CHING SUNG CHOU

Une inégalité de martingales avec poids

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 285-289
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__285_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1979/80

UNE INEGALITE DE MARTINGALES AVEC POIDS

par C.S. CHOU

Nous travaillons sur un espace probabilisé complet $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ muni d'une filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$ satisfaisant aux conditions habituelles.

Désignons par Φ une fonction sur $\mathbb{R}_+$, continue à droite, nulle en 0, croissante, convexe et modérée, c'est à dire telle que l'on ait $\Phi(2x)\leq\alpha\Phi(x)$ pour tout $x>0$, où α est une constante finie.

Pour toute martingale locale M, posons

$$(1)\qquad S(M)_t = M_t^* \vee [M,M]_t^{1/2} \qquad I(M)_t = M_t^* \wedge [M,M]_t^{1/2}$$

Chevalier a établi récemment que, pour tout $p\geq 1$, on a $E[S(M)^p]\leq c_p E[I(M)^p]$ (voir [1]). Lenglart, Lepingle et Pratelli ont étendu ce résultat aux fonctions modérées Φ au lieu de la fonction x^p (voir [2]). Nous nous proposons ici de donner de ce résultat une version faisant intervenir un <u>poids</u> Z, en utilisant les résultats de Bonami et Lepingle [3].

Rappelons ce dont il s'agit : soit Z une variable aléatoire strictement positive d'intégrale égale à 1 (un <u>poids</u>) ; on note $\hat{P}$ la loi ZP, et Z_t la martingale $E[Z|\underline{\underline{F}}_t]$, dont on prend une version càdlàg.. Alors $1/Z = \hat{Z}$ est un poids pour la loi $\hat{P}$, on a $\hat{\hat{P}}=\hat{Z}\hat{P}=P$, et la martingale correspondante est $\hat{E}[\hat{Z}|\underline{\underline{F}}_t]=1/Z_t$; il y a donc symétrie complète entre P et $\hat{P}$.

On dit que le poids Z <u>satisfait à la condition</u> (A_p), où $p>1$, s'il existe une constante c_p telle que l'on ait p.s., pour tout $t>0$

$$Z_t(E[\, Z^{-1/p-1}|\underline{\underline{F}}_t])^{p-1} \leq c_p$$

en permutant les rôles de P et $\hat{P}$, nous dirons que Z <u>satisfait à la condition</u> $(\hat{A}_p)$ si l'on a

$$\frac{1}{Z_t}(\hat{E}[Z^{1/p-1}|\underline{\underline{F}}_t])^{p-1} \leq c_p$$

autrement dit, si $\hat{Z}$ satisfait à (A_p).

Dans tout le travail, c désigne un nombre (pouvant dépendre de p, Φ... mais non des processus considérés), dont la valeur ne nous intéresse pas, et qui peut varier de place en place.

INEGALITES POUR LE CAS PREVISIBLEMENT BORNE

Dans toute cette section, on suppose que <u>le poids</u> Z <u>satisfait à</u> $(\hat{A}_p)$, et que M est une martingale locale <u>à sauts prévisiblement bornés par</u> D. Cela signifie que D est un processus croissant adapté, continu à droite, et que l'on a pour tout t $|\Delta M_t|\leq D_{t-}$ (pour t=0, cela se lit $|M_0|\leq D_0$: la v.a. D_0 n'est donc pas supposée nulle) .

Recopions d'abord la proposition 1 de Bonami-Lepingle [3], p. 299.

LEMME 1. <u>Sous les hypothèses précédentes, on a si</u> $\lambda>0$, $0<\delta<\beta-1$

$$\hat{P}\{[M,M]_\infty^{1/2}>\beta\lambda \ , \ M_\infty^* \vee D_\infty<\delta\lambda\} \leqq c(\frac{\delta^2}{\beta^2-\delta^2-1})^{1/p}\ \hat{P}\{[M,M]_\infty^{1/2}>\lambda\}$$

$$\hat{P}\{M_\infty^*>\beta\lambda,\ [M,M]_\infty^{1/2}\vee D_\infty<\delta\lambda\}\leqq c(\frac{\delta}{\beta-\delta-1})^{1/p}\ \hat{P}\{M_\infty^*>\lambda\}$$

Recopions aussi le lemme 7.1 de Burkholder [4], sous la forme que lui a donnée Lepingle :

LEMME 2. <u>Soient</u> X <u>et</u> Y <u>deux v.a. positives, et soit un</u> $\beta>1$ <u>fixé. Si l'on a pour tout</u> δ , $0<\delta<\beta-1$ <u>et tout</u> $\lambda>0$

$$P\{X>\beta\lambda\ ,\ Y<\delta\lambda\ \}\leqq \varepsilon(\beta,\delta)P\{X\geqq\lambda\}$$

<u>avec</u> $\lim_{\delta>0}\varepsilon(\beta,\delta)=0$, <u>on a pour toute fonction</u> Φ <u>modérée</u> (<u>non nécessairement convexe</u>)

$$E[\Phi(X)]\leqq cE[\Phi(Y)]$$

Appliquant ce lemme à la situation précédente, nous obtenons le corollaire suivant :

COROLLAIRE 3. <u>On a</u>

$$\hat{E}[\Phi([M,M]_\infty^{1/2})]\leqq c\hat{E}[\ \Phi(M^*)\ +\ \Phi(D_\infty)]$$

$$\hat{E}[\Phi(M^*)]\leqq c\hat{E}[\ \Phi([M,M]_\infty^{1/2})\ +\ \Phi(D_\infty)]$$

Ces résultats constituent notre point de départ. Nous en déduisons une nouvelle inégalité de distribution.

LEMME 4. <u>Avec les mêmes notations que dans le lemme 1, on a</u>

$$\hat{P}\{\ S(M)_\infty>\beta\lambda\ ,\ I(M)_\infty+D_\infty<\delta\lambda\ \}\leqq\frac{c\delta^2}{(\delta-1)^2}\hat{P}\{S(M)_\infty\geqq\lambda\}\ .$$

DEMONSTRATION. Nous partons de la première inégalité du corollaire 3, avec $\Phi(x)=x$, que nous appliquons à la martingale locale

$$N_t=M_{T+t}-M_{T-}\quad \text{par rapport à la famille } (\underline{\underline{F}}_{T+t})$$

Cette martingale locale satisfait à

$$N_\infty^*\leqq 2M^*\ ,\ |\Delta N_t|\leqq D_{T+t-}\quad ,\ [N,N]_\infty=[M,M]_\infty-[M,M]_{T-}$$

On a donc

$$\hat{E}[\ [M,M]_\infty^{1/2}-[M,M]_{T-}^{1/2}]\leqq\hat{E}[[N,N]_\infty^{1/2}]\leqq(2)c\hat{E}[M^*+D_\infty\ ]$$

Nous omettons le facteur 2. Remplaçant T par T_A ($A\in\underline{\underline{F}}_T$), on a

$$\hat{E}[[M,M]_\infty^{1/2}-[M,M]_{T-}^{1/2}|\underline{\underline{F}}_T]\leqq c\hat{E}[M^*+D_\infty|\underline{\underline{F}}_T]$$

et par conséquent, en intégrant par rapport au processus croissant $[M,M]_t^{1/2}$

$$\hat{E}[\ \int_{0-}^{\infty}([M,M]_\infty^{1/2}-[M,M]_{t-}^{1/2})d[M,M]_t^{1/2}]\leqq c\hat{E}[(M^*+D_\infty)[M,M]_\infty^{1/2}]$$

On sait que $A_\infty^2\leqq\int_{0-}^{\infty}2(A_\infty-A_{t-})dA_t$ pour tout processus croissant (A_t).

Négligeant le facteur 2, et prenant $A_t=[M,M]_t^{1/2}$

$$\hat{E}[[M,M]_\infty] \leqq c\hat{E}[(M^*+D_\infty)[M,M]_\infty^{1/2}]$$

d'où sans peine

$$\hat{E}[([M,M]_\infty^{1/2}+D_\infty)^2] \leqq c\hat{E}[(M^*+D_\infty)([M,M]_\infty^{1/2}+D_\infty)]$$

Dans l'autre sens, prenons la seconde inégalité du corollaire 3 avec $\Phi(x)=x^2$

$$\hat{E}[M^*] \leqq c\hat{E}[[M,M]_\infty + D_\infty^2]$$

d'où sans peine

$$\hat{E}[(M^*+D_\infty)^2] \leqq c\hat{E}[([M,M]_\infty^{1/2}+D_\infty)^2]$$

Nous avons rejoint de manière directe l'article de Lenglart-Lépingle-Pratelli, Sém. XIV, p.39, ligne 8, et nous pouvons en déduire comme eux l'inégalité

(2) $$\hat{E}[S(M)_\infty^2] \leqq c\hat{E}[(I(M)_\infty+D_\infty)^2]$$

- sans aucune restriction d'intégrabilité sur M, puisque celle-ci a des sauts prévisiblement bornés : on peut se ramener par arrêt au cas où M est bornée. Soit T un temps d'arrêt ; N_t étant définie comme **plus haut**, nous avons

$$S(M)_\infty \leqq S(M)_{T-}+S(N)_\infty \quad ,$$

$$N_\infty^* \leqq 2M_\infty^* \; , \; [N,N]_\infty^{1/2} \leqq [M,M]_\infty^{1/2} \; , \text{ donc } I(N)_\infty \leqq 2I(M)_\infty I_{\{T<\infty\}}$$

et enfin

$$\hat{E}[(S(M)_\infty - S(M)_{T-})^2] \leqq c\hat{E}[(I(M)_\infty+D_\infty)^2 I_{\{T<\infty\}}]$$

d'après l'inégalité (2) appliquée à N . Remplaçant T par T_A , $A\in\underline{\underline{F}}_T$, on a

(3) $$\hat{E}[(S(M)_\infty - S(M)_{T-})^2|\underline{\underline{F}}_T] \leqq c\hat{E}[(I(M)_\infty+D_\infty)^2|\underline{\underline{F}}_T]$$

Pour obtenir l'inégalité de l'énoncé, on procède un peu autrement. On pose $T = \inf\{ t : S(M)_t \geqq \lambda \}$, $U = \inf\{t : I(M)_t+D_t \geqq \delta\lambda \}$, et on applique (3) à la martingale locale M^U et au processus croissant D^{U-}. On a donc

$$\begin{aligned}\hat{E}[(S(M)_U-S(M)_{T-})^2 I_{\{T<U\}}] &\leqq c\hat{E}[(I(M)_U+D_{U-})^2 I_{\{T<U\}}] \\ &\leqq c\hat{E}[(I(M)_{U-}+D_{U-})^2 I_{\{T<U\}}] \\ &\leqq \delta^2\lambda^2\hat{P}\{T<U\}\end{aligned}$$

D'autre part, sur l'ensemble $\{S(M)_\infty \geqq \beta\lambda, \; I(M)_\infty + D_\infty < \delta\lambda\}$, on a $U=+\infty$, donc $S(M)_U \geqq \beta\lambda$, et $S(M)_{T-} \leqq \lambda$, donc le côté gauche de l'inégalité majore $(\beta-1)^2\lambda^2\hat{P}\{S(M)_\infty \geqq \beta\lambda \; , \; I(M)_\infty+D_\infty \leqq \lambda\}$. Le lemme est établi.

Appliquant alors le lemme 2, nous obtenons

THEOREME 1. <u>Sous les hypothèses de ce paragraphe</u>, <u>on a pour toute fonction</u> Φ <u>modérée</u> (<u>non nécessairement convexe</u>)

(4) $$\hat{E}[\Phi(S(M)_\infty)] \leqq c\hat{E}[\Phi(I(M)_\infty + D_\infty)]$$

INEGALITES POUR LE CAS GENERAL

Nous allons maintenant lever l'hypothèse sur M : nous ne la supposons plus à sauts prévisiblement bornés. En revanche, nous renforçons l'hypothèse sur le poids Z en supposant non seulement la condition $(\hat{A}_p)$, mais l'existence d'une constante k telle que

$$Z_{t-}/Z_t \leqq k \ . \tag{5}$$

Nous avons alors :

THEOREME 2. Sous les hypothèses précédentes, on a pour toute fonction Φ convexe modérée

$$\hat{E}[\Phi(S(M)_\infty)] \leqq c\hat{E}[\Phi(I(M)_\infty)] \tag{6}$$

DEMONSTRATION. Rappelons brièvement la décomposition de Davis dans le cas continu ([5]). On pose

$$H_t = \sup_{s\leqq t} |\Delta M_s| \quad , \ K_t = \Sigma_{u\leqq t} I_{\{|\Delta M_u|\geqq 2H_{u-}\}}\Delta M_u$$

Alors K est à variation localement intégrable, admet un compensateur prévisible $\tilde{K}$ et un compensé $K^c=K-\tilde{K}$. La décomposition de Davis de M est

$$M = K^c + L \quad \text{où } L=M-K^c$$

La martingale locale L est à sauts prévisiblement bornés : on montre que $|\Delta L_t| \leqq 4H_{t-}$. On a d'autre part

$$\int_0^\infty |dK_s| \leqq 2H_\infty$$

D'autre part, $[K^c,K^c]_t^{1/2} \vee (K_c)_t^* \leqq \int_0^t |dK_s^c|$. D'après la proposition 2 de Bonami et Lepingle [3], p.300, on a

$$\hat{E}[\Phi(\int_0^\infty |dK_s^c|)] \leqq c\hat{E}[\Phi(\int_0^\infty |dK_s|)] \leqq c\hat{E}[\Phi(H_\infty)] \tag{7}$$

D'autre part, on a $|\Delta_t M| \leqq [M,M]_\infty^{1/2}$, $|\Delta_t M|\leqq 2M^*$, donc $|\Delta_t M|\leqq 2I(M)_\infty$, et finalement $H_\infty \leqq 2I(M)_\infty$, d'où finalement

$$\hat{E}[\Phi(S(K^c)_\infty)] \leqq c\hat{E}[\Phi(I(M)_\infty)]$$

Il reste à montrer l'inégalité analogue pour $S(L)_\infty$. Or nous avons d'après le théorème 1, les sauts de L étant prévisiblement bornés par H_-

$$\hat{E}[\Phi(S(L)_\infty)] \leqq c\hat{E}[\Phi(I(L)_\infty + H_\infty)]$$

et il ne reste plus qu'à remarquer $I(L) \leqq I(M)+I(K^c) \leqq I(M) + \int|dK_s^c|$, après quoi l'inégalité (7) de Bonami-Lepingle donne à nouveau le résultat.

REFERENCES

[1]. L. CHEVALIER. Un nouveau type d'inégalités pour les martingales discrètes. Z.W. 49, 1979, p.249-256.

[2]. E. LENGLART, D. LEPINGLE, M. PRATELLI. Présentation unifiée de certaines inégalités de la théorie des martingales. Sém. Prob. XIV, p.26-48. Lecture Notes in M. 784, Springer-Verlag 1980.

[3]. A. BONAMI et D. LEPINGLE. Fonction maximale et variation quadratique des martingales en présence d'un poids. Sém. Prob. XIII, p. 294-306. Lecture Notes in M. 721, Springer-Verlag 1979.

[4]. D.L. BURKHOLDER. Distribution function inequalities for martingales. Annals of Prob. 1, 1973, p.

[5]. P.A. MEYER. Martingales and stochastic integrals I. Lecture Notes in M. 284, Springer 1972.

CHOU Ching-Sung
Mathematics Department
National Central University
Chung-Li , Taiwan, Republic of China.