Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Bernard Maisonneuve

Surmartingales-mesures

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 347-350
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__347_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SURMARTINGALES - MESURES

par Bernard MAISONNEUVE

Cette étude a été inspirée par la lecture du paragraphe "Martingales positives et fonctions d'ensembles" du livre de NEVEU ([1], III-1), ainsi que par un cours donné par SHIRYAEV à Grenoble en 1978.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé muni d'une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\bigvee_n \mathcal{F}_n = \mathcal{F}$. On pose $\mathcal{A} = \bigcup_n \mathcal{F}_n$.

A toute surmartingale positive $\{X_n, \mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}\}$ on peut associer une fonction d'ensemble définie sur $\mathcal{A}$ par la formule

(1) $\mu(A) = \lim \int_A X_n dP \ , \quad A \in \mathcal{A} \ .$

Cette limite existe puisque la suite $(\int_A X_n dP)$ est décroissante à partir d'un certain rang ; précisément si $A \in \mathcal{F}_k$ la suite $(\int_A X_n dP)_{n \geq k}$ est décroissante, de sorte que l'on a

(2) $\mu(A) \leq \int_A X_k dP \quad$ si $A \in \mathcal{F}_k$.

Voici le résultat principal de cette étude.

THEOREME 1. - Soit $\{X_n, \mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ une surmartingale positive telle que la fonction d'ensemble μ qui lui est associée par (1) soit σ-additive sur $\mathcal{A}$ (nous dirons que (X_n) est une surmartingale-mesure). La mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$ qui prolonge μ , et que nous noterons encore μ , admet alors la décomposition de Lebesgue suivante :

(3) $\mu(A) = \int_A X dP + \mu(A \cap \{X=+\infty\})$, $A \in \mathcal{F}$,

où $X = \limsup X_n$. De plus μ est absolument continue par rapport à P si et seulement si $X_n \to X$ dans $L^1(P)$ ou encore si $\mu\{X=+\infty\} = 0$.

Remarques.

1) La fonction d'ensemble μ est toujours additive sur $\mathcal{A}$ et même σ-additive sur chaque tribu $\mathcal{F}_k$; en effet si (A_m) est une suite décroissante de $\mathcal{F}_k$ la suite double $(\int_{A_m} X_n dP)_{m\geq 0,\, n\geq k}$ est séparément décroissante, d'où il résulte que $\mu(A_m) \to \mu(\bigcap_m A_m)$.

2) La fonction d'ensemble μ n'est pas nécessairement σ-additive sur $\mathcal{A}$, même lorsque (X_n) est une martingale. Par exemple si $\Omega =]0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(]0,1])$, $P = \mathrm{Leb}(]0,1])$, $\mathcal{F}_n = \mathcal{T}\{](k-1)2^{-n}, k2^{-n}]: k=1,\dots,2^n\}$, $X_n = 2^n I_{]0,2^{-n}]}$ la fonction μ n'est pas σ-additive puisque $\mu(]0,2^{-n}]) = 1 \not\to 0$.

3) Partons cette fois d'une mesure positive finie μ sur $(\Omega,\mathcal{F})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu \ll P$ sur $\mathcal{F}_n$. Si (X_n) est une suite de v.a. positives adaptée à $(\mathcal{F}_n)$ telle que $\mu = X_n.P$ sur $\mathcal{F}_n$ pour tout n , la mesure μ satisfait évidemment à l'égalité (1) et la suite (X_n) est une martingale, donc d'après le théorème 1 on a aussi l'égalité (2). Ce résultat était déjà connu (je n'ai pas de référence exacte) ; mais si l'on ne suppose plus l'absolue continuité de μ sur chaque $\mathcal{F}_n$, le théorème 1 permet encore d'obtenir la décomposition de Lebesgue de μ à partir des décompositions de μ sur les tribus $\mathcal{F}_n$. Précisément, on a le résultat suivant, qui complète la proposition III-1-5 de NEVEU [1].

THÉOREME 2. - Soit μ une mesure positive finie sur $(\Omega,\mathcal{F})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit X_n une v.a. $\mathcal{F}_n$-mesurable positive et soit N_n un ensemble P-négligeable appartenant à $\mathcal{F}_n$ tels que

(4) $\mu(A) = \int_A X_n dP + \mu(A \cap N_n)$, $A \in \mathcal{F}_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Alors :

(5) $\mu(A) = \int_A X dP + \mu(A \cap (N \cup \{X=+\infty\}))$, $A \in \mathcal{F}$,

où $X = \limsup X_n$, $N = \bigcup_n N_n$. De plus, on a les équivalences suivantes :

$\mu(\cdot \cap N^c) \ll P \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{L^1(P)} X \Leftrightarrow \mu(\{X=+\infty\} \cap N^c) = 0$.

Démonstration. - Nous allons appliquer le théorème 1 à la suite (X_n) . Vérifions pour cela que c'est une surmartingale. D'après (4)

$$\mu(N_n \cap N_{n+1}^c) = \int_{N_n} X_{n+1} dP = 0 \quad ,$$

donc la suite (I_{N_n}) est μ-p.p. croissante et par suite

$$X_{n+1} \cdot P = \mu(\cdot \cap N_{n+1}^c) \leq \mu(\cdot \cap N_n^c) = X_n \cdot P \quad \text{sur } \mathcal{F}_n \ ,$$

ce qui montre que $\{X_n, \mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ est une surmartingale. Comme $I_{N_n^c} \to I_{N^c}$ μ-p.p., la fonction d'ensemble associée à (X_n) est égale à $\mu(\cdot \cap N^c)$ sur $\mathcal{A}$, donc elle est σ-additive sur $\mathcal{A}$. D'après le théorème 1, il vient

$$\mu(\cdot \cap N^c \cap \{X < \infty\}) = X.P \ ,$$

égalité qui équivaut à (5). La dernière assertion découle de l'assertion correspondante du théorème 1.

Remarque. Supposons que les X_n aient été choisis de sorte que l'on ait

$$\mu = X_n \cdot P + \mu(\cdot \cap \{X_n = +\infty\}) \quad \text{sur } \mathcal{F}_n \ , \quad n \in \mathbb{N} \ .$$

Il est alors facile de voir que

$$\mu = X \cdot P + \mu(\cdot \cap \{X = +\infty\}) \ ,$$

toujours avec $X = \limsup X_n$; en effet, $\{X_n = +\infty\} \subset \{X = +\infty\}$ à un ensemble μ-négligeable près.

Démonstration du théorème 1. - La surmartingale positive (X_n) converge P-p.s. vers X , donc d'après le lemme de Fatou

(6) $\int_A X dP \leq \mu(A)$, $A \in \mathcal{A}$;

cette inégalité s'étend à $A \in \mathcal{F}$ par un raisonnement de classe monotone ($\mathcal{A}$ est une algèbre qui engendre $\mathcal{F}$). Pour établir (3), il reste à montrer que la mesure $\mu - X.P$ est portée par $\{X=+\infty\}$, c'est-à-dire que

$$(7) \quad \mu\{X<+\infty\} = \int X dP \ .$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a $\{\limsup X_n < x\} \subset \liminf\{X_n < x\}$, donc

$$\begin{aligned} \mu\{X<x\} &\leq \liminf \mu\{X_n<x\} \\ &\leq \liminf \int_{\{X_n<x\}} X_n dP \qquad \text{d'après (2).} \end{aligned}$$

Si $P\{X=x\} = 0$, on a $X_n I_{\{X_n<x\}} \to X I_{\{X<x\}}$ P-p.s., et d'après le théorème de convergence dominée, il vient

$$\mu\{X<x\} \leq \int_{\{X<x\}} X dP \ ,$$

$$\mu\{X<+\infty\} \leq \int_{\{X<+\infty\}} X dP = \int X dP.$$

D'après (6) cette dernière inégalité est en fait une égalité, ce qui donne (7) et le résultat cherché.

Comme les v.a. X_n sont positives et que $X_n \to X$ P-p.s. on a l'équivalence $X_n \xrightarrow{L^1} X \Leftrightarrow E(X_n) \to E(X)$; la dernière assertion du théorème en découle.

[1] J. NEVEU, Martingales à temps discret, Masson, Paris, 1972.

NOTE IMPORTANTE : Comme me le signale J. Azéma, le théorème 2, sous la forme indiquée en remarque, est dû à E.S. Andersen et B. Jessen (Some limit theorems on set functions, Danske vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd. 25, 1948) et a même été étendu en temps continu par J. Horowitz (Optional supermartingales and the Andersen-Jessen theorem, Z.f.W., 1978).

(octobre 80)