus loin, sans utiliser la notion d'ensemble $\underline{\underline{F}}$-analytique.

4) Retournons une dernière fois dans notre cadre topologique simple. Ici $\underline{\underline{E}}$ n'est autre que la tribu borélienne de E ; les boréliens sont donc analytiques et les analytiques universellement capacitables. Il existe cependant des ensembles analytiques, naturellement rencontrés en théorie des processus, qui ne sont pas boréliens (cf [6]). Il existe aussi des complémentaires d'analytiques qui ne sont pas universellement capacitables

§II. JEU DE SIERPINSKI ET THEOREME DE CAPACITABILITE

<u>5</u> Nous dirons qu'un ensemble de parties d'un ensemble E est une <u>mosaïque</u> s'il contient $\emptyset$ et est stable pour les réunions dénombrables et les intersections dénombrables ; une variante du théorème des classes monotones montre que la mosaïque $\hat{\underline{\underline{E}}}$ engendrée par un pavage $\underline{\underline{E}}$ sur E est aussi le stabilisé de $\underline{\underline{E}}$ pour les réunions de suites croissantes et les intersections de suites décroissantes. Et $\hat{\underline{\underline{E}}}$ est une tribu ssi le complémentaire de tout élément de $\underline{\underline{E}}$ (et même d'un sous-ensemble de $\underline{\underline{E}}$ engendrant le pavage $\underline{\underline{E}}$) appartient à $\hat{\underline{\underline{E}}}$ ; c'est le cas

pour notre exemple d'espace pavé en théorie des processus : la mosaïque $\hat{\underline{\underline{E}}}$ y est égal à la tribu $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}$. Nous allons démontrer dans ce paragraphe le théorème de capacitabilité de Choquet

THEOREME. Soit $(E,\underline{\underline{E}})$ un espace pavé. Tout élément de la mosaïque $\hat{\underline{\underline{E}}}$ engendrée par $\underline{\underline{E}}$ est $\underline{\underline{E}}$-capacitable

Le petit lemme suivant va nous ramener à démontrer le théorème dans le cas particulier où E est un espace topologique (pas forcément séparé) et $\underline{\underline{E}}$ le pavage de ses parties fermées

LEMME. Soient $(E,\underline{\underline{E}})$ un espace pavé et A un élément de $\underline{\underline{E}}$. Il existe sur E une topologie à base dénombrable telle que tout fermé appartienne au pavage $\underline{\underline{E}}\cup\{E\}$ et que A appartienne à la mosaïque engendrée par les fermés.

DEMONSTRATION. Une variante du théorème des classes monotones entraine l'existence d'une suite $(L_n)$ dans $\underline{\underline{E}}$ telle que A appartienne à la mosaïque engendrée par les $L_n$. La topologie la moins fine rendant les $L_n$ fermés a alors les propriétés voulues. On notera que, si $\underline{\underline{F}}$ est le pavage des fermés, toute $\underline{\underline{E}}$-capacité est une $\underline{\underline{F}}$-capacité et donc que toute partie $\underline{\underline{F}}$-capacitable est égale à E ou est $\underline{\underline{E}}$-capacitable ; en outre, si E appartient à $\hat{\underline{\underline{E}}}$, alors E est réunion d'une suite croissante d'éléments de $\underline{\underline{E}}$ et est donc $\underline{\underline{E}}$-capacitable d'après la proposition du n°4. Cela justifie les quelques lignes précédant l'énoncé du lemme.

6 Dans ce numéro, nous désignons par E un espace topologique et par $\underline{\underline{E}}$ le pavage de ses parties fermées. Soit A un sous-ensemble de E et soient C une capacité (nous oublions le préfixe $\underline{\underline{E}}$-) et $t\in\mathbb{R}_+$ tels que $C(A)>t$ ; nous associons à A,C,t le jeu de Sierpinski, à deux joueurs I et II, défini comme suit :

I choisit $B_1\subseteq A$ tel que $C(B_1)>t$, puis
II choisit $A_1\subseteq B_1$ tel que $C(A_1)>t$, puis
I choisit $B_2\subseteq A_1$ tel que $C(B_2)>t$, etc

A la fin de la partie (il y a une infinité dénombrable de coups joués) I et II ont construit chacun une suite décroissante $(B_n)$ et $(A_n)$ de sous-ensembles de A telles que $B_n\supseteq A_n\supseteq B_{n+1}$ et $C(A_n)>t$ pour tout n. Par définition, le joueur II a gagné la partie si l'ensemble fermé $\bigcap_n \bar{A}_n=\bigcap_n \bar{B}_n$ est contenu dans A. On a alors $C(\bigcap_n \bar{A}_n)=\lim\downarrow C(\bar{A}_n)\geq t$ et donc A est $\underline{\underline{E}}$-capacitable si II arrive à gagner pour toute capacité C et tout $t<C(A)$. Pour A,C,t donnés, on définit de manière évidente la notion de stratégie gagnante pour le joueur II : une telle stratégie f lui dit quel sous-ensemble $A_n=f(B_1,\ldots,B_n)$ de $B_n$

choisir au n-ième coup pour être assuré de gagner, le joueur I ayant choisi $B_1,\dots,B_n$ aux coups précédents. Nous dirons, pour abréger, que la partie A de E est <u>supercapacitable</u> si le joueur II a une stratégie gagnante dans le jeu de Sierpinski A,C,t pour toute capacité C et tout $t < C(A)$ ; un tel ensemble est évidemment $\underline{\underline{E}}$-capacitable.

La démonstration du résultat suivant est adaptée de Sierpinski [12] (voir les "commentaires" pour des précisions)

THEOREME. <u>Toute partie fermée de</u> E <u>est supercapacitable et l'ensemble des parties supercapacitables de</u> E <u>est stable pour les intersections dénombrables et pour les réunions de suites croissantes</u>. <u>En particulier, tout élément de</u> $\hat{\underline{\underline{E}}}$ <u>est supercapacitable</u>.

DEMONSTRATION. Nous désignons par $\mathbf{S}$ l'ensemble des parties supercapacitables de E : il est clair que $\mathbf{S}$ contient $\underline{\underline{E}}$ et donc contiendra $\hat{\underline{\underline{E}}}$ si l'on montre qu'il satisfait aux propriétés de stabilité susdites. Soient d'abord $(A^m)$ une suite croissante dans $\mathbf{S}$ et $A = \lim\uparrow A^m$ (attention à la place des indices !). Considérons une capacité C et $t\in\mathbb{R}_+$ tels que $C(A) > t$ ; comme C monte, on a $C(A^m) > t$ pour m grand et nous désignons alors par $f^m$ une stratégie gagnante pour II dans le jeu de Sierpinski $A^m$,C,t. Si, dans le jeu A,C,t, I commence par choisir $B_1 \subseteq A$ avec $C(B_1) > t$, il existe un (plus petit) entier k tel qu'on ait $C(A^k \cap B_1) > t$, et nous faisons répondre II comme si I avait choisi $A^k \cap B_1$ au premier coup dans le jeu $A^k$,C,t : II répond donc par $A_1 = f^k(A^k \cap B_1)$ si bien que I sera obligé ultérieurement de jouer le jeu $A^k$,C,t tout en pensant jouer le jeu A,C,t. La stratégie $A_n = f^k(A^k \cap B_1, B_2, \dots, B_n)$ est alors gagnante pour II dans le jeu initial A,C,t et donc A est supercapacitable. Passons aux intersections, en commençant par le cas de l'intersection A de deux éléments $A^1$, $A^2$ de $\mathbf{S}$. Soient C et t tels que $C(A) > t$ et soit $f^1$ (resp $f^2$) une stratégie gagnante pour II dans le jeu $A^1$,C,t (resp $A^2$,C,t). Si I commence par choisir $B_1 \subseteq A$ (avec $C(B_1) > t$), nous faisons répondre II comme si I jouait $B_1$ dans le jeu $A^1$,C,t : $A_1 = f^1(B_1)$ ; puis, si I continue en jouant $B_2 \subseteq A_1$, nous faisons répondre II comme si I jouait $B_2$ au premier coup dans le jeu $A^2$,C,t : $A_2 = f^2(B_2)$. De manière générale, si I a joué $B_1,\dots,B_n$, II répondra par $A_n = f^1(B_1,B_3,B_5,\dots,B_n)$ si n est impair et par $A_n = f^2(B_2,B_4,B_6,\dots,B_n)$ si n est pair : il est clair que l'on définit ainsi une stratégie gagnante pour II dans le jeu A,C,t et donc A est supercapacitable. Dans le cas général où A est l'intersection d'une suite finie ou infinie $(A^m)$ dans $\mathbf{S}$, on commence par se donner une partition $(N^m)$ de $\mathbb{N}$ en autant de sous-ensembles infinis qu'il y a d'éléments dans la suite $(A^m)$. Soient alors C et t avec $C(A) > t$ et, pour tout m, $f^m$ une stratégie gagnante pour II dans le jeu $A^m,C,t$. Si, au n-ième coup, I se trouve avoir joué $B_1,\ldots,B_n$, nous faisons répondre II comme suit : m étant l'entier tel que $n\in N^m$, on prend $A_n = f^m(B_{n^1},B_{n^2},\ldots,B_n)$ où $n^1,n^2,\ldots,n$ sont les éléments de $\{1,2,\ldots,n\}\cap N^m$ rangés en ordre croissant. On vérifie sans peine que l'on définit bien ainsi une stratégie gagnante pour II dans le jeu A,C,t et donc A est supercapacitable.

REMARQUES. 1) Bien entendu, le théorème de capacitabilité du n°5 est maintenant entièrement démontré.

2) Le novice en théorie des jeux peut se demander si le joueur I a quelquechose à faire dans le jeu de Sierpinski : jouer $B_1 = A$ puis $B_n = A_{n-1}$ pour $n>1$ ne serait-il pas ce qu'il a de mieux à faire ? Un instant de réflexion convainc qu'il n'en est rien. On s'en convaincra aussi en regardant le problème suivant, dont je ne connais pas la solution : si A est supercapacitable dans $E=[0,1]$, est-ce-que $A\times E$ est supercapacitable dans $E\times E$ ?

3) Soient F un autre espace topologique, muni du pavage de ses fermés, et $\pi$ une opération capacitaire de E dans F. Nous savons maintenant que, pour $A\in\underline{\underline{E}}$, $\pi(A)$ est $\underline{\underline{F}}$-capacitable. On peut en fait démontrer mieux : $\pi(A)$ est supercapacitable dans F.

<u>Commentaires</u>. Pour fixer les idées, nous nous plaçons dans le cadre des espaces métrisables compacts quoique tout ce que nous allons dire ait une version abstraite (mais je ne veux pas retomber dans l'ornière ancienne). Nous dirons, suivant Sion, qu'un ensemble $\underline{\underline{C}}$ de parties de E est une <u>capacitance</u> si elle vérifie

a) $A\in\underline{\underline{C}}$ et $B\supseteq A \Rightarrow B\in\underline{\underline{C}}$

b) $A_n\uparrow A$ et $A\in\underline{\underline{C}} \Rightarrow \exists n\ A_n\in\underline{\underline{C}}$

Ainsi, si C est une capacité sur E, $\underline{\underline{C}}_t = \{H\in\underline{\underline{P}}(E) : C(H) > t\}$ est, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, une capacitance ; mais il existe de nombreux exemples de capacitances ne provenant pas d'une capacité (par exemple, l'ensemble $\underline{\underline{C}}$ des parties non maigres de E). Nous généralisons maintenant, en deux temps, notre notion de "jeu de Sierpinski"

1) Ayant fixé une capacitance $\underline{\underline{C}}$ sur notre espace E, nous définissons comme plus haut le jeu de Sierpinski associé à $\underline{\underline{C}}$,A pour $A\in\underline{\underline{C}}$ donné et nous dirons, pour abréger, qu'une partie A de E est <u>$\underline{\underline{C}}$-lisse</u> si A n'appartient pas à $\underline{\underline{C}}$ ou, dans le cas contraire, si le joueur II a une stratégie gagnante dans le jeu $\underline{\underline{C}}$,A. On démontre alors, comme plus haut, que l'ensemble des parties $\underline{\underline{C}}$-lisses de E contient les compacts et est stable pour les intersections dénombrables et les réunions de suites croissantes ; il contient donc $\underline{\underline{B}}(E)$ et on peut aussi montrer

qu'il contient en fait $\underline{\underline{A}}(E)$ - nous verrons ci-dessous mieux encore pour $\underline{\underline{A}}(E)$. Dans [12], Sierpinski considère (seulement) la capacitance $\underline{\underline{C}}$ constituée des parties non dénombrables de E ; quoique dans ce cas la capacitance $\underline{\underline{C}}$ ne provienne pas d'une capacité, Sierpinski montre que tout ensemble $\underline{\underline{C}}$-lisse appartenant à $\underline{\underline{C}}$ contient un compact appartenant à $\underline{\underline{C}}$ (autrement dit, un compact non dénombrable) et en déduit une nouvelle démonstration du théorème de Alexandrov-Hausdorff : tout borélien non dénombrable contient un compact non dénombrable. Il est curieux que Sierpinski n'ait point pensé à démontrer que tout analytique est $\underline{\underline{C}}$-lisse - ce qui lui aurait permis de donner en fait une nouvelle démonstration du théorème de Souslin : tout analytique non dénombrable contient un compact non dénombrable. Signalons au passage que la seconde partie de [12], que nous venons d'évoquer, se trouve à l'origine du second chapitre de "Capacités et processus stochastiques", que nous ne reprendrons pas ici.

2) Dans [2] - encore un peu plus illisible que le chapitre I de ma monographie - , j'avais introduit, sous le nom d'ensemble poli, une notion plus forte que celle d'ensemble lisse (i.e. $\underline{\underline{C}}$-lisse pour toute capacitance $\underline{\underline{C}}$) : elle avait l'avantage sur cette dernière que la classe des ensembles polis était stable pour les intersections dénombrables, les réunions dénombrables (pas seulement croissantes) et les images par opérations capacitaires (donc en particulier par l'opération $A \to A \times E$ évoquée à la remarque 2) vue plus haut). La meilleure manière pour définir clairement cette notion est sans doute d'introduire un jeu à trois personnes : étant donné un sous-ensemble A de E, on définit le <u>jeu de Sierpinski à trois joueurs</u> O,I,II comme suit

O choisit une capacitance $\underline{\underline{C}}_1$ telle que $A \varepsilon \underline{\underline{C}}_1$, puis

I choisit $B_1 \subseteq A$ tel que $B_1 \varepsilon \underline{\underline{C}}_1$, puis

II choisit $A_1 \subseteq B_1$ tel que $A_1 \varepsilon \underline{\underline{C}}_1$, puis

O choisit une capacitance $\underline{\underline{C}}_2$ telle que $A_1 \varepsilon \underline{\underline{C}}_2$, puis

I choisit $B_2 \subseteq A_1$ tel que $B_2 \varepsilon \underline{\underline{C}}_2$, etc

Ici encore, II a gagné la partie si, au bout du compte, A contient $\bigcap_n \overline{A}_n = \bigcap_n \overline{B}_n$. L'ensemble A est dit <u>poli</u> si II a une stratégie gagnante contre O et I coalisés, et on montre que la classe des parties polies a les propriétés de stabilité énoncées ci-dessus (cf [7] plus lisible que [2]). En particulier, toute partie analytique de E est polie et, récemment, le logicien Martin m'a montré qu'inversement toute partie polie est analytique. En rédigeant cela (cf [7]), j'ai fini par m'apercevoir que, finalement, I n'avait guère sa place dans le jeu : si, dans le jeu A, le joueur II a une stratégie gagnante contre O tout seul (I se contentant de jouer $B_1 = A$ puis $B_n = A_{n-1}$

pour $n>1$ ; c'est aussi ce qu'il a de mieux à faire s'il se coalise avec II !), un simple aménagement de cette stratégie en fait une stratégie gagnante contre O et I coalisés. Il est probable que, sans axiomes supplémentaires, on ne puisse ni prouver ni réfuter les implications supercapacitable $\Rightarrow$ lisse $\Rightarrow$ poli ( = analytique) ; voir [7] pour l'étude de universellement capacitable $\Rightarrow$ analytique.

## §III. MESURABILITE DES DEBUTS ET THEOREME DE SECTION

Dans ce paragraphe, on se donne un espace probabilisé complet $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ muni d'une filtration $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ vérifiant les conditions habituelles - on rappelle que cela signifie que $(\underline{\underline{F}}_t)$ est une famille croissante de sous-tribus de $\underline{\underline{F}}$, continue à droite (i.e. $\underline{\underline{F}}_t = \bigcap_{\varepsilon>0} \underline{\underline{F}}_{t+\varepsilon}$) telle que $\underline{\underline{F}}_0$ contienne tous les éléments négligeables de $\underline{\underline{F}}$. En outre, on désigne par $\pi$ la projection de $\mathbb{R}_+\times\Omega$ sur $\Omega$

7 On rappelle qu'une partie H de $\mathbb{R}_+\times\Omega$ est dite <u>progressive</u> (ou encore progressivement mesurable) si, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, la partie $H\cap([0,t]\times\Omega)$ de $[0,t]\times\Omega$ appartient à la tribu produit $\underline{B}([0,t])\times\underline{\underline{F}}_t$. Voici alors le théorème de mesurabilité des débuts (à notre avis, il serait mieux venu de dire "optionalité des débuts")

THEOREME. <u>Soit</u> H <u>une partie progressive de</u> $\mathbb{R}_+\times\Omega$. <u>Alors le début</u> $D_H$ <u>de</u> H, <u>défini par</u>

$$D_H(\omega) = \inf\{t\geq 0 : (t,\omega)\in H\} \qquad (\text{avec } \inf\emptyset = +\infty)$$

<u>est un temps d'arrêt</u>. <u>En particulier</u>, $\pi(H) = \{D_H < +\infty\}$ <u>appartient à</u> $\underline{\underline{F}}$.

DEMONSTRATION. Comme $(\underline{\underline{F}}_t)$ est continue à droite, il nous suffit de vérifier que $\{D_H < t\}$ appartient à $\underline{\underline{F}}_t$ pour tout t. On a

$$\{D_H < t\} = \pi(H'_t) \quad \text{avec} \quad H'_t = H\cap([0,t[\times\Omega).$$

Comme H est progressif, $H'_t$ appartient à $\underline{B}([0,t])\times\underline{\underline{F}}_t$, et cette tribu est la mosaïque sur $[0,t]\times\Omega$ engendrée par les rectangles KxL avec K compact de $[0,t]$ et $L\in\underline{\underline{F}}_t$. Il résulte alors des n°5 et 3 que $\pi(H'_t)$ appartient à $\underline{\underline{F}}_t$, cette tribu étant complète.

REMARQUE. Soit $A = (A_t)$ un processus croissant adapté (sous-entendu : continu à droite), avec $A_0 \neq 0$ éventuellement. On définit le A-<u>début</u> $D_H^A$ de l'ensemble progressif H par

$$D_H^A(\omega) = \inf\{t\geq 0 : \int_{0]}^{t} 1_H(s,\omega)\, dA_s(\omega) > 0\}$$

l'intégrale étant prise sur $[0,t]$, bornes comprises. Comme le processus $A_t^H = \int_{0]}^{t} 1_{H_s}\, dA_s$ est un processus croissant adapté, il est est très facile de prouver que $D_H^A$ est un temps d'arrêt (l'inf. ci-dessus peut être pris sur les rationnels). Par conséquent, si $D_H^o$ est un représentant de $\operatorname{ess\,inf} D_H^A$, A parcourant l'ensemble des processus croissants adaptés, $D_H^o$ est un temps d'arrêt (qu'on pourrait appeler le début *optionnel* de H ; je laisse au lecteur le soin de définir et étudier le début *prévisible* de H). On a évidemment $D^o_H \geq D_H$ p.s., et le théorème de section optionnel nous assurera en particulier que l'on a $D^o_H = D_H$ p.s. si H est optionnel ; on peut par contre avoir $D_H = 0$ p.s. et $D^o_H = +\infty$ p.s. pour H progressif (c'est le cas pour l'ensemble progressif H défini dans [4]).

*8* On rappelle qu'une partie H de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ est dite *optionnelle* (ou encore bien mesurable) si elle appartient à la tribu sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ engendrée par les intervalles stochastiques de la forme

$$[\![S,T[\![ \; = \{(t,\omega)\in\mathbb{R}_+ \times \Omega \; : \; S(\omega) \leq t < T(\omega)\}$$

où S,T sont deux temps d'arrêt tels que $S \leq T$. Rappelons aussi que "temps optionnel" est un synonyme de "temps d'arrêt" et que le graphe $[\![T]\!]$ d'un temps optionnel T est égal à $\{(t,\omega)\in\mathbb{R}_+ \times \Omega \; : \; T(\omega) = t\}$, i.e. au graphe de T dans $\mathbb{R}_+ \times \Omega$. Voici alors le théorème de section optionnelle

THEOREME. *Soit* H *une partie optionnelle de* $\mathbb{R}_+ \times \Omega$. *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un temps optionnel* T *vérifiant*

a) *le graphe* $[\![T]\!]$ *de* T *est contenu dans* H

b) *on a* $P\{T < +\infty\} > P[\pi(H)] - \varepsilon$.

DEMONSTRATION. Notons d'abord que H, optionnel, est a fortiori progressif : $\pi(H)$ appartient donc à $\underline{\underline{F}}$ d'après le théorème précédent, et il est donc licite d'écrire $P[\pi(H)]$. Maintenant, H appartient à $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+) \times \underline{\underline{F}}$, mosaïque engendrée par les rectangles KxL avec K compact de $\mathbb{R}_+$ et $L\in\underline{\underline{F}}$. D'après les n°5 et 3, il existe, pour $\varepsilon > 0$ fixé, une v.a. S (non nécessairement un temps d'arrêt) de graphe $[\![S]\!]$ contenu dans H et telle que $P\{S < +\infty\} > P[\pi(H)] - \frac{\varepsilon}{2}$. Soit m la mesure bornée sur la tribu $\underline{\underline{O}}$ des ensembles optionnels définie par

$$m(A) = P[\pi(A \cap [\![S]\!])] = E[X_S 1_{\{S < +\infty\}}] \text{ avec } X = 1_A \text{ , } A\in\underline{\underline{O}}$$

(faire un dessin). La mesure extérieure associée à m est une $\underline{\underline{E}}$-capacité pour le pavage $\underline{\underline{E}}$ sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ engendré par les intervalles stochastiques de la forme $[\![U,V[\![$ (U et V temps d'arrêt) ; d'après le théorème de capacitabilité (ou un résultat classique de théorie de la mesure), il existe donc $L\in\underline{\underline{E}}$ contenu dans H tel qu'on ait $m(L) > m(H) - \frac{\varepsilon}{2}$. Mais on a $L = \bigcap_n L_n$ où, pour chaque n, $L_n$ est une réunion finie d'intervalles du type $[\![U,V[\![$ ; par conséquent, chaque coupe $L(\omega)$ contient son inf. si elle n'est pas vide, et donc L contient le graphe de son début. Il est alors clair qu'on peut prendre pour temps optionnel T "sectionnant H à $\varepsilon$ près" le début $D_L$ (lequel est un temps d'arrêt d'après le théorème précédent, mais cela peut être établi aussi de manière élémentaire).

REMARQUE. Nous poursuivons ici la remarque du n° précédent, dont nous reprenons les notations. Soient H optionnel, $D_H$ son début et $D_H^o$ son début optionnel. L'ensemble $L = H \cap [\![D_H, D_H^o[\![$ est optionnel et on a évidemment $D_L^o = +\infty$ p.s.. Pour démontrer que $D_H = D_H^o$ p.s., il nous suffit donc de démontrer qu'un ensemble optionnel L est évanescent dès qu'on a $E[\int_{0]}^{\infty} 1_L(s,\omega)\, dA_s(\omega)] = 0$ pour tout processus croissant adapté et intégrable A (autrement dit, dès que L est négligeable pour toute P-mesure optionnelle bornée) ; et cela nous est évidemment assuré par le théorème de section optionnelle (lequel peut, réciproquement, être déduit élémentairement de l'égalité $D_H = D_H^o$ p.s. pour tout H optionnel - c'est donc peine perdue de chercher à démontrer élémentairement cette égalité).

9 On rappelle qu'une partie H de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ est dite <u>prévisible</u> (ou encore très bien mesurable) si elle appartient à la tribu sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ engendrée par les ensembles de la forme $\{0\} \times A$, $A \in \underline{\underline{F}}_0$ et par les intervalles stochastiques de la forme

$$]\!]S,T]\!] = \{(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \ : \ S(\omega) < t \leq T(\omega)\}$$

où S,T sont deux temps d'arrêt tels que $S \leq T$. Depuis la parution de [3], la définition des temps d'arrêt prévisibles s'est affinée. On dit désormais que le temps (d'arrêt) T est <u>prévisible</u> si l'intervalle $[\![T,+\infty[\![$ est prévisible, et qu'il est <u>annonçable</u> s'il existe une suite croissante $(T_n)$ de temps d'arrêt convergeant vers T de sorte qu'on ait $T_n < T$ pour tout n sur $\{T > 0\}$. Il est facile de voir que tout temps annonçable est prévisible ; sous le conditions habituelles (et donc dans cet exposé), il est vrai aussi que tout temps prévisible est annonçable, mais ce n'est pas évident et nous le démontrerons ici pour être complet (cela est fait dans [3], mais ce n'est pas dit ainsi car "prévisible au sens de [3]" est synonyme ici de "annonçable"). Nous laissons au lecteur le soin de vérifier (ou de trouver dans [3]) le fait suivant : l'ensemble des temps annonçables est stable pour l'égalité p.s., les sup. de suites et les inf. de suites stationnaires pour chaque ω. Cela étant, nous allons esquisser une démonstration "économique" du théorème de section prévisible, quoique je continue à penser que le bon cheminement reste celui de [3] (repris et affiné dans [8]) car il permet d'obtenir d'autres théorèmes de section intéressants (voir en particulier [10]).

THEOREME. <u>Soit</u> H <u>une partie prévisible de</u> $\mathbb{R}_+ \times \Omega$. <u>Pour tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>il existe un temps annonçable</u> (<u>et donc prévisible</u>) T <u>vérifiant</u>

a) <u>le graphe</u> $[\![T]\!]$ <u>de</u> T <u>est contenu dans</u> H

b) <u>on a</u> $P\{T < +\infty\} > P[\pi(H)] - \varepsilon$

<u>De plus, tout temps prévisible est annonçable</u>.

DEMONSTRATION. Ayant fixé $\varepsilon>0$, on considère, comme dans la démonstration du théorème précédent, une v.a. S "sectionnant H à $\frac{\varepsilon}{2}$ près", puis la mesure m associée, en la restreignant cette fois à la tribu $\underline{\underline{P}}$ des ensembles prévisibles. La mesure extérieure est une $\underline{\underline{E}}$-capacité où, cette fois, $\underline{\underline{E}}$ est le pavage sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ engendré par les intervalles de la forme $[\![U,V]\!]$ où U,V sont des temps annonçables finis. On vérifie sans peine que $\underline{\underline{P}}$ est la mosaique engendrée par ce pavage (si W est un temps optionnel, $W+\frac{1}{n}$ est un temps annonçable), et on en déduit que notre ensemble prévisible H contient un élément L de $\underline{\underline{E}}$ tel que $m(L) > m(H)-\frac{\varepsilon}{2}$. On peut écrire $L=\bigcap_n L_n$ où, pour chaque n, $L_n$ est une réunion finie d'intervalles du type $[\![U,V]\!]$ avec U,V temps annonçables finis. Ces intervalles étant à coupes compactes, on a $D_L = \sup D_{L_n}$, d'où $D_L$ est annonçable, et fournit la "section de H à $\varepsilon$ près" cherchée. Passons au dernier point de l'énoncé. Si S est un temps prévisible, alors $[\![S]\!] = [\![S,+\infty[\![ - ]\!]S,+\infty[\![$ est un ensemble prévisible, auquel on peut donc appliquer le théorème de section. Prenant $\varepsilon = 1/n$, on en déduit l'existence d'une suite $(T_n)$ de temps annonçables tels qu'on ait $T_n = +\infty$ sur $\{S \neq T_n\}$ et $P\{S=T_n\} > 1-\frac{1}{n}$ pour tout n. Alors S est p.s. égal à l'inf. de la suite stationnaire pour chaque $\omega$ constituée par les $S_n = \inf(T_1,\dots,T_n)$, et est donc annonçable.

Commentaires. 1) Dans la démonstration du dernier théorème, on peut même faire l'économie du passage par une section "non adaptée". En effet, les coupes des éléments du pavage $\underline{\underline{E}}$ considéré étant compactes, la fonction d'ensemble $P^*[\pi(.)]$ est une $\underline{\underline{E}}$-capacité, d'où l'existence de $L\varepsilon\underline{\underline{E}}$ inclus dans H tel que $P[\pi(L)] > P[\pi(H)]-\varepsilon$ ; on retrouve là la démarche de Meyer dans la première démonstration des théorèmes de section (voir [11]). Ainsi, on peut présenter les théorèmes de section dans l'ordre suivant : d'abord le théorème du n°9, puis le lemme du n°3 avec $A\varepsilon\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}$ (qui en est un corollaire : cas où on a $\underline{\underline{F}}_t = \underline{\underline{F}}$ pour tout t), et enfin le théorème du n°8. Dans ce dernier cas, il est difficile d'opérer directement à cause de l'absence d'un "pavage à coupes compactes" engendrant $\underline{\underline{O}}$ en tant que mosaïque (voir cependant [1], qui ne manque pas d'ingéniosité).

2) Je montre ici comment construire un ensemble prévisible n'admettant pas de section complète par un graphe de temps d'arrêt. Soit H un ensemble prévisible tel que $\pi(H)=\Omega$ et que sa fin L définie par

$$L(\omega) = \sup\{t\geq 0 : (t,\omega)\varepsilon H\}$$

soit finie, et de graphe disjoint (à un ensemble évanescent près) de tout graphe de temps d'arrêt (on peut par exemple prendre pour H l'ensemble des zéros du mouvement brownien pour $t<1$). Soit S un représentant de l'ess. sup. des temps d'arrêt majorés par L : on a

$0 < S < L$ p.s., et l'ensemble prévisible $H - [\![0,S]\!]$ a une projection p.s. égale à $\Omega$ et n'admet évidemment pas de section complète par un graphe de temps d'arrêt vu la définition de S.

3) J'apporte ici un complément aux remarques des n°8 et 9. Pour H progressif, définissons le <u>temps de pénétration</u> $T_H$ dans H par

$$T_H(\omega) \geq t \quad \text{ssi} \quad H(\omega) \cap [0,t] \text{ est dénombrable}$$

(dénombrable = vide, fini, ou infini dénombrable). On démontre dans [3] que $T_H$ est un temps d'arrêt. Par ailleurs, désignons par $T_H^c$ un représentant de ess inf $D_H^A$ quand A parcourt l'ensemble des processus croissants adaptés <u>continus</u>. On a évidemment $T_H^c \geq T_H$ p.s. et il se peut qu'on ait $T_H = 0$ p.s. et $T_H^c = +\infty$ p.s. (c'est le cas pour l'ensemble progressif H défini dans [4]). Cependant, si H est optionnel, on a $T_H^c = T_H$ p.s. (cela est implicitement démontré dans le dernier chapitre de [3]). Cela revient encore à dire qu'un ensemble optionnel est p.s. à coupes dénombrables ssi il est de mesure nulle pour toute P-mesure optionnelle bornée ne chargeant pas les graphes de temps d'arrêt. On a encore ici une espèce de théorème de section (mais pas par un graphe !) : pour H optionnel, il existe un processus croissant intégrable, adapté et continu, $A = (A_t)$ vérifiant

a) la coupe $H(\omega)$ porte la mesure $dA_t(\omega)$ pour tout $\omega$,

b) la mesure $dA_t(\omega)$ est non nulle pour tout $\omega$ tel que la coupe $H(\omega)$ soit non dénombrable.

Cela est démontré dans le dernier chapitre de [3].

## §IV. APPLICATIONS DIVERSES DU THEOREME DE CAPACITABILITE

Un lot publicitaire n'allant pas sans prime, je terminerai cet exposé en montrant comment on peut établir aisément, à l'aide du théorème de capacitabilité, divers théorèmes de la théorie de la mesure bien utiles aux probabilistes (allez, Mesdames, Messieurs, jetez un coup d'oeil sur nos sous-titres !). Ici encore, je n'ai pas cherché la plus grande généralité, mais la clarté jointe à l'utilité.

### 1°/ Le théorème d'extension de Carathéodory

On se donne ici une algèbre $\underline{\underline{A}}$ de parties d'un ensemble $\Omega$ et une mesure de probabilité P sur $(\Omega, \underline{\underline{A}})$

THEOREME. <u>La probabilité</u> P <u>a une unique extension en une probabilité</u> (<u>encore notée</u> P) <u>sur la tribu</u> $\underline{\underline{F}}$ <u>engendrée par</u> $\underline{\underline{A}}$. <u>De plus, pour tout élément</u> H <u>de</u> $\underline{\underline{F}}$, <u>on a les approximations intérieure et extérieure</u>

$$P(H) = \sup P(L)\ ,\ L \subseteq H\ ,\ L \in \underline{\underline{A}}_\delta = \inf P(G)\ ,\ G \supseteq H\ ,\ G \in \underline{\underline{A}}_\sigma$$

<u>où</u> $\underline{\underline{A}}_\delta$ (<u>resp</u> $\underline{\underline{A}}_\sigma$) <u>désigne l'ensemble des intersections</u> (<u>resp réunions</u>) <u>de suites d'éléments de</u> $\underline{\underline{A}}$.

DEMONSTRATION. L'ensemble $\underline{\underline{A}}_\delta$ est le pavage (en notre sens) engendré par $\underline{\underline{A}}$, et la tribu $\underline{\underline{F}}$ est la mosaïque engendrée par $\underline{\underline{A}}$. Définissons une fonction $P^*$ sur $\underline{\underline{P}}(\Omega)$ en posant d'abord, pour $G \in \underline{\underline{A}}_\sigma$,

$$P^*(G) = \sup P(A)\ ,\ A \subseteq G\ ,\ A \in \underline{\underline{A}}$$

puis, pour $H \in \underline{\underline{P}}(\Omega)$,

$$P^*(H) = \inf P(G)\ ,\ G \supseteq H\ ,\ G \in \underline{\underline{A}}_\sigma$$

En utilisant la $\sigma$-additivité de P sur $\underline{\underline{A}}$, on vérifie sans grande peine que $P^*$ est une $\underline{\underline{A}}_\delta$-capacité. Si on désigne par P la restriction de $P^*$ à $\underline{\underline{F}}$, on a alors l'approximation extérieure de l'énoncé par définition et l'approximation intérieure par application du théorème de capacitabilité. Cela établi, c'est un jeu d'enfant de vérifier que P est $\sigma$-additive sur $\underline{\underline{F}}$, et l'unicité du prolongement résulte comme d'habitude du théorème des classes monotones.

*Commentaires*. 1) Il est possible d'adapter la démonstration précédente aux différentes variantes du théorème d'extension. Pour tous ces problèmes, la meilleure chose à faire est d'utiliser le théorème de Choquet sur la construction de capacités fortement sous-additives (version abstraite et version topologique - cf [8]), qui est de toute manière indispensable en théorie du potentiel.

2) Il est possible aussi de démontrer le théorème d'extension de Daniell à l'aide du théorème de capacitabilité. Cela est fait dans [8] mais de manière un peu maladroite à mon avis. En effet, comme le théorème de Daniell porte sur l'extension d'une intégrale (i.e. les arguments sont des fonctions et non des ensembles), il faut, pour bien voir les choses, définir la notion de capacité à argument fonction (positive) relative à un pavage de fonctions, i.e. un ensemble de fonctions positives stable pour les sup. finis et les inf. dénombrables. Les fonctions s.c.s. positives, bornées, jouent alors le rôle que tenaient auparavant les fermés.

## 2°/ Régularité intérieure des mesures

Nous désignons ici par E un espace métrisable séparable (ou à base dénombrable, cela revient au même) et par $\underline{\underline{B}}(E)$ sa tribu borélienne. Il est bien connu qu'un espace topologique est métrisable séparable ssi il est plongeable dans un espace métrisable compact $\hat{E}$ et qu'on peut toujours prendre pour $\hat{E}$ le cube $[0,1]^{\mathbb{N}}$.

THEOREME. *Si* P *est une probabilité sur* $(E,\underline{\underline{B}}(E))$, *on a*, *pour tout borélien* H, *les approximations intérieure et extérieure*

$$P(H) = \sup P(L)\ ,\ L \subseteq H\ ,\ L \text{ fermé} = \inf P(G)\ ,\ G \supseteq H\ ,\ G \text{ ouvert}$$

DEMONSTRATION. Nous n'utiliserons pas la séparabilité, et la métrisabilité nous sert seulement à assurer que tout ouvert est réunion dénombrable de fermés et donc que $\underline{\underline{B}}(E)$ est la mosaique engendrée par le pavage $\underline{\underline{E}}$ des fermés. Comme la probabilité extérieure $P^*$ est une $\underline{\underline{E}}$-capacité, le théorème de capacitabilité nous donne l'approximation intérieure, d'où l'approximation extérieure par passage au complémentaire.

La probabilité P sur E est dite <u>tendue</u> si on a l'approximation intérieure par des compacts : pour tout $H \in \underline{\underline{B}}(E)$, on a

$$P(H) = \sup P(K) \ , K \subseteq H \ , K \text{ compact.}$$

L'espace E est dit <u>radonien</u> si toute probabilité P sur E est tendue. Nous introduisons ici cette notion (malheureusement omise dans [8]) car elle a pris pas mal d'importance en théorie des processus de Markov (voir [9] ; Getoor dit "$\underline{\underline{U}}$-space" au lieu de "Radon space").

THEOREME. <u>L'espace</u> E <u>est radonien ssi il est plongeable comme partie universellement mesurable dans un espace métrisable compact</u>.

DEMONSTRATION. La condition est suffisante. En effet, supposons que E soit une partie universellement mesurable du compact métrisable $\hat{E}$, et soient P une probabilité sur E et $\hat{P}$ la probabilité image sur $\hat{E}$ par l'injection canonique ; $\hat{P}$ est tendue sur $\hat{E}$ d'après le théorème précédent, et donc P l'est aussi sur E car E s'écrit $H \cup N$ où H est un borélien de $\hat{E}$ et N un ensemble $\hat{P}$-négligeable. La condition est nécessaire. Plongeons en effet E dans $\hat{E} = [0,1]^{\mathbb{N}}$ et soit $\hat{P}$ une probabilité sur $\hat{E}$. La restriction de la probabilité extérieure $\hat{P}^*$ à $\underline{\underline{B}}(E)$ est une probabilité P sur $(E, \underline{\underline{B}}(E))$, tendue par hypothèse. Elle est donc portée par une réunion dénombrable de compacts de E, et donc de $\hat{E}$ ; d'où E s'écrit $H \cup N$ où H est un borélien de $\hat{E}$ et N un ensemble $\hat{P}$-négligeable.

REMARQUE. Tout espace localement compact à base dénombrable est radonien (c'est un ouvert dans son compactifié d'Alexandrov ; on peut aussi appliquer le premier théorème). Plus généralement, tout espace polonais - i.e. un espace séparable, métrique, complet dont on ne regarde que la topologie - est radonien (il se plonge en effet dans $[0,1]^{\mathbb{N}}$ sous forme d'une intersection dénombrable d'ouverts).

<u>Commentaires</u>. 1) Sont encore radoniens les espaces métrisables lusiniens, sousliniens, cosousliniens introduits dans [8]. Un espace métrisable est dit lusinien (resp souslinien, cosouslinien) s'il est homéomorphe à une partie borélienne (resp analytique, coanalytique = complémentaire d'analytique) d'un espace métrisable compact - on montre que cette propriété ne dépend pas du plongement. Sont aussi radoniens les espaces lusiniens et sousliniens - non nécessairement métrisables - au sens de Bourbaki (voir [8]).

2) Soient E un espace topologique séparé, $\underline{\underline{K}}(E)$ le pavage de ses compacts et $\underline{\underline{F}}(E)$ celui de ses fermés. Une fonction C de $\underline{\underline{P}}(E)$ dans $\mathbb{R}_+$ est une capacité continue à droite si elle est croissante, montante, et vérifie, pour tout $K \in \underline{\underline{K}}(E)$, $C(K) = \inf C(G)$, $G \supseteq K$, G ouvert. Toute capacité continue à droite est une $\underline{\underline{K}}(E)$-capacité et, si E est métrisable, toute $\underline{\underline{F}}(E)$-capacité est une capacité continue à droite. Cette notion, qui remonte à Choquet mais dont l'étude est surtout due à Sion, est mieux adaptée au cadre topologique (voir par exemple [5]). La mesure extérieure associée à une probabilité tendue est une telle capacité (même si E n'est pas métrisable).

### 3°/ Mesurabilité au sens de Lusin

Nous désignons ici par E,F deux espaces métrisables séparables et par P une probabilité sur E. Une application f de E dans F est dite mesurable au sens de Lusin si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un borélien H de E, de mesure $P(H) > 1-\varepsilon$, tel que la restriction de f à H soit une application continue de H dans F ; on peut évidemment prendre H compact si P est tendue. Il est clair qu'une application f mesurable au sens de Lusin est P-mesurable (i.e. telle que $f^{-1}(B)$ appartienne à la complétée de $\underline{\underline{B}}(E)$ pour tout $B \in \underline{\underline{B}}(F)$). Réciproquement, on a

THEOREME. Toute application P-mesurable f de E dans F est mesurable au sens de Lusin.

DEMONSTRATION. L'espace F étant à base dénombrable, toute application P-mesurable de E dans F est P-p.s. égale à une application borélienne et on se ramène donc à traiter le cas où f est borélienne. Nous commençons par établir le théorème dans le cas où E et F sont des espaces métrisables compacts. Désignons par $\pi_E$ (resp $\pi_F$) la projection de $E \times F$ sur E (resp F) et, ayant muni $E \times F$ du pavage $\underline{\underline{K}}$ de ses parties compactes, nous considérons la $\underline{\underline{K}}$-capacité $P^*[\pi_E(.)]$ sur $E \times F$. Le graphe G de f étant un borélien de $E \times F$, le théorème de capacitabilité assure, pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence d'un compact $K \subseteq G$ tel que $P[\pi_E(K)] > 1-\varepsilon$. La restriction de f à $\pi_E(K)$ est alors une application du compact $\pi_E(K)$ dans le compact $\pi_F(K)$, à graphe compact K : c'est donc une application continue de $\pi_E(K)$ dans $\pi_F(K)$, et donc dans F. Pour traiter le cas général, plongeons E,F dans des espaces métrisables compacts $\hat{E},\hat{F}$ et appelons $\hat{P}$ la mesure image de P sur $\hat{E}$. Comme f est une application borélienne de E dans F, il existe une application borélienne $\hat{f}$ de $\hat{E}$ dans $\hat{F}$ dont la restriction à E soit égale à f (voir le lemme ci-dessous). On sait, d'après ce qui précède, que $\hat{f}$ est mesurable au sens de Lusin relativement à $\hat{P}$ ; en composant avec l'injection de E dans $\hat{E}$, on obtient que f l'est relativement à P.

Le lemme suivant est une forme un peu unusuelle d'un lemme classique de Doob ; nous en verrons plus loin une conséquence trop méconnue

LEMME. Soit g une application d'un espace mesurable $(E,\underline{\underline{E}})$ dans un autre $(\hat{E},\hat{\underline{\underline{E}}})$ telle que $\underline{\underline{E}} = g^{-1}(\hat{\underline{\underline{E}}})$. Une application f de E dans un espace polonais $\hat{F}$ muni de sa tribu borélienne est mesurable ssi il existe une application mesurable $\hat{f}$ de $\hat{E}$ dans $\hat{F}$ telle que $f = \hat{f} \circ g$.

DEMONSTRATION. La suffisance est triviale. La nécessité est claire si f est étagée, i.e. ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Dans le cas général, on remarque que f, mesurable de E dans $\hat{F}$, est limite simple d'une suite $(f_n)$ d'applications étagées mesurables ($\hat{F}$ est métrisable, séparable). Soit alors $(\hat{f}_n)$ une suite d'applications mesurables de $\hat{E}$ dans $\hat{F}$ telle que $f_n = \hat{f}_n \circ g$ et soit H l'ensemble des $x \in \hat{E}$ tels que $\lim_n f_n(x)$ existe : H est un élément de $\hat{\underline{\underline{E}}}$ - cela se voit en écrivant le critère de Cauchy pour une distance d sur $\hat{F}$ compatible avec sa topologie et le rendant complet. Il ne reste plus qu'à prendre $f = \lim f_n$ sur H et f égale à un point fixé de $\hat{F}$ sur $H^c$.

REMARQUE. Au sujet du théorème. Comme me l'a fait remarquer Troallic, qui connait depuis longtemps ce genre de démonstration du théorème de Lusin, il n'est même pas nécessaire d'introduire de capacité : il suffit d'utiliser la mesure image de P par l'application borélienne $x \to (x,f(x))$ de E sur le graphe de f. Cette ultime simplification m'a bloqué pendant plus d'un mois à cet endroit dans ma rédaction. Finalement, je ne change rien : j'aime trop les capacités !

Commentaires. L'énoncé du lemme reste évidemment valable si on suppose seulement que $(\hat{F},\hat{\underline{\underline{F}}})$ est un espace mesurable de sorte que $\hat{\underline{\underline{F}}}$ soit la tribu borélienne d'une topologie polonaise sur $\hat{F}$. Un tel espace mesurable est dit lusinien. Sont de cette sorte les espaces mesurables sous-jacents aux espaces topologiques lusiniens, métrisables ou non. On montre (voir [8]) que deux espaces mesurables lusiniens sont isomorphes dès qu'ils ont même cardinalité, et qu'un espace mesurable lusinien non dénombrable a la puissance du continu - il est alors isomorphe à [0,1] par exemple. Enfin, on peut montrer que la véracité du lemme précédent caractérise les espaces mesurables lusiniens quand on fait varier les espaces mesurables E, $\hat{E}$ et l'application g.

## 4°/ Théorème de section (sans filtration) et application

Nous désignons ici par $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ un espace probabilisé complet et par E un borélien d'un espace polonais $\hat{E}$, muni de la topologie induite.

THEOREME. Soit H un élément de la tribu produit $\underline{\underline{B}}(E) \times \underline{\underline{F}}$. Il existe une application mesurable S de $\Omega$ dans E telle que $S(\omega)$ appartienne

<u>à la coupe</u> $H(\omega)$ <u>pour tout</u> $\omega\in\Omega$ <u>tel que</u> $H(\omega)\neq\emptyset$.

DEMONSTRATION. Nous supposons d'abord que $\hat{E}=\mathbb{R}_+$. Il s'agit alors de l'énoncé du lemme du n°3, un peu amélioré. En effet H appartient alors à $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}$ et le lemme précité nous fournit, pour $\varepsilon=1/n$, une v.a. $S_n$ de $\Omega$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et un élément $A_n$ de $\underline{\underline{F}}$, contenu dans la projection $\pi(H)$ de H sur $\Omega$, de sorte qu'on ait $P(A_n) > P[\pi(H)] - \frac{1}{n}$ et $S_n(\omega)\in H(\omega)$ pour tout $\omega\in A_n$. On pose alors

$$S(\omega) = S_n(\omega) \text{ pour } \omega\in A_n - (\textstyle\bigcup_{m<n} A_m)$$
$$S(\omega) = \text{un point fixé de E pour } \omega\notin\pi(H)$$

et on complète la définition de S sur l'ensemble $\pi(H)-(\bigcup_n A_n)$, qui est P-négligeable, grâce à l'axiome de choix. Maintenant, il est bien connu (?) que tout espace métrisable séparable est isomorphe, quant à sa structure borélienne, à une partie de $[0,1]$ (esquisse de démonstration pour le non-initié : appelons E notre espace, et $(E_n)$ une suite de boréliens engendrant $\underline{\underline{B}}(E)$, puis posons $f(x)=\sum 3^{-n}1_{E_n}(x)$ ; on vérifie aisément que f est une bijection biborélienne - autrement dit un isomorphisme borélien - de E sur f(E)). Le cas général résulte alors du lemme suivant

LEMME. <u>Soit</u> f <u>un isomorphisme borélien d'une partie</u> E <u>d'un espace polonais</u> $\hat{E}$ <u>sur une partie</u> F <u>d'un espace polonais</u> $\hat{F}$. <u>Alors</u> f <u>s'étend en un isomorphisme borélien d'une partie borélienne de</u> $\hat{E}$ <u>contenant</u> E <u>sur une partie borélienne de</u> $\hat{F}$ <u>contenant</u> F. <u>En particulier</u> F <u>est un borélien de</u> $\hat{F}$ <u>ssi</u> E <u>est un borélien de</u> $\hat{E}$.

DEMONSTRATION. D'après le lemme de Doob rappelé au 3°/ (en y prenant pour g l'injection de E dans $\hat{E}$), il existe une application borélienne $\hat{f}$ de $\hat{E}$ dans $\hat{F}$ telle que $f=\hat{f}_{|E}$ ; de même, si h désigne l'inverse de f, il existe une application borélienne $\hat{h}$ de $\hat{F}$ dans $\hat{E}$ telle que $h=\hat{h}_{|F}$. Posons $E'=\{x\in\hat{E} : \hat{h}\circ\hat{f}(x)=x\}$, borélien de $\hat{E}$ contenant E, et de même $F'=\{y\in\hat{F} : \hat{f}\circ\hat{h}(y)=y\}$, borélien de $\hat{F}$ contenant F : il est clair que $f'=\hat{f}_{|E'}$ est un isomorphisme borélien de E' sur F' prolongeant f.

REMARQUE. On démontre de la même manière que tout espace radonien (cf 2°/) est, quant à sa structure borélienne, isomorphe à une partie universellement mesurable de $[0,1]$.

Je me contenterai de donner une application du théorème de section (il y en a d'autres dans [8], par exemple au n°111 de l'appendice au chapitre IV)

THEOREME. <u>Soient</u> E <u>un borélien d'un espace polonais</u> $\hat{E}$, <u>et</u> f <u>une application borélienne surjective de</u> E <u>sur un espace métrisable séparable</u> F <u>Pour toute probabilité</u> P <u>sur</u> F <u>il existe une probabilité</u> Q <u>sur</u> E <u>telle</u>

<u>que</u> P <u>soit l'image de</u> Q <u>par</u> f .

DEMONSTRATION. Posons $\Omega = F$ , $\underline{\underline{F}}$ = complétée de $\underline{\underline{B}}(F)$ pour P. Le graphe H de f appartenant à $\underline{\underline{B}}(E) \times \underline{\underline{F}}$ , le théorème de section nous fournit "un inverse mesurable" S de f, et il n'y a plus qu'à prendre pour Q la probabilité image de P par S .

<u>Commentaires</u>. 1) Au sujet du lemme. Il entraine aussi que F est analytique (resp coanalytique) dans $\hat{F}$ ssi E l'est dans $\hat{E}$. D'où l'invariance par "plongement borélien" des notions d'espaces sousliniens, cosousliniens, lusiniens et radoniens.

2) Au sujet du théorème de section. Il s'étend bien entendu au cas où E est une partie analytique de $\hat{E}$ et où H est $\underline{\underline{B}}(E) \times \underline{\underline{F}}$-analytique. Ceci dit, en s'enfonçant un peu dans la théorie des ensembles analytiques, on peut démontrer un meilleur théorème de section, connu sous le nom de "théorème de Jankov-Von Neumann" sous sa forme topologique (voir [8]) : si on part d'un espace mesurable $(\Omega, \underline{\underline{F}}^{\circ})$, notre énoncé nous dit que, pour une probabilité P fixée, il existe une section P-mesurable alors qu'on peut obtenir une section indépendante de P et P-mesurable pour tout P (et même un peu mieux).

BIBLIOGRAPHIE

[1] CORNEA (A.), LICEA (G.) : Une démonstration unifiée des théorèmes de section de P.A. Meyer (Z.f.W., 10, 198-202, 1968)

[2] DELLACHERIE (C.) : Ensembles pavés et rabotages (Sém. Proba. V, L.N. n°191, 103-126, Springer, 1971)

[3] : Capacités et Processus stochastiques (Ergebnisse n°67, Springer, 1972)

[4] : Un ensemble progressivement mesurable (Sém. Proba. VIII, L.N. n°381, 22-24, Springer, 1974)

[5] : Théorie unifiée des capacités et des ensembles analytiques (Sém. Proba. XII, L.N. n°649, 707-738, 1978)

[6] : Quelques exemples familiers, en probabilités, d'ensembles analytiques non boréliens (Ibid., 746-756)

[7] : Capacités, rabotages et ensembles analytiques (à paraitre dans Séminaire d'Initiation à l'analyse, Paris)

[8] DELLACHERIE (C.), MEYER (P.A.) : Probabilités et Potentiel. Chapitres I à IV (Hermann, Paris 1975)

[9] GETOOR (R.K.) : Markov Processes : Ray processes and right processes (L.N. n°440, Springer, 1975)

[10] LENGLART (E.) : Tribus de Meyer et théorie des processus (Sém. Proba. XIV, L.N. n°784, 500-546, Springer, 1980)

[11] MEYER (P.A.) : Probabilités et Potentiel (Hermann, Paris 1966)

[12] SIERPINSKI (W.) : Sur la puissance des ensembles mesurables B (Fund. Math. 5, 166-171, 1924)