CLAUDE DELLACHERIE
ÉRIK LENGLART

Sur des problèmes de régularisation, de recollement et d'interpolation en théorie des martingales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 328-346
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__328_0>

SUR DES PROBLEMES DE REGULARISATION, DE RECOLLEMENT ET D'INTERPOLATION EN THEORIE DES MARTINGALES

par C. Dellacherie et E. Lenglart

Soit $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ un espace probabilisé complet muni d'une filtration $\mathbb{F}=(\underline{\underline{F}}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ ne vérifiant pas nécessairement les conditions habituelles (on suppose toutefois, pour simplifier, que $\underline{\underline{F}}$ est la complétée de $\underline{\underline{F}}_\infty=\bigvee_t \underline{\underline{F}}_t$) ; les processus que nous considérerons serons à valeur dans $\mathbb{R}$. Nous dirons qu'une famille Θ de temps d'arrêt de $\mathbb{F}$ est une <u>chronologie</u> si elle contient 0, est stable pour sup et inf (finis) et contient une suite (T_n) telle que $T_n \geq n$; dans cette introduction nous noterons Θ_c (resp Θ_b) la chronologie usuelle formée des temps constants finis (resp des temps d'arrêt bornés). Etant donnée une chronologie Θ, nous dirons qu'une famille $\mathbb{X}=(X(T))_{T\in\Theta}$ de v.a. indexée par Θ (soit encore, une application $\mathbb{X}$ de Θ dans L^0) est un <u>Θ-système</u> si elle vérifie la condition de compatibilité

(C) $X(S)=X(T)$ p.s. sur $\{S=T\}$ pour tout $S,T\in\Theta$

et la condition d'adaptation

(A) $X(T)$ est $\underline{\underline{F}}_T$-mesurable pour tout $T\in\Theta$

Nous dirons qu'un processus optionnel $X=(X_t)$ <u>agrège</u> le Θ-système $\mathbb{X}=(X(T))_{T\in\Theta}$ si on a $X_T=X(T)$ p.s. pour tout $T\in\Theta$. Tout processus optionnel se désagrège évidemment en un Θ-système, mais l'opération inverse, beaucoup plus délicate, n'est pas toujours possible : pour $\Theta=\Theta_c$, la notion de Θ-système coincide avec celle de processus adapté et l'agrégation de $\mathbb{X}$ revient alors à trouver une modification optionnelle de ce processus, ce qui est possible ssi $\mathbb{X}$ est une application mesurable de $\mathbb{R}_+$ dans un sous-espace séparable de L^0 (pour voir cela, appliquer un théorème classique de Doob - IV.30 de [4] - pour obtenir un processus mesurable, puis le théorème de projection optionnelle) ; pour $\Theta=\Theta_b$, on sait, grâce au théorème de section optionnelle, qu'il y a au plus une agrégation possible (à l'indistinguabilité près), et un théorème profond et difficile de Mokobodzki (voir [9]) assure que si $(\mathbb{X}^n)$ est une suite de Θ_b-systèmes agrégeables telle que $\lim X^n(T)$ existe dans L^0 (i.e. en probabilité) pour tout $T\in\Theta_b$, alors le Θ_b-système limite $\mathbb{X}$ est encore agrégeable. Par ailleurs, nous montrons dans [3] que, sous les conditions habituelles, tout Θ-système $\mathbb{X}$ "s.c.s. à droite" (i.e. vérifiant $X(T)\geq \limsup X(T_n)$ p.s. pour tout $T \in \Theta$ et toute suite (T_n) dans Θ décroissant vers T) peut être agrégé par un processus optionnel à trajectoires s.c.s. à droite.

Dans l'article présent, nous nous intéressons à l'agrégation de systèmes $\mathbb{X}$ se comportant comme une surmartingale, ou une quasi-martingale, ou encore une semimartingale. Nous nous contenterons pour le moment de définir ce que nous appellerons une Θ-surmartingale : c'est, pour une chronologie Θ donnée, un Θ-système $\mathbb{X}$ vérifiant comme il se doit la condition

(S) $X(T)$ est intégrable pour tout $T \in \Theta$ et on a
$X(S) \geq E[X(T)|\underline{\underline{F}}_S]$ p.s. pour tout $S, T \in \Theta$ avec $S \leq T$

Pour $\Theta = \Theta_c$, on retrouve la notion de surmartingale ; rappelons par ailleurs qu'un processus X est appelé une surmartingale forte s'il est optionnel et s'il se désagrège en une Θ_b-surmartingale. Ecrivons maintenant, dans notre jargon, deux résultats tirés de [5] :

1) toute Θ_c-surmartingale $\mathbb{X}$ peut être agrégée en une surmartingale forte
2) toute Θ_b-surmartingale $\mathbb{X}$ peut être agrégée en une surmartingale forte

Dans le premier cas, il s'agit d'une régularisation : le système $\mathbb{X}$ est en fait un processus, dont le processus X est une excellente modification (non unique en général). Dans le second cas, il s'agit d'un recollement : le processus X recolle les données temporelles $X(T)$, de manière unique d'après le théorème de section. Nous établirons entr'autres le résultat suivant, contenant 1) et 2) comme cas particulier

0) Etant donnée une chronologie Θ, toute Θ-surmartingale $\mathbb{X}$ peut être agrégée par une surmartingale forte X

Nous dirons, dans ce cas général, qu'il s'agit d'une interpolation : les données temporelles $X(T)$, pour $T \in \Theta$, peuvent en effet être insuffisantes pour déterminer le processus X, même à une modification près.

Maintenant que notre titre est élucidé dans le contexte "optionnel", parlons du cadre dans lequel nous allons effectivement nous placer. Comme il nous a paru intéressant d'étudier aussi le cas "prévisible" (les éléments de Θ sont prévisibles, $X(T)$ est $\underline{\underline{F}}_{T-}$-mesurable pour tout $T \in \Theta$ et on doit agréger par un processus prévisible), et, pourquoi pas, le cas "accessible",etc, nous nous sommes décidés finalement à tout écrire dans le cadre naturel des tribus de Meyer introduites dans [7] : cela permet d'unifier le langage et les démonstrations, sans d'ailleurs compliquer la situation (la tribu optionnelle sans les conditions habituelles est aussi délicate à manipuler que la tribu de Meyer la plus générale). Aussi commencerons nous par exposer succinctement une partie de [7] (en l'édulcorant quelque peu), exposition poursuivie à l'intérieur de l'article au fur et à mesure de nos besoins. Nous n'interdisons cependant pas au lecteur de ne s'intéresser qu'au cas optionnel (ou prévisible) sous les conditions habituelles.

Deux mots enfin sur les démonstrations : nous n'introduisons pas, à proprement parler, d'idées nouvelles, mais nous devrons utiliser, non sans invention, une bonne part de l'arsenal de la théorie des martingales et de la théorie générale des processus - ce qui est bien naturel pour un problème d'agrégation...

§1. TRIBUS DE MEYER

Nous continuons à travailler à partir d'un espace probabilisé complet $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ muni d'une filtration $\mathbb{F}=(\underline{\underline{F}}_t)$ telle que $\underline{\underline{F}}$ soit la complétée de $\underline{\underline{F}}_\infty=\bigvee_t \underline{\underline{F}}_t$, quoique, à bien des égards, il soit plus naturel de définir intrinsèquement la notion de tribu de Meyer sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$ sans faire intervenir a priori une filtration (cf [7]).

1 DEFINITION. Nous dirons qu'une tribu $\underline{\underline{A}}$ sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$ est une tribu de Meyer (relative à $\mathbb{F}$) si elle est engendrée par une famille de processus càdlàg adaptés contenant les processus continus adaptés.

Ainsi la tribu optionnelle $\underline{\underline{O}}$, engendrée par tous les processus càdlàg adaptés, est la plus grande tribu de Meyer (relative à $\mathbb{F}$) tandis que la tribu prévisible $\underline{\underline{P}}$, engendrée par tous les processus continus adaptés est la plus petite. En général, une tribu de Meyer (relative à $\mathbb{F}$) est, comme la tribu accessible ou celle introduite par Le Jan [6], une tribu engendrée par des processus càdlàg et située entre $\underline{\underline{P}}$ et $\underline{\underline{O}}$.

Nous désignons désormais par $\underline{\underline{A}}$ une tribu de Meyer fixée (relative à notre filtration). Si T est un temps d'arrêt de $(\underline{\underline{F}}_{t+})$, alors l'intervalle stochastique $]T,+\infty[$ appartient à $\underline{\underline{P}}$ et donc à $\underline{\underline{A}}$. Nous définissons maintenant la notion de temps d'arrêt de $\underline{\underline{A}}$ (en abrégé, $\underline{\underline{A}}$-temps d'arrêt, ou $\underline{\underline{A}}$-t.d'a.)

2 DEFINITION. Une v.a. T à valeurs dans $[0,+\infty]$ est un temps d'arrêt de $\underline{\underline{A}}$ si l'intervalle stochastique $[T,+\infty[$ appartient à $\underline{\underline{A}}$.

Lorsque $\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{P}}$ (resp $\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{O}}$), on retrouve la définition des temps prévisibles (resp optionnels) de [4], auquel nous renvoyons le lecteur pour la terminologie adoptée ici sans explications. On montre que, si T est un $\underline{\underline{A}}$-t.d'a. et X un processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable, alors le processus $X_T 1_{[T,+\infty[}$ est encore $\underline{\underline{A}}$-mesurable ; en particulier l'arrêté

$X^T = X1_{[\![0,T[\![} + X_T 1_{[\![T,+\infty[\![}$ est encore $\underline{\underline{A}}$-mesurable (cette propriété est encore vraie si on suppose seulement que T est un temps d'arrêt de $(\underline{\underline{F}}_{t+})$).

Nous allons enfin associer à tout $\underline{\underline{A}}$-temps d'arrêt T une sous-tribu de $\underline{\underline{F}}_\infty$; nous dirons qu'un processus $(X_t)_{t\in\bar{\mathbb{R}}_+}$, défini jusqu'à l'infini, est $\underline{\underline{A}}$-mesurable si $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est $\underline{\underline{A}}$-mesurable et si X_∞ est une v.a. $\underline{\underline{F}}_\infty$-mesurable.

3 DEFINITION. A tout $\underline{\underline{A}}$-temps d'arrêt T on associe la tribu $\underline{\underline{F}}^a_T$ engendrée par les v.a. de la forme X_T quand X parcourt l'ensemble des processus $\underline{\underline{A}}$-mesurables définis jusqu'à l'infini.

Lorsque $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{O}}$, on retrouve la tribu $\underline{\underline{F}}_T$ et, lorsque $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{P}}$, la tribu $\underline{\underline{F}}_{T-}$ (pour T prévisible, mais on peut définir $\underline{\underline{F}}^a_T$ pour toute v.a. $T \geq 0$). De manière générale, si T est un $\underline{\underline{A}}$-temps d'arrêt, on a les inclusions $\underline{\underline{F}}_{T-} \subseteq \underline{\underline{F}}^a_T \subseteq \underline{\underline{F}}_T$ et l'égalité $\underline{\underline{F}}^a_T = \{H \in \underline{\underline{F}}_\infty : T_H$ est un $\underline{\underline{A}}$-t.d'a.$\}$ où, comme d'ordinaire, on a posé $T_H = T$ sur H et $T_H = +\infty$ sur H^c. On démontre que, si S et T sont des $\underline{\underline{A}}$-temps d'arrêt et si H appartient à $\underline{\underline{F}}^a_S$, alors $A \cap \{S \leq T\}$ et $A \cap \{S < T\}$ appartiennent à $\underline{\underline{F}}^a_T$; en particulier, on a $\underline{\underline{F}}^a_S \subseteq \underline{\underline{F}}^a_T$ pour $S \leq T$ et, de manière générale, les ensembles $\{S<T\}, \{S\leq T\}$ et $\{S = T\}$ appartiennent à la fois à $\underline{\underline{F}}^a_S$ et $\underline{\underline{F}}^a_T$.

Nous pouvons maintenant énoncer les deux théorèmes fondamentaux de la théorie générale des processus

4 THEOREME DE SECTION. Soit B un élément de $\underline{\underline{A}}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\underline{\underline{A}}$-temps d'arrêt T tel que B en contienne le graphe $[\![T]\!]$ dans $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ et que l'on ait $P\{T < +\infty\} > P[\pi(B)] - \varepsilon$, où $\pi(B)$ est la projection de B sur Ω.

REMARQUE. Si T est un $\underline{\underline{A}}$-t.d'a., alors $[\![T]\!]$ appartient à $\underline{\underline{A}}$. Réciproquement, le théorème de section entraine que, si T est une v.a. ≥ 0 telle que $[\![T]\!]$ appartienne à $\underline{\underline{A}}$, alors T est p.s. égal à un $\underline{\underline{A}}$-t.d'a, et égal à un $\underline{\underline{A}}$-t.d'a. si $\underline{\underline{A}}$ est P-complète (i.e. si tout processus càdlàg indistinguable d'un processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable est $\underline{\underline{A}}$-mesurable ; nous renvoyons à [7] pour l'étude de cette notion importante qui permet, en considérant la P-complétée d'une tribu de Meyer, d'en ramener bien souvent l'étude au cas où la filtration $\mathbf{F}$ vérifie les conditions habituelles).

5 THEOREME DE PROJECTION. Soit X un processus mesurable, borné ou positif. Il existe un processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable ${}^aX$, unique à l'indistinguabilité près, tel que l'on ait ${}^aX_T = E[X_T | \underline{\underline{F}}^a_T]$ p.s. pour tout $\underline{\underline{A}}$-temps d'arrêt fini T. Ce processus est appelé la $\underline{\underline{A}}$-projection de X.

REMARQUE. Ce théorème s'étend au cas où X est un processus mesurable

$\underline{\underline{A}}$-projetable, i.e. tel que $E[|X_T||\underline{\underline{F}}^a_T]$ soit fini p.s. pour tout $\underline{\underline{A}}$-temps d'arrêt fini T.

Nous ne donnons pas le théorème de projection duale car nous n'aurons pas à l'utiliser explicitement. Par contre, nous aurons grand besoin d'une variante d'un théorème d'analyse fonctionnelle dû à Meyer [8] (voir surtout [5]) ; nous ne chercherons pas ici à donner le meilleur énoncé possible.

6 THEOREME. Soit $\mathbb{G}$ l'espace vectoriel de processus càglàd jusqu'à l'infini engendré par les processus $1_{]T,+\infty]}$, où T parcourt l'ensemble des $\underline{\underline{A}}$-temps d'arrêt, et soit J une forme linéaire positive sur $\mathbb{G}$ vérifiant la condition suivante

Si (X^n) est une suite décroissante d'éléments positifs de $\mathbb{G}$ telle que $\lim_n \sup_t |X^n_t| = 0$ p.s., alors on a $\lim_n J(X^n) = 0$.

Il existe deux processus $\underline{\underline{A}}$-mesurables A et B définis jusqu'à l'infini, positifs, à trajectoires p.s. càdlàg et croissantes, tels que $A_0 = 0$ et que

$$J(X) = E[\int_{]0,+\infty]} X_s \, dA_s + \int_{[0,+\infty[} X_{s+} \, dB_s]$$

pour tout $X \in \mathbb{G}$; A peut être pris prévisible ($A+B_-$ est alors unique).

Nous terminons cet aperçu en définissant la notion de $\underline{\underline{A}}$-surmartingale, qui généralise celle de surmartingale forte. Nous donnerons au moment opportun les définitions des $\underline{\underline{A}}$-(quasi,semi)martingales.

7 DEFINITION. Un processus X est une $\underline{\underline{A}}$-surmartingale s'il est $\underline{\underline{A}}$-mesurable, si X_T est intégrable pour tout $\underline{\underline{A}}$-t.d'a. T borné et si on a

$$X_S \geq E[X_T|\underline{\underline{F}}^a_S] \text{ p.s.}$$

pour tout couple S,T de $\underline{\underline{A}}$-t.d'a. bornés tel que $S \leq T$.

REMARQUE. Sous les conditions habituelles, toute $\underline{\underline{O}}$-martingale (i.e. toute martingale forte) est càdlàg (et réciproquement), mais ce n'est pas le cas en général ; même sous les conditions habituelles, il existe quantité de $\underline{\underline{O}}$-surmartingales non càdlàg. On peut montrer cependant que toute $\underline{\underline{A}}$-surmartingale est làdlàg (ou presque : plus précisément, presque toutes ses trajectoires sont làdlàg).

§2. GENERALITES

Dans toute la suite de l'article, nous nous donnons une tribu de Meyer $\underline{\underline{A}}$, et nous commençons par reprendre, avec des petites variantes et quelques compléments, les notions introduites dans l'introduction.

8 DEFINITION. Une famille Θ de temps d'arrêt de $\underline{\underline{A}}$ est une chronologie si elle contient 0, est stable pour les sup. et inf. finis, et contient une suite (T_n) telle que $\sup_n T_n = +\infty$.

Nous désignons dans toute la suite par Θ une chronologie fixée. Nous aurons souvent l'occasion d'utiliser le petit lemme suivant (dont la démonstration n'a pas été sans mal... ; merci, Jeulin !)

9 LEMME. Soient $T_1,\dots,T_n \in \Theta$. Il existe $S_1,\dots,S_n \in \Theta$ tels que

a) $S_1 \leqq S_2 \leqq \dots \leqq S_n$,

b) $\bigcup_i [\![S_i]\!] = \bigcup_i [\![T_i]\!]$.

Nous dirons que $S_1,\dots,S_n$ est un réordonnement de $T_1,\dots,T_n$.

DEMONSTRATION. C'est trivial pour $n=1$ (et même $n=2$). Raisonnons par récurrence, en supposant que l'on sache réordonner toute suite de longueur n fixée, et soit $T_1,\dots,T_{n+1}$ une suite de longueur n+1. Désignons par $S'_1,\dots,S'_n$ un réordonnement de $T_1,\dots,T_n$, puis, par $S_2,\dots,S_n,S_{n+1}$ un réordonnement de $S'_2,\dots,S'_n,S'_1 \vee T_{n+1}$. Après avoir posé $S_1 = S'_1 \wedge T_{n+1}$, on vérifie sans peine que $S_1,S_2,\dots,S_n,S_{n+1}$ est un réordonnement de $T_1,T_2,\dots,T_n,T_{n+1}$.

REMARQUE. On peut aussi réordonner une suite infinie grâce à l'argument p. 49-50 de [2]. Ce dernier est aussi applicable à une suite finie de longueur n, mais a l'inconvénient de fournir alors une suite finie de longueur bien plus grande que n.

10 DEFINITION. Une famille $(X(T))_{T\in\Theta}$ de v.a. indexée par la chronologie Θ est un Θ-système (adapté à $\underline{\underline{A}}$) si elle vérifie

(C) $\quad X(S) = X(T)$ p.s. sur $\{S=T\}$ pour tout $S,T \in \Theta$,

(A) $\quad X(T)$ est $\underline{\underline{F}}^a_T$-mesurable pour tout $T\in\Theta$.

Le Θ-système $\mathbb{X}$ est une Θ-surmartingale si il vérifie de plus

(S) $\quad X(T)$ est intégrable pour tout $T\in\Theta$ et l'on a

$\quad X(S) \geq E[X(T)|\underline{\underline{F}}^a_S]$ p.s. pour tout $S,T \in \Theta$ avec $S \leqq T$.

Enfin, un processus X défini jusqu'à l'infini agrège le Θ-système $\mathbb{X}$ (dans $\underline{\underline{A}}$) si X est $\underline{\underline{A}}$-mesurable et si l'on a

$$X_T = X(T) \text{ p.s. pour tout } T\in\Theta$$

Dans la suite, nous nous intéressons à des problèmes d'agrégation spéciaux que nous avons appelés problèmes d'interpolation : notre Θ-système $\mathbb{X}$ vérifie une propriété liée à la théorie des martingales (par exemple, $\mathbb{X}$ est une Θ-surmartingale) et nous cherchons à agréger $\mathbb{X}$ par un processus X de sorte que, $\mathcal{T}$ désignant l'ensemble des $\underline{\underline{A}}$-t.d'a., le $\mathcal{T}$-système engendré par X vérifie "l'extension naturelle" de la propriété satisfaite par $\mathbb{X}$ (par exemple, si $\mathbb{X}$ est une Θ-surmartingale, X doit être une $\underline{\underline{A}}$-surmartingale). On notera que, pour $\Theta = \mathcal{T}$, le théorème de section nous prive de toute liberté dans le choix de X ; mais ce n'est pas le cas dans le cas général.

11 Nous dirons qu'une v.a. T est un $\underline{\underline{A}}$-temps d'arrêt Θ-<u>étagé</u> s'il existe une partition finie $A_1,\ldots,A_n$ de Ω et $T_1,\ldots,T_n \in \Theta$ tels que l'on ait $A_i \in \underline{\underline{F}}^a_{T_i}$ et $T = T_i$ sur A_i pour $i = 1,\ldots,n$. <u>Nous désignerons par $[\Theta]$ l'ensemble des $\underline{\underline{A}}$-t.d'a. Θ-étagés</u>. Lorsque Θ contient le temps constant $+\infty$, ce que nous supposerons à partir du §3, on voit aisément qu'un $\underline{\underline{A}}$-t.d'a. T est Θ-étagé ssi son graphe $[\![T]\!]$ est contenu dans la réunion des graphes $[\![T_i]\!]$ d'une suite finie d'éléments de Θ et que $[\Theta]$ est alors la plus petite chronologie contenant la chronologie Θ et stable par <u>découpage</u> (i.e. $T \in [\Theta]$ et $H \in \underline{\underline{F}}^a_T \Rightarrow T_H \in [\Theta]$). Par ailleurs, on vérifie sans peine que tout Θ-système $\mathbb{X}$ se prolonge de manière essentiellement unique en un $[\Theta]$-système. Comme tout processus X agrégeant $\mathbb{X}$ agrège aussi son extension en un $[\Theta]$-système, nous commettrons l'abus de langage de considérer que $\mathbb{X}$ est lui-même un $[\Theta]$-système. Cela n'amènera pas d'ambiguité car on a l'extension suivante aux Θ-surmartingales du théorème d'arrêt de Doob pour les surmartingales et les temps d'arrêt étagés.

12 PROPOSITION. <u>Toute Θ-surmartingale est encore une $[\Theta]$-surmartingale</u>.

DEMONSTRATION. Nous supposerons pour simplifier que l'on a $+\infty \in \Theta$. Soit $\mathbb{X}$ une Θ-surmartingale, que nous prolongeons implicitement en un $[\Theta]$-système. D'abord, il est clair que $X(T)$ est encore intégrable pour tout $T \in [\Theta]$. Soient $S, T \in [\Theta]$ tels que $S \leq T$; il nous faut vérifier que l'on a $X(S) \geq E[X(T) | \underline{\underline{F}}^a_S]$ p.s.. Soient $T_1,\ldots,T_n \in \Theta$ avec $T_n = +\infty$ tels que $[\![S]\!]$ et $[\![T]\!]$ soient contenus dans la réunion des $[\![T_i]\!]$. En vertu du lemme 9, on peut supposer que l'on a $T_1 \underline{\underline{\leq}} T_2 \underline{\underline{\leq}} \ldots \underline{\underline{\leq}} T_n$ et on voit sans peine que l'on peut écrire

$$S = \textstyle\sum_i T_i 1_{A_i} \quad , \quad T = \sum_i T_i 1_{B_i}$$

où $A_1,\ldots,A_n$ et $B_1,\ldots,B_n$ sont des partitions de Ω avec $A_i, B_i \in \underline{\underline{F}}^a_{T_i}$. Posons, pour $i = 1,\ldots,n$,

$$\underline{\underline{G}}_i = \underline{\underline{F}}^a_{T_i} \quad , \quad Y_i = X(T_i) \quad , \quad U = \textstyle\sum_i i\, 1_{A_i} \quad , \quad V = \sum_i i\, 1_{B_i}$$

Alors $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une surmartingale pour la filtration $(\underline{\underline{G}}_i)_{1 \leq i \leq n}$ et U et V sont des t.d'a. de cette filtration avec $U \leq V$. Comme on a $Y_U = X(S)$ et $Y_V = X(T)$, on conclut aisément en utilisant le théorème d'arrêt de Doob.

13 Pour simplifier l'exposition, <u>nous supposerons désormais que la chronologie Θ contient</u> $+\infty$. Tout processus X sera supposé défini jusqu'à l'infini ; un tel processus est, par exemple, une <u>$\underline{\underline{A}}$-surmartingale jusqu'à l'infini</u> si, dans la définition 6, on ne restreint pas les $\underline{\underline{A}}$-t.d'a. S et T à être bornés. Il est très facile de passer du cas où Θ contient $+\infty$ au cas où Θ contient une suite (T_n) avec $T_n \underline{\underline{\geq}} n$ (on remplace alors, par exemple, la notion de $\underline{\underline{A}}$-surmartingale jusqu'à l'infini par celle de $\underline{\underline{A}}$-surmartingale),

et aussi au cas général, où l'on suppose seulement que Θ contient une suite (T_n) avec $\sup_n T_n = +\infty$ (on remplace alors, par exemple, la notion de $\underline{\underline{A}}$-surmartingale jusqu'à l'infini par celle de $\underline{\underline{A}}$-surmartingale locale - que nous laissons au lecteur le soin de définir). Enfin, nous notons désormais $\mathcal{T}$ la chronologie de tous les $\underline{\underline{A}}$-t.d'a..

§3. SURMARTINGALES ET ENVELOPPE DE SNELL

Nous adaptons de manière évidente le vocabulaire relatif à l'ordre sur les processus aux Θ-systèmes. Nous dirons par exemple qu'un Θ-système $\mathbb{X}$ est majoré par un $\mathcal{T}$-système $\mathbb{Y}$ si on a $X(T) \leq Y(T)$ p.s. pour tout $T \in \Theta$; comme nous travaillons à l'indistinguabilité près, le théorème de section assure que, si X et Y sont deux processus $\underline{\underline{A}}$-mesurables, il équivaut de dire que Y majore X ou que le $\mathcal{T}$-système engendré par Y majore le $\mathcal{T}$-système engendré par X.

Le théorème suivant comprend la définition de l'enveloppe de Snell d'un Θ-système $\mathbb{X}$: c'est, si elle existe, **la plus petite $\mathcal{T}$-surmartingale ≥ 0 majorant $\mathbb{X}$**. On montre ensuite, à l'aide de cette notion, que toute Θ-surmartingale peut être agrégée en une $\underline{\underline{A}}$-surmartingale si bien qu'en particulier l'enveloppe de Snell, quand elle existe, s'agrège (de manière unique) en une $\underline{\underline{A}}$-surmartingale.

14 THEOREME. Soit $\mathbb{X}$ un Θ-système tel qu'on ait $\sup_{S \in \boxed{\Theta}} E[X^+(S)] < +\infty$ et posons, pour tout $\underline{\underline{A}}$-temps d'arrêt T,

$$Y(T) = \text{ess sup}_{S \in \boxed{\Theta}, S \geq T} E[X^+(S) | \underline{\underline{F}}^a_T]$$

La famille $\mathbb{Y}$ ainsi définie est une $\mathcal{T}$-surmartingale, et c'est la plus petite $\mathcal{T}$-surmartingale positive majorant $\mathbb{X}$; on dit que $\mathbb{Y}$ est **l'enveloppe de Snell de $\mathbb{X}$.**

DEMONSTRATION. Il s'agit, comme pour le théorème suivant, d'un simple aménagement des démonstrations de [5]. D'abord, en retranchant de $\mathbb{X}$ la restriction à Θ de la $\mathcal{T}$-martingale $(E[X^+(\infty) | \underline{\underline{F}}^a_T])_{T \in \mathcal{T}}$, on se ramène aisément au cas où $\mathbb{X}$ est positif et $X(\infty) = 0$. Vérifions alors que $\mathbb{Y}$ est un $\mathcal{T}$-système. L'adaptation est évidente ; la compatibilité résulte du fait qu'on a, pour $T \in \mathcal{T}$ et $A \in \underline{\underline{F}}^a_T$, $Y(T_A) = 1_A Y(T)$ p.s. car on a, $\boxed{\Theta}$ étant stable par découpage,

$$Y(T_A) = \text{ess sup}_{S \in \boxed{\Theta}, S \geq T_A} E[X(S) | \underline{\underline{F}}^a_{T_A}] = \text{ess sup}_{S \in \boxed{\Theta}, S \geq T} E[X(S_A) | \underline{\underline{F}}^a_{T_A}]$$
$$= \text{ess sup}_{S \in \boxed{\Theta}, S \geq T} 1_A E[X(S) | \underline{\underline{F}}^a_T] = 1_A Y(T).$$

Nous faisons maintenant la remarque capitale suivante : pour $T \in \mathcal{T}$ fixé, la famille des v.a. $\underline{\underline{F}}^a_T$-mesurables $Z(S) = E[X(S) | \underline{\underline{F}}^a_T]$, S parcourant les éléments de $\boxed{\Theta}$ majorant T, est filtrante croissante. En effet, pour $U, V \in \boxed{\Theta}$ majorant T, Z(U) et Z(V) sont à la fois $\underline{\underline{F}}^a_U$-mesurables et $\underline{\underline{F}}^a_V$-mesurables et on a $Z(U) \vee Z(V) = Z(W)$ où W est l'élément de $\boxed{\Theta}$ défini par $W = U$ sur $\{Z(U) \geq Z(V)\}$ et $W = V$ ailleurs.

On a par conséquent, pour tout $\underline{\underline{A}}$-t.d'a. T et tout $A\varepsilon\underline{\underline{F}}^a_T$,

$$\int_A Y(T)\,dP = \sup_{S\varepsilon[\Theta],\,S\geq T} \int_A X(S)\,dP$$

d'où l'on déduit sans peine que la v.a. Y(T) est intégrable et que $\mathbb{Y}$ est une $\mathcal{T}$-surmartingale ; et c'est évidemment la plus petite $\mathcal{T}$-surmartingale majorant le Θ-système (positif) $\mathbb{X}$.

REMARQUES. a) Si on renforce l'hypothèse faite sur $\mathbb{X}$ en demandant que le Θ-système $\mathbb{X}^+$ soit $[\Theta]$-uniformément intégrable (i.e. la famille de v.a. $(X^+(T))_{T\varepsilon[\Theta]}$ est uniformément intégrable), la construction de l'enveloppe de Snell $\mathbb{Y}$ montre que celle-ci est alors $\mathcal{T}$-uniformément intégrable ; $\mathbb{Y}$ deviendra donc, après agrégation, une $\underline{\underline{A}}$-surmartingale jusqu'à l'infini "de la classe (D)" .

b) La définition 10 d'un Θ-système et 11 de l'ensemble $[\Theta]$ des $\underline{\underline{A}}$-temps d'arrêt Θ-étagés a encore un sens si on suppose seulement que Θ est une famille (non vide) de $\underline{\underline{A}}$-temps d'arrêt. Et, si $\mathbb{X}$ est un Θ-système dans ces conditions, on peut encore définir l'enveloppe de Snell $\mathbb{Y}$ de $\mathbb{X}$ comme étant, si elle existe, la plus petite $\mathcal{T}$-surmartingale ≥ 0 majorant $\mathbb{X}$. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier qu'elle existe ssi on a $\sup_{S\varepsilon[\Theta]} E[X^+(S)] < +\infty$ et qu'elle est $\mathcal{T}$-uniformément intégrable ssi $\mathbb{X}^+$ est $[\Theta]$-uniformément intégrables. Le moyen le plus "économique" pour établir cela est sans doute de se ramener au cas où Θ est une chronologie en procédant comme suit : on considère la plus petite chronologie $\Theta°$ contenant Θ avec $+\infty\varepsilon\Theta°$, puis on prolonge $\mathbb{X}$ en posant $X(0) = \text{ess sup}_{T\varepsilon\Theta} X(T)\, 1_{\{T=0\}}$ et de même $X(\infty) = \text{ess sup}_{T\varepsilon\Theta} X(T)\, 1_{\{T=+\infty\}}$, ce qui permet ensuite de prolonger $\mathbb{X}$ en un $\Theta°$-système de manière essentiellement unique.

Nous résolvons maintenant notre problème d'agrégation

15 THEOREME. Toute Θ-surmartingale peut être agrégée par une $\underline{\underline{A}}$-surmartingale jusqu'à l'infini.

DEMONSTRATION. Soit $\mathbb{X}$ une Θ-surmartingale. D'après la proposition 12 c'est encore une $[\Theta]$-surmartingale si bien que l'on peut supposer que Θ est stable par découpage. Maintenant, quitte à retrancher de $\mathbb{X}$ la restriction à Θ de la $\mathcal{T}$-martingale constituée des $E[X(\infty)\,|\,\underline{\underline{F}}^a_T]$, on se ramène aisément au cas où $\mathbb{X}$ est ≥ 0 car le théorème de projection assure que la $\mathcal{T}$-martingale précédente est agrégée en une $\underline{\underline{A}}$-martingale jusqu'à l'infini. Soit alors $\mathbb{Y}$ l'enveloppe de Snell de $\mathbb{X}$: d'après la définition de $\mathbb{Y}$, il est clair que $\mathbb{X}$ est la restriction de $\mathbb{Y}$ à Θ, si bien qu'on est finalement ramené à traiter le cas où l'on a $\Theta = \mathcal{T}$. Par ailleurs, on se ramène facilement au cas où $\mathbb{X}$ est de plus borné : en effet, si on sait agréger les $\mathcal{T}$-surmartingales $\mathbb{X}^n = ((X(T)\wedge n)$ en des $\underline{\underline{A}}$-surmartingales X^n, alors $\mathbb{X}$ est agrégé par le processus $X = \liminf_n X^n$ (qui est fini ≥ 0 d'après le théorème de section) et X est une $\underline{\underline{A}}$-surmartingale car, si S,T sont deux $\underline{\underline{A}}$-t.d'a. avec $S \leq T$, on a

$$E[X_T | \underline{\underline{F}}^a_S] \leq \liminf_n E[X^n_T | \underline{\underline{F}}^a_S] \leq \liminf_n X^n_S = X_S \text{ p.s.}$$

Il nous reste donc à montrer qu'une $\mathcal{T}$-surmartingale $\mathbb{X}$, positive et bornée, peut s'agréger en une $\underline{\underline{A}}$-surmartingale (jusqu'à l'infini). Soit $\mathbb{G}$ l'espace vectoriel de processus càglàd engendré par les processus $1_{]T,+\infty]}$, $T \in \mathcal{T}$, et définissons une forme linéaire positive J sur $\mathbb{G}$ en posant $J(1_{]T,+\infty]}) = E[X(T) - \mathbb{X}(\infty)]$ et en prolongeant par linéarité (nous laissons au lecteur le soin de vérifier que c'est possible ; c'est élémentaire, mais encore faut-il bien s'y prendre). Nous vérifions que J satisfait à l'hypothèse du théorème 6. Soit (Z^n) une suite décroissante d'éléments positifs de $\mathbb{G}$ telle qu'on ait $\lim_n \sup_t |Z^n_t| = 0$ p.s. ; il faut montrer qu'on a $\lim_n J(Z^n) = 0$. Fixons un $\varepsilon > 0$ et posons, pour tout n et tout ω,

$$T_n(\omega) = \inf \{t : |Z^n_t(\omega)| > \varepsilon\} \quad (\inf \emptyset = +\infty)$$

En écrivant Z^n comme combinaison linéaire finie de générateurs de $\mathbb{G}$ on voit sans peine que l'on définit ainsi un $\underline{\underline{A}}$-t.d'a. T_n ; d'autre part, Z^n est majoré par ε sur $]0,T_n]$, la suite (T_n) est croissante et, pour presque tout ω, $T_n(\omega)$ vaut $+\infty$ pour n assez grand. Comme J est une forme linéaire positive, on a, si c est une constante qui majore la $\mathcal{T}$-surmartingale $\mathbb{X}$,

$$J(Z^n) = J(Z^n 1_{]0,T_n]}) + J(Z^n 1_{]T_n,+\infty]}) \leq \varepsilon J(1) + c \| Z^1 \|_\infty P\{T_n < +\infty\}$$

d'où, finalement, on a $\lim_n J(Z^n) = 0$. D'après le théorème 6, on sait qu'il existe deux processus $\underline{\underline{A}}$-mesurables positifs A et B, (presque) càdlàg et croissants, tels que l'on ait pour tout $\underline{\underline{A}}$-t.d'a. T

$$E[X(T) - X(\infty)] = J(1_{]T,+\infty]}) = E[(A_\infty - A_T) + (B_{\infty-} - B_{T-})]$$

en convenant que $B_{0-} = 0$. Si M désigne la $\underline{\underline{A}}$-martingale jusqu'à l'infini agrégeant la $\mathcal{T}$-martingale $(E[X(\infty) + A_\infty + B_{\infty-} | \underline{\underline{F}}^a_T])_{T \in \mathcal{T}}$, et si X est le processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable défini par $X = M - A - B_-$ (en toute rigueur, il faudrait remplacer B_- par un processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable qui en est indistinguable car $t \to B_{t-}(\omega)$ n'est défini que pour presque tout $\omega \in \Omega$), alors on a $X(\infty) = X_\infty$ et $E[X(T)] = E[X_T]$ pour tout $T \in \mathcal{T}$. Remplaçant T par T_H, H parcourant $\underline{\underline{F}}^a_T$, on en déduit que l'on a $X(T) = X_T$ p.s. pour tout $T \in \mathcal{T}$ et donc que X est une $\underline{\underline{A}}$-surmartingale jusqu'à l'infini qui agrège $\mathbb{X}$.

REMARQUES. a) Chemin faisant, nous avons démontré que toute $\underline{\underline{A}}$-surmartingale X bornée (mais la démonstration, légèrement modifiée, vaut pour X "de la classe (D)") admet une <u>décomposition de Mertens</u> :

on a $X = M - V$ où M est une $\underline{\underline{A}}$-martingale et $V = A + B_-$ est un processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable ≥ 0 (presque) làdlàg et croissant, qu'on peut supposer prévisible car B_- l'est et A peut l'être pris dans le théorème 6 (la décomposition est alors unique si on impose en plus que $V_0 = 0$, $V_+ - V = B - B_-$ étant $\underline{\underline{A}}$-mesurable). On pourra consulter [7] pour une autre démonstration, basée sur la décomposition de Doob-Meyer.

b) La remarque précédente permet d'étendre à notre situation le critère d'appartenance à la classe (D) de Mertens. Un Θ-système $\mathbb{X}$ est $\boxed{\Theta}$-uniformément intégrable ssi $\mathbb{X}$ est majoré en module par une $\underline{\underline{A}}$-martingale jusqu'à l'infini. La condition suffisante est triviale. La condition nécessaire résulte de la remarque a) du n°14 et de la remarque précédente. Comme en la remarque b) du n°14, ce critère ne nécessite pas que Θ soit une chronologie.

c) Le critère de Mertens précédent permet d'affirmer que, si un Θ-système $\mathbb{X}$ est d'une part $\boxed{\Theta}$-uniformément intégrable et d'autre part agrégeable par un processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable, alors il peut être agrégé par un processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable X "de la classe (D)" (i.e. X est $\mathcal{T}$-uniformément intégrable en tant que $\mathcal{T}$-système).

Le corollaire suivant est inspiré d'un résultat de Mokobodzki [11] en théorie du potentiel (voir aussi la remarque ci-dessous).

16 COROLLAIRE. Munissons l'espace E des $\underline{\underline{A}}$-surmartingales jusqu'à l'infini de la topologie de la convergence simple après avoir identifié tout $X \in E$ à l'application $T \to X_T$ de $\mathcal{T}$ dans L^1 muni de la topologie faible $\sigma(L^1, L^\infty)$. Alors une partie H de E est relativement compacte ssi, pour tout $T \in \mathcal{T}$, la famille de v.a. $(X_T)_{X \in H}$ est uniformément intégrable.

DEMONSTRATION. Rappelons que, d'après le critère de Dunford-Pettis (cf [4]-II.25), une partie de L^1 est faiblement relativement compacte ssi elle est uniformément intégrable. La condition de l'énoncé est donc nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Soit $\underline{\underline{U}}$ un ultrafiltre sur H et, pour tout $T \in \mathcal{T}$, désignons par $Y(T)$ la valeur de la limite de l'ultrafiltre image par l'application continue $X \to X(T)$ de E dans L^1. On vérifie sans peine que la famille de v.a. $\mathbb{Y} = (Y(T))_{T \in \mathcal{T}}$ ainsi définie est une $\mathcal{T}$-surmartingale, et le théorème précédent permet d'agréger $\mathbb{Y}$ en une (unique) $\underline{\underline{A}}$-surmartingale Y, qui est alors la limite de l'ultrafiltre $\underline{\underline{U}}$.

REMARQUES. a) Réciproquement, il n'est pas difficile de déduire le théorème 15 de l'énoncé 16. C'est d'ailleurs la démarche adoptée par Mokobodzki qui démontre un énoncé analogue à 16 par d'autres moyens et obtient ainsi un énoncé analogue à 15 comme corollaire.

b) On peut aussi, après une étude de la continuité de la décomposition de Mertens, démontrer une extension du théorème de Helly aux $\underline{\underline{A}}$-surmartingales (inspiré également d'un résultat démontré par Mokobodzki [11] à l'aide d'un théorème profond d'analyse provenant de [1]) : si H est une partie relativement compacte de E et si X est un point adhérent de H, alors X est limite d'une suite (X^n) d'éléments de H (voir [12]).

17 COROLLAIRE. <u>Soit</u> $(\mathbf{X}^n)$ <u>une suite de</u> Θ-<u>surmartingales telle que les suites de v.a.</u> $(X^n(0))$ et $(X^n(\infty))$ <u>soient uniformément intégrables</u>. <u>Il existe alors une</u> $\underline{\underline{A}}$-<u>surmartingale</u> X <u>telle qu'on ait</u> $X_T = \lim_n X^n(T)$ <u>dans</u> L^1 <u>muni de la topologie faible</u> $\sigma(L^1,L^\infty)$ <u>pour tout</u> $T\varepsilon\Theta$ <u>tel que</u> $\lim_n X^n(T)$ <u>existe</u>.

DEMONSTRATION. Quitte à extraire une sous-suite de $(\mathbf{X}^n)$, on peut supposer que $\lim_n X^n(0)$ et $\lim_n X^n(\infty)$ existent. On vérifie alors aisément que l'ensemble $\Theta^\circ = \{T\varepsilon\Theta : \lim_n X^n(T) \text{ existe}\}$ est une chronologie et que, si X(T) désigne la limite de $(X^n(T))$ pour $T\varepsilon\Theta^\circ$, alors $\mathbf{X} = (X(T))_{T\varepsilon\Theta^\circ}$ est une Θ°-surmartingale ; il ne reste plus qu'à appliquer le théorème 15 à la chronologie Θ°.

§4. QUASIMARTINGALES ET DECOMPOSITION DE RAO

On désigne toujours par $\mathcal{T}$ la chronologie de tous les $\underline{\underline{A}}$-t.d'a. et par Θ une sous-chronologie contenant $+\infty$.

18 DEFINITION. a) <u>Un</u> Θ-<u>système</u> $\mathbf{X} = (X(T))_{T\varepsilon\Theta}$ <u>est une</u> Θ-quasimartingale <u>si</u> X(T) <u>est intégrable pour tout</u> $T\varepsilon\Theta$ <u>et si l'on a</u>

$$\mathrm{Var}_\Theta X = \sup_\sigma E\left(\textstyle\sum_i |E[X(T_{i+1}) - X(T_i) | \underline{\underline{F}}^a_{T_i}]|\right) < +\infty$$

<u>où</u> $\sigma = (T_1,\ldots,T_n)$ <u>est une suite finie croissante d'éléments de</u> Θ.

b) <u>Un processus</u> X <u>est une</u> $\underline{\underline{A}}$-quasimartingale jusqu'à l'infini <u>si</u> X <u>est</u> $\underline{\underline{A}}$-<u>mesurable et se désagrège en une</u> $\mathcal{T}$-<u>quasimartingale</u>.

Nous allons démontrer que toute Θ-quasimartingale peut être agrégée par une $\underline{\underline{A}}$-quasimartingale jusqu'à l'infini. Il y aura comme précédemment deux étapes intermédiaires : d'abord, le fait que toute Θ-quasimartingale est une $[\Theta]$-quasimartingale ; puis, l'analogue de la décomposition de Rao. On pourra alors conclure grâce au n°15.

Nous commençons par établir un lemme complétant le lemme 9 et précisant les rapports entre la chronologie Θ et celle $[\Theta]$ des $\underline{\underline{A}}$-t.d'a. Θ-étagés.

19 LEMME. a) L'espace vectoriel $\mathbb{G}_\Theta$ engendré par les processus de la forme $1_H 1_{]T,+\infty]}$ avec $T\in\Theta$ et $H\in\underline{\underline{F}}^a_T$ est l'ensemble des processus Y de la forme

$$Y = \sum_{1\leq i\leq n} y_i\, 1_{]T_i,T_{i+1}]}$$

avec $T_i\in\Theta$ et y_i v.a. étagée $\underline{\underline{F}}^a_{T_i}$-mesurable pour $i=1,\dots,n$, où l'on peut supposer que l'on a $T_1\leq\dots\leq T_n$.

b) On a $\mathbb{G}_\Theta = \mathbb{G}_{[\Theta]}$ et tout $Y\in\mathbb{G}_\Theta$ est de la forme

$$Y = \sum_{1\leq i\leq n} c_i\, 1_{]T_i,T_{i+1}]}$$

avec $T_i\in[\Theta]$, $c_i\in\mathbb{R}$ pour $i=1,\dots,n$ et $T_1\leq\dots\leq T_n$.

DEMONSTRATION. Le seul point non évident de a) est la possibilité de prendre $T_1\leq\dots\leq T_n$. Donnons nous un élément $Y=\sum_i y_i\, 1_{]T_i,T_{i+1}]}$ de $\mathbb{G}_\Theta$, où les T_i ne sont pas en ordre croissant ; réordonnons alors $T_1,\dots,T_n$ en $S_1,\dots,S_n$ grâce au lemme 9 : $]S_i,S_{i+1}[$ ne rencontre aucun des graphes $[T_j]$ et donc $t\to Y_t(\omega)$ est constante, pour tout ω, sur $]S_i(\omega),S_{i+1}(\omega)[$. Comme $Y_+ = \sum_i y_i\, 1_{[T_i,T_{i+1}[}$ est $\underline{\underline{A}}$-mesurable, on peut alors écrire $Y=\sum_i z_i\, 1_{]S_i,S_{i+1}]}$ où $z_i = Y_{S_i+}$ est $\underline{\underline{F}}^a_{S_i}$-mesurable.
Passons au point b). D'abord, on a $\mathbb{G}_\Theta = \mathbb{G}_{[\Theta]}$; en effet, comme $[\Theta]$ est stable par découpage, les générateurs de $\mathbb{G}_{[\Theta]}$ sont de la forme $1_{]T,\infty]}$ avec $T\in[\Theta]$ et, si $T_1,\dots,T_n$ avec $T_n=+\infty$ sont des éléments de Θ tels que le graphe de $T\in[\Theta]$ soit contenu dans la réunion des $[T_i]$, alors $1_{]T,+\infty]}$ est la somme des $1_{A_i}1_{]T_i,+\infty]}$ avec $A_i=\{T\leq T_i\}$. Il ne nous reste plus qu'à montrer que, si on a $Y=y\,1_{]S,T]}$ avec $S,T\in[\Theta]$ et y v.a. étagée $\underline{\underline{F}}^a_S$-mesurable, alors il existe $U_1,\dots,U_n\in[\Theta]$ tels que l'on ait $S=U_1\leq\dots\leq U_n=T$ et que X_{U_i} soit constante sur $\{U_i<U_{i+1}\}$ pour $i=1,\dots,n-1$. Soient $c_1,\dots,c_n$ les valeurs prises par x ; posons $U_1=S$ et, pour $i=1,\dots,n-1$,

$$U_{i+1} = U_i 1_{\{x\neq c_i\}} + T\,1_{\{x=c_i\}}$$

Il est clair que les U_i ont les propriétés requises.

Quelques préliminaires encore avant d'aborder l'étude des Θ-quasi-martingales : nous allons définir l'intégrale stochastique élémentaire par rapport à un Θ-système.

20 Soit $\mathbb{X}$ un Θ-système. Nous désignerons par $I_{\mathbb{X}}$ l'application linéaire de l'espace $\mathbb{G}_\Theta$ (défini au n°19) dans l'espace L^0 des v.a. finies définie comme suit : pour un générateur $1_H 1_{]T,+\infty]}$ de $\mathbb{G}_\Theta$, on pose

$$I_{\mathbb{X}}(1_H 1_{]T,+\infty]}) = 1_H\,(X(\infty)-X(T))$$

et on prolonge par linéarité (comme au §3, nous laissons au lecteur le soin de vérifier que $I_{\mathbb{X}}$ est bien définie). Lorsque $X(T)$ est intégrable pour tout $T\in\Theta$ (nous dirons pour abréger que $\mathbb{X}$ est alors intégrable), nous définissons sur $\mathbb{G}_\Theta$ une forme linéaire $J_{\mathbb{X}}$ par

$$J_{\mathbb{X}}(Y) = E[I_{\mathbb{X}}(Y)]$$

$\mathbb{X}$ est alors une Θ-surmartingale ssi $J_{\mathbb{X}}$ est négative (exercice !).

21 PROPOSITION. Soit $\mathbb{X}$ un Θ-système intégrable. L'espace $\mathbb{G}_\Theta$ étant muni de la norme uniforme, on a les égalités suivantes entre quantités finies ou infinies

$$\|J_{\mathbb{X}}\| = \mathrm{Var}_\Theta \mathbb{X} = \mathrm{Var}_{[\Theta]} \mathbb{X} = \sup_\sigma \sum_i |E[X(T_{i+1}) - X(T_i)]|$$

où σ parcourt les suites finies croissantes d'éléments de $[\Theta]$.

DEMONSTRATION. Ecrivons $Y \varepsilon \mathbb{G}_\Theta$ sous la forme $Y = \sum_i c_i 1_{]T_i,T_{i+1}]}$ avec $T_1 \leq \ldots \leq T_n \varepsilon [\Theta]$ et $c_1,\ldots,c_n \varepsilon \mathbb{R}$; on a $I_{\mathbb{X}}(Y) = \sum_i c_i (X(T_{i+1}) - X(T_i))$. Prenant $c_i = \mathrm{sgn}\, E[X(T_{i+1}) - X(T_i)]$, on obtient, après intégration, $\|J_{\mathbb{X}}\| \geq \sum_i |E[X(T_{i+1}) - X(T_i)]|$; on a d'autre part en général

$$|J_{\mathbb{X}}(Y)| \leq (\sup_i |c_i|)(\sum_i |E[X(T_{i+1}) - X(T_i)]|),$$

d'où finalement l'égalité des quantités extrêmes de l'énoncé. Ecrivons maintenant $Y \varepsilon \mathbb{G}_\Theta$ sous la forme $Y = \sum_i y_i 1_{]T_i,T_{i+1}]}$ avec y_i v.a. $\underline{\underline{F}}^a_{T_i}$-mesurable étagée et $T_1 \leq \ldots \leq T_n \varepsilon [\Theta]$; on vérifie sans peine que l'on a $I_{\mathbb{X}}(Y) = \sum_i y_i (X(T_{i+1}) - X(T_i))$. D'où l'on déduit $\mathrm{Var}_{[\Theta]} \leq \|J_{\mathbb{X}}\|$ en prenant $y_i = \mathrm{sgn}\, E[X(T_{i+1}) - X(T_i)|\underline{\underline{F}}^a_{T_i}]$ et en intégrant ; d'autre part, on a évidemment $\mathrm{Var}_\Theta \mathbb{X} \leq \mathrm{Var}_{[\Theta]}\mathbb{X}$. Ecrivons enfin $Y \varepsilon \mathbb{G}_\Theta$ sous la forme $Y = \sum_i y_i 1_{]T_i,T_{i+1}]}$ comme précédemment, mais avec les $T_i \varepsilon \Theta$; on a alors le petit calcul classique

$$J_{\mathbb{X}}(Y) = E(\sum_i y_i (X(T_{i+1}) - X(T_i))) = E(\sum_i y_i E[X(T_{i+1}) - X(T_i)|\underline{\underline{F}}^a_{T_i}])$$
$$\leq \|Y\|_\infty E(\sum_i |E[X(T_{i+1}) - X(T_i)|\underline{\underline{F}}^a_{T_i}]|) \leq \|Y\|_\infty \mathrm{Var}_\Theta \mathbb{X}$$

d'où finalement on a $\mathrm{Var}_\Theta \mathbb{X} = \mathrm{Var}_{[\Theta]} \mathbb{X} = \|J_{\mathbb{X}}\|$.

22 COROLLAIRE. Soit $\mathbb{X}$ un Θ-système intégrable. Les assertions suivantes sont équivalentes

a) $\mathbb{X}$ est une Θ-quasimartingale

b) $\mathbb{X}$ est une $[\Theta]$-quasimartingale

c) $J_{\mathbb{X}}$ est une forme linéaire continue sur $\mathbb{G}_\Theta = \mathbb{G}_{[\Theta]}$ muni de la norme uniforme.

Nous montrons maintenant que toute Θ-quasimartingale admet une décomposition de Rao. La démonstration est en fait un aménagement de celle de [5] pour les quasimartingales càdlàg sous les conditions habituelles.

23 PROPOSITION. Toute Θ-quasimartingale est la différence de deux Θ-surmartingales.

DEMONSTRATION. D'après ce qui précède, on peut supposer Θ stable par découpage, quitte à remplacer Θ par $[\Theta]$. Soit alors $\mathbb{X}$ une Θ-quasimartingale ; quitte à retrancher de $\mathbb{X}$ la Θ-martingale constituée des v.a. $E[X(\infty)|\underline{\underline{F}}^a_T]$, $T \varepsilon \Theta$, on peut supposer que l'on a $X(\infty) = 0$. Fixons $T \varepsilon \Theta$; nous désignons par $s(T)$ l'ensemble des Θ-subdivisions finies de $[T,+\infty]$, i.e. l'ensemble des suites finies $\sigma = \{T_1,\ldots,T_n\}$ d'éléments de Θ telles que $T = T_1 \leq \ldots \leq T_n = +\infty$; pour $\sigma = \{T_1,\ldots,T_n\}$ nous posons

$$[\sigma]^+ = \{Y\varepsilon\mathbb{G}_\Theta \;:\; Y = \sum_i 1_{A_i} 1_{]\!]T_i,T_{i+1}]\!]} \text{ avec } A_i \varepsilon \underline{\underline{F}}^a_{T_i}\}$$
$$[\sigma]^- = \{Y : -Y\varepsilon[\sigma]^+\}$$

Pour $\sigma_1, \sigma_2 \,\varepsilon\, s(T)$, nous dirons que σ_2 <u>raffine</u> σ_1 si la réunion des graphes des éléments de σ_1 est contenue dans celle des graphes des éléments de σ_2 ; pour tout $\sigma_1, \sigma_2 \,\varepsilon\, s(T)$, il est facile de trouver, à l'aide du lemme 9, un élément σ_3 de $s(T)$ raffinant σ_1 et σ_2 à la fois. Enfin nous posons, pour $\sigma = \{T_1,\dots,T_n\} \,\varepsilon\, s(T)$,

$${}^+X(\sigma,T) = E[\sum_i E[X(T_{i+1}) - X(T_i) | \underline{\underline{F}}^a_{T_i}]^+ \mid \underline{\underline{F}}^a_T].$$

Si σ_2 raffine σ_1, alors on a

$${}^+X(\sigma_1,T) \leq {}^+X(\sigma_2,T)$$

car, d'une part, $[\sigma_1]^+$ est inclus dans $[\sigma_2]^+$ et, d'autre part, on a

$${}^+X(\sigma,T) = \text{ess sup}_{Y\varepsilon[\sigma]^+} E[I_{\mathbf{X}}(Y) | \underline{\underline{F}}^a_T]$$

En effet, si on a $\sigma = \{T_1,\dots,T_n\}$ et $Y = \sum_i 1_{A_i} 1_{]\!]T_i,T_{i+1}]\!]}$, alors

$$\begin{aligned} E[I_{\mathbf{X}}(Y)|\underline{\underline{F}}^a_T] &= E[\sum_i 1_{A_i} E[X(T_{i+1}) - X(T_i)|\underline{\underline{F}}^a_{T_i}] \mid \underline{\underline{F}}^a_T] \\ &\leq E[\sum_i 1_{A_i} E[X(T_{i+1}) - X(T_i)|\underline{\underline{F}}^a_{T_i}]^+ \mid \underline{\underline{F}}^a_T] \\ &\leq {}^+X(\sigma,T) \end{aligned}$$

et on obtient l'égalité en prenant $A_i = \{E[X(T_{i+1}) - X(T_i)|\underline{\underline{F}}^a_{T_i}] \geq 0\}$. Par conséquent, la famille $({}^+X(\sigma,T))_{\sigma\varepsilon s(T)}$ est filtrante croissante Posons alors

$${}^+X(T) = \text{ess sup}_{\sigma\varepsilon s(T)} {}^+X(\sigma,T) \;;$$

comme ${}^+X(T)$ est une v.a. ≥ 0 et que $E[{}^+X(T)]$ est majoré par $\mathrm{Var}_\Theta\mathbf{X}$ et donc fini, on a ${}^+X(T) = \lim_\sigma {}^+X(\sigma,T)$ dans L^1 (fort). Faisons maintenant varier $T\varepsilon\Theta$ et montrons que ${}^+\mathbf{X} = ({}^+X(T))_{T\varepsilon\Theta}$ est une Θ-surmartingale. L'adaptation est évidente ; pour la compatibilité, comme on a $X(\infty) = 0 = {}^+X(\infty)$ et que Θ est stable par découpage, il nous suffit de vérifier que l'on a ${}^+X(T_H) = 1_H {}^+X(T)$ pour tout $T\varepsilon\Theta$ et tout $H\varepsilon\underline{\underline{F}}^a_T$. On a

$${}^+X(T_H) = \text{ess sup}_{\sigma\varepsilon s(T_H), Y\varepsilon[\sigma]^+} E[I_{\mathbf{X}}(Y)|\underline{\underline{F}}^a_{T_H}]$$

et, avec des notations évidentes,

$$\sigma\varepsilon s(T_H) \iff \exists\sigma'\varepsilon s(T)\; \sigma = \sigma'_H$$

d'où

$${}^+X(T_H) = \text{ess sup}_{\sigma\varepsilon s(T), Y\varepsilon[\sigma]^+} 1_H E[I_{\mathbf{X}}(Y)|\underline{\underline{F}}^a_T] = 1_H {}^+X(T)$$

Vérifions enfin l'inégalité des surmartingales. Soient $S,T \,\varepsilon\, \Theta$ avec $S \leq T$; si $\sigma = \{T_1,\dots,T_n\}$ appartient à $s(T)$, alors $\sigma' = \{S,T_1,\dots,T_n\}$ appartient à $s(S)$ et $[\sigma]^+$ est inclus dans $[\sigma']^+$. On a donc

$${}^+X(\sigma',S) \geq E[{}^+X(\sigma,T)|\underline{\underline{F}}^a_S]$$

d'où l'on déduit l'inégalité voulue, soit ${}^+X(S) \geq E[{}^+X(T)|\underline{\underline{F}}^a_S]$, car les familles $(X(\sigma,T))_{\sigma\varepsilon s(T)}$ et $(X(\sigma',S))_{\sigma'\varepsilon s(S)}$ sont filtrantes croissantes. Par ailleurs, on définit, de manière analogue,

$${}^-X(T) = \text{ess sup}_{\sigma\varepsilon s(T), Y\varepsilon[\sigma]^-} E[I_{\mathbf{X}}(Y)|\underline{\underline{F}}^a_T]$$

pour tout $T\varepsilon\Theta$, et donc une nouvelle Θ-surmartingale ${}^-\mathbf{X} = ({}^-X(T))_{T\varepsilon\Theta}$. Pour terminer la démonstration, il ne reste plus qu'à remarquer qu'on a $^+X(\sigma,T) - {}^-X(\sigma,T) = X(T)$ pour tout $T\in\Theta$ et tout $\sigma\in s(T)$ si bien que $\mathbf{X} = {}^+\mathbf{X} - {}^-\mathbf{X}$.

REMARQUE. Nous avons en fait démontré mieux que l'énoncé : toute Θ-quasimartingale $\mathbf{X}$ s'écrit $\mathbf{X} = {}^+\mathbf{X} - {}^-\mathbf{X}$ où ${}^+\mathbf{X}$, ${}^-\mathbf{X}$ sont deux Θ-surmartingales positives telles que $\mathrm{Var}_\Theta\, \mathbf{X} = E[{}^+X(0) + {}^-X(0)]$. Il y a unicité d'une telle décomposition.

Le résultat d'interpolation que nous avions en vue est maintenant conséquence immédiate des n°23 et 15, et nous avons de surcroit établi le maillon manquant du théorème 5 du §V de [7]

24 THEOREME. <u>Toute Θ-quasimartingale $\mathbf{X}$ peut être agrégée par une $\underline{\underline{A}}$-quasimartingale jusqu'à l'infini</u> X (<u>avec</u> $\mathrm{Var}_\Theta \mathbf{X} = \mathrm{Var}\, X$). <u>De plus, toute $\underline{\underline{A}}$-quasimartingale jusqu'à l'infini est la différence de deux $\underline{\underline{A}}$-surmartingales jusqu'à l'infini</u>.

Nous ne chercherons pas à étudier la convergence de suites de quasimartingales ; le lecteur intéressé pourra se reporter [12].

§5. SEMIMARTINGALES ET INTEGRALE STOCHASTIQUE ELEMENTAIRE

Il est possible, ici encore, de donner des définitions "parallèles" des notions de Θ-semimartingale et de $\underline{\underline{A}}$-semimartingale. Nous avons cependant trouvé plus naturel de définir cette dernière en suivant la "tradition" (décomposition en une martingale locale et processus à variation finie) et de définir la première par une propriété de continuité de l'intégrale stochastique élémentaire. Notre théorème d'interpolation incluera alors la caractérisation "à la Bichteler-Dellacherie-Mokobodzki" (cf [5]) des $\underline{\underline{A}}$-semimartingales - cela, sans s'être placé sous les conditions habituelles, et en ne se bornant pas à l'étude des semimartingales càdlàg.

25 Un processus M est une <u>$\underline{\underline{A}}$-martingale locale jusqu'à l'infini</u> s'il est $\underline{\underline{A}}$-mesurable et s'il existe une suite croissante (T_n) de $\underline{\underline{A}}$-t.d'a. telle que, pour tout $\omega\in\Omega$, on ait $T_n(\omega) = +\infty$ pour n grand, et que les processus arrêtés M^{T_n} soient des $\underline{\underline{A}}$-martingales jusqu'à l'infini (nous supposons donc, pour simplifier, que M_0 est une v.a. intégrable). Un processus X est une <u>$\underline{\underline{A}}$-semimartingale jusqu'à l'infini</u> s'il est $\underline{\underline{A}}$-mesurable et s'il peut s'écrire $X = M + V$ où M est une $\underline{\underline{A}}$-martingale locale jusqu'à l'infini et V est un processus à variation finie jusqu'à l'infini (i.e. presque toutes les trajectoires de V ont une variation finie sur $[0,+\infty]$; ces trajectoires sont alors làdlàg, mais pas nécessairement càdlàg).

Nous reprenons dans la définition suivante les notations introduites aux n°19 et 20

26 DEFINITION. Un Θ-système $\mathbb{X}$ est une Θ-semimartingale si l'application linéaire $I_{\mathbb{X}}$ de $\mathbb{G}_\Theta$ dans L^0 est continue quand $\mathbb{G}_\Theta$ est muni de la norme uniforme et L^0 de la topologie de la convergence en probabilité.

REMARQUES. a) Comme $\mathbb{G}_\Theta$ est égal à $\mathbb{G}_{[\Theta]}$, toute Θ-semimartingale est encore évidemment une $[\Theta]$-semimartingale.

b) On vérifie sans peine que, si $\mathbb{X}$ est une Θ-semimartingale, alors $I_{\mathbb{X}}$ est encore continue lorsque $\mathbb{G}_\Theta$ est muni de la topologie de la "convergence uniforme en probabilité" (une suite (Y^n) converge vers 0 pour cette topologie si les v.a. $\sup_t |Y^n_t|$ convergent vers 0 en probabilité).

27 THEOREME. Soit $\mathbb{X}$ un Θ-système. Les assertions suivantes sont équivalentes

a) $\mathbb{X}$ est une Θ-semimartingale

b) Il existe une probabilité Q équivalente à P (à densité bornée si on le désire) telle que $\mathbb{X}$ soit une Θ-quasimartingale relativement à Q.

c) $\mathbb{X}$ peut être agrégé par une $\underline{\underline{A}}$-semimartingale jusqu'à l'infini.

DEMONSTRATION. Le théorème 5 du §V de [7] affirme (lorsqu'on se limite à considérer des processus définis jusqu'à l'infini) que les assertions suivantes, relatives à un processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable X, sont équivalentes

1) L'application I_X de $\mathbb{G}_\tau$ dans L^0 est continue (les notations adoptées dans [7] sont différentes de celles utilisées ici)

2) Il existe une probabilité Q équivalente à P (à densité bornée si on le désire) telle que X soit une $\underline{\underline{A}}$-quasimartingale jusqu'à l'infini relativement à Q

3) Il existe une probabilité Q équivalente à P (à densité bornée si on le désire) telle que X soit la différence de deux $\underline{\underline{A}}$-surmartingales jusqu'à l'infini relativement à Q

4) Le processus X est une $\underline{\underline{A}}$-semimartingale.

Les implications 1)$\Rightarrow$2) et 3)$\Rightarrow$4)$\Rightarrow$1) sont établies dans [7] ; pour 2)$\Rightarrow$3), le lecteur est renvoyé dans [7] à l'article présent, et en effet nous avons établi cela au n°24. Ceci dit, on voit que c)$\Rightarrow$a) résulte de 4)$\Rightarrow$1) et que b)$\Rightarrow$c) résulte de 2)$\Rightarrow$3)$\Rightarrow$4) et du n°24. Il nous reste donc à établir a)$\Rightarrow$b) ; comme cela se fait de manière analogue à l'établissement de 1)$\Rightarrow$2) , nous ne donnerons que les grandes lignes de cette dernière étape.

Le lemme suivant, qui généralise le lemme 3 du §V de [7] (repris en partie dans [5] pour le même usage), est très utile pour étudier la majoration d'un processus (même càdlàg)

28 LEMME. <u>Soit</u> $\mathbb{X}$ <u>un</u> Θ-<u>système borné dans</u> L^0 : <u>pour tout</u> $\varepsilon>0$, <u>il existe</u> $c_\varepsilon>0$ <u>tel qu'on ait</u> $P\{|X(T)|>c_\varepsilon\}\leq\varepsilon$ <u>pour tout</u> $T\in\Theta$. <u>Alors la v.a.</u> ess $\sup_{T\in\Theta}|X(T)|$ <u>est p.s. finie</u> ; <u>plus précisément, pour tout</u> $\varepsilon>0$, <u>on a</u> $P\{\text{ess}\sup_{T\in\Theta}|X(T)|>c_\varepsilon\}\leq\varepsilon$ <u>où</u> c_ε <u>est la</u> même <u>constante que plus haut</u>.

DEMONSTRATION. Nous fixons $\varepsilon>0$ et la constante c_ε associée. Comme l'ess sup est atteint sur une partie dénombrable de Θ, il nous suffit de montrer que, pour toute suite finie $T_1,\dots,T_n\in\Theta$, on a

$$P\{|X(T_1)| \text{ ou } \dots \text{ ou } |X(T_n)|>c_\varepsilon\}\leq\varepsilon$$

Posons, pour $i=1,\dots,n$, $S_i=T_i$ sur $\{|X(T_i)|>c_\varepsilon\}$ et $S_i=+\infty$ ailleurs, puis $S=\inf_i S_i$; comme Θ est stable par découpage, on a $S\in\Theta$ et donc $P\{|X(S)|>c_\varepsilon\}\leq\varepsilon$. D'autre part, on a évidemment, pour presque tout ω, $|X(S)|(\omega)>c_\varepsilon$ ssi il existe i tel que l'on ait $|X(T_i)|(\omega)>c_\varepsilon$, d'où la conclusion.

RETOUR A LA DEMONSTRATION DE 27. Nous établissons a)$\Rightarrow$b). Si $I_{\mathbb{X}}$ est continue, l'image de la boule unité de $\mathbb{G}_\Theta$ par $I_{\mathbb{X}}$ est bornée dans L^0. Comme, pour $T\in\Theta$, on a $X(T)=X(0)+I_{\mathbb{X}}(1_{]0,T]})$, on en déduit en particulier, grâce au lemme précédent, que la v.a. égale à ess $\sup_{T\in\Theta}|X(T)|$ est p.s. finie. Donc, quitte à remplacer P par une probabilité équivalente à densité bornée, on peut supposer que cette v.a. est intégrable ; alors $\mathbb{X}$ est un Θ-système intégrable. Dans ces conditions, l'image H de la boule unité de $\mathbb{G}_\Theta$ par $I_{\mathbb{X}}$ est un convexe borné de L^0 contenu dans L^1. On sait alors, grâce à un théorème de Mokobodzki (cf [8] , [5]), ou encore, grâce à un théorème récent de Yan (cf [13]) , qu'il existe une loi Q équivalente à P, à densité bornée, telle que $\sup_{Z\in H}|E_Q(Z)|<+\infty$. Or cela signifie que la forme linéaire $J^Q_{\mathbb{X}}$ définie sur $\mathbb{G}_\Theta$ comme au n°20 par $J^Q_{\mathbb{X}}(Y)=E_Q[I_{\mathbb{X}}(Y)]$ est continue, et donc que $\mathbb{X}$ est une Θ-quasimartingale relativement à Q d'après le n°22.

REMARQUE. Rappelons que, pour $\Theta=\mathbb{T}_+$, un Θ-système n'est autre qu'un processus adapté à la filtration $(\underline{\underline{F}}^a_t)$ (un processus adapté à notre grosse filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$ si on prend $\underline{\underline{A}}=\underline{\underline{O}}$). En particulier, le théorème précédent fournit, pour tout processus adapté à $(\underline{\underline{F}}^a_t)$ définissant une "bonne" intégrale stochastique élémentaire, une régularisation de ce processus en une $\underline{\underline{A}}$-semimartingale (jusqu'à l'infini).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURGAIN (J.), FREMLIN (D.H.), TALAGRAND (M.) : Pointwise compact sets of Baire-measurable functions (Amer. J. of Math. 100, 1978, p. 845-886)

[2] DELLACHERIE (C.) : Deux remarques sur la séparabilité optionnelle (Sém. de Proba. XI, Lect. Notes in Math. n°581, p. 47-50, Springer, Heidelberg 1977)

[3] DELLACHERIE (C.), LENGLART (E.) : Sur des problèmes de régularisation, de recollement et d'interpolation en théorie générale des processus (A paraitre dans Sém. de Proba. XVI)

[4] DELLACHERIE (C.), MEYER (P.A.) : Probabilités et potentiel. Chapitres I à IV (Hermann, Paris 1975)

[5] : Probabilités et potentiel. Chapitres V à VIII (Hermann, Paris 1980)

[6] LE JAN (Y.) : Temps d'arrêt stricts et martingales de sauts (Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 44, 1978, p. 213-225)

[7] LENGLART (E.) : Tribus de Meyer et théorie des processus (Sém. de Proba. XIV, Lect. Notes in Math. n°784, p. 500-546, Springer, Heidelberg 1980)

[8] MEYER (P.A.) : Un cours sur les intégrales stochastiques. Chapitre VI (Sém. de Proba. X, Lect. Notes in Math n°511, p. 354-400, Springer, Heidelberg 1970)

[9] : Convergence faible de processus, d'après Mokobodzki (Sém. de Proba. XI, Lect. Notes in Math. n°581, p. 109-119, Springer, Heidelberg 1977)

[10] : Caractérisation des semimartingales, d'après Dellacherie (Sém. de Proba. XIII, Lect. Notes in Math. n°721, p. 620-623, Springer, Heidelberg 1979)

[11] MOKOBODZKI (G.) : Ensembles compacts de fonctions fortement surmédianes (Sém. de théorie du potentiel n°4, Lect. Notes in Math. n°713, p. 178-193, Springer, Heidelberg 1979)

[12] UPPMAN (A.) : L'analogue du théorème de Helly en théorie des martingales (A paraitre dans Sém. de Proba. XVI)

[13] YAN (J.A.) : Caractérisation d'une classe d'ensembles convexes de L^1 ou H^1 (Sém. de Proba. XIV, Lect. Notes in Math. n°784, p. 220-222, Springer, Heidelberg 1980)