Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Thierry Jeulin
Marc Yor

Sur les distributions de certaines fonctionnelles du mouvement brownien

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 210-226
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__210_0>

SUR LES DISTRIBUTIONS DE CERTAINES FONCTIONNELLES

DU MOUVEMENT BROWNIEN

T.Jeulin et M.Yor

1. Introduction.

Soit $(\Omega,\underline{\underline{F}},(\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0},P)$ un espace de probabilité filtré usuel. Dans tout ce travail, $(X_t)_{t\geq 0}$ désigne un $(\underline{\underline{F}}_t)$ mouvement brownien réel, nul en 0 ; on note

(1.0) $\quad S_t = \sup_{s\leq t} X_s \quad (t\geq 0) \; ; \quad \sigma_a = \inf\{t \mid X_t = a\} \quad (a\geq 0).$

F.Knight ([13]) a explicité la transformée de Laplace de la loi conjointe de :

$$\left(\int_0^{\sigma_a} 1_{(-\infty,g(S_s))}(X_s)ds \; ; \int_0^{\sigma_a} 1_{(g(S_s);h(S_s))}(X_s)ds \; ; \int_0^{\sigma_a} 1_{(h(S_s),+\infty)}(X_s)ds\right)$$

pour $g,h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, fonctions boréliennes vérifiant : $g(y)\leq h(y)\leq y$.

Le paragraphe 2 de ce travail est consacré à l'obtention, et à la généralisation de ces résultats, à l'aide de la construction de martingales convenables, associées au processus (S_t) (pour de telles constructions, voir Kennedy [10] ; Azéma [2] ; Azéma-Yor [3],[4] ; Yor [22]).

Cette méthode a déjà permis à Azéma-Yor [4] de donner la solution explicite suivante au problème de Skorokhod :

si μ est une probabilité sur $\mathbb{R}$, ayant un moment d'ordre 1 , et centrée, on note $\psi_\mu(x) = \dfrac{1}{\mu([x,\infty))}\displaystyle\int_{[x,\infty)} t\,d\mu(t)$, et ϕ_μ son inverse continue à <u>droite</u> (à l'instar de [4] , où ϕ_μ désignait l'inverse continue à gauche de ψ_μ); le temps d'arrêt

(1.1) $\quad T\; (= T_\mu) = \inf\{t \mid S_t \geq \psi_\mu(X_t)\} = \inf\{t \mid \phi_\mu(S_t) \geq X_t\}$

est tel que X_T a pour loi μ , et $E[T] = \int x^2\, d\mu(x)$.

Si la formule (1.1) est simple, la loi du couple (S_T,T) -dont la connaissance implique celle de (X_T,T) , car $X_T = \phi_\mu(S_T)$- l'est moins, comme en témoigne la formule suivante ([4]; formule (10)) :

soit $a\; (= a_\mu) = \inf\{x \mid \mu([x,\infty))\} = 0$, $\varphi(x) = x - \phi_\mu(x)$; pour tous $p,q > 0$, (1.2) $E\left[\exp(-pS_T - \frac{q^2}{2} T)\right]$

$$= \exp-\int_0^a ds\ (p + q \coth q\varphi(s)) + q\int_0^a \frac{dx}{\operatorname{sh} q\varphi(x)} \exp(-\int_0^x ds\ (p + q \coth q\varphi(s))).$$

Toutefois, si $\mu = m_a \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{2a} 1_{[-a,+a]}(x)dx$, la formule (1.1) devient :

(1.3) $R_a \overset{\text{déf}}{=} T_{m_a} = \inf\{t \mid 2S_t - X_t = a\}$;

de plus, on trouve, à l'aide de (1.2), que :

(1.4) $S_{R_a} = \frac{1}{2}(X_{R_a} + a)$ et R_a sont indépendantes, et

(1.5) $E\left[\exp-\frac{q^2}{2}R_a\right] = \frac{qa}{\operatorname{sh} qa}$.

Une démonstration directe de (1.5), puis (1.4), est fournie par le théorème de Pitman ([17]), à savoir : $Z_t = 2S_t - X_t$ est un processus de Bessel de dimension 3, et le fait que $S_t = \inf_{s \geq t} Z_s$.

Revenant maintenant à la formule générale (1.2), on voit, avec un peu d'intuition, que l'on peut la réécrire partiellement en :

(1.6) $E\left[e^{-\lambda T} / S_T = x\right] = E\left[e^{-\lambda R_{\varphi(x)}}\right] . E\left[e^{-\lambda\sigma_x} / \sigma_x < T\right]$

pour tous $\lambda > 0$, et $x \in \mathbb{R}$.

La présence de $R_{\varphi(x)}$ dans cette dernière formule est expliquée par le résultat suivant, qui sera démontré, dans un cadre un peu plus général, au paragraphe 3: soit ρ $(=\rho_t) = \sup\{s \leq T \mid S_s = X_s\}$. Conditionnellement à $\underline{\underline{F}}_{\rho-}$, le processus $(S_\rho - X_{(t+\rho)\wedge T})$ est un processus de Bessel de dimension 3 , issu de 0, arrêté à son premier passage en $S_\rho - X_T$.

On expliquera, dans le même paragraphe, la figuration de la loi conditionnelle de σ_x , quand ($\sigma_x < T$), dans la formule (1.6), par un calcul général d'espérances conditionnelles de variables ($\underline{\underline{F}}_{\rho-}$) mesurables, S_ρ (= S_T) étant donné.

Rappelons maintenant que, d'après la formule de Tanaka, il existe un second ($\underline{\underline{F}}_t$) mouvement brownien ($X'_t$), dont le processus des maxima locaux est noté (S'_t) tel que :

(1.7) $|X_t| = S'_t - X'_t$, et $L_t = S'_t$,

où (L_t) désigne le temps local en 0 de (X_t) .

On retrouve ainsi l'égalité en loi des processus $(S_t - X_t ; S_t)$ et $(|X_t| ; L_t)$,dûe à Paul Lévy. Ceci permet à l'évidence de traiter les sujets décrits précédemment en remplaçant le couple $(S_t ; X_t)$ par $(L_t ; L_t - |X_t|)$. Le temps d'arrêt T qui figure en (1.1) apparaît alors comme un temps d'entrée de $(L_t ; |X_t|)$ dans un ensemble borélien de $\mathbb{R}_+^2$; nous considèrerons en fait, plus généralement, certains temps d'entrée de (L_t,X_t) dans des ensembles boréliens de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Pour cette raison, nous adopterons uniquement, par la suite, la présentation avec le temps local. Par exemple, nous étendrons, au paragraphe 4, les résultats de F.Knight en calculant des expressions du type :

$$K(a,b,c) \overset{\text{déf}}{=} E\left[a(X_T,L_T)\exp\left\{-\int_0^\rho b(X_u,L_u)du - \int_\rho^T c(X_u,L_u)du\right\}\right]$$

où : a,b,c sont des fonctions boréliennes, positives, bornées sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$,

$T = \inf\{t \mid (X_t,L_t)\in\Gamma\}$, $\Gamma\in \underline{\underline{B}}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$,

$\rho = \sup\{t<T \mid X_t = 0\}$.

2.Sur les calculs de F.Knight ([13]).

Nous donnons d'abord quelques formules de calcul stochastique dont découleront les résultats de ce paragraphe.

Proposition (2.1) (voir [22], par exemple) : soit H un processus $(\underline{\underline{F}}_t)$ prévisible tel que $\int_0^\cdot |H_s|dL_s$ soit p.s. fini. Alors, on a l'égalité :

$$(2.2)\qquad H_{G_t}X_t^+ = \int_0^t H_{G_s}1_{(X_s>0)}\,dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t H_s\,dL_s \quad ,$$

où $G_t = \sup\{s<t \mid X_s = 0\}$.

Le résultat précédent s'applique en particulier au cas où $H_t\ (=H_{G_t}) = h(L_t)$, avec h fonction borélienne bornée. Nous serons amenés, plus généralement, à considérer les processus $f(L_t,X_t^+)$, avec $f : \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, borélienne, localement bornée.

Dans la suite, si $g : \mathbb{R}_{(+)}\longrightarrow\mathbb{R}$ est borélienne, et localement bornée, $[g'']$ désigne la dérivée seconde de g au sens des distributions.

Proposition (2.1') : soit $f : (\lambda,x)\longrightarrow f(\lambda,x)$ définie sur $\mathbb{R}_+^2$, borélienne, localement bornée, et telle que :

(i) il existe $\varphi : \mathbb{R}_+^2\longrightarrow\mathbb{R}$, borélienne, localement bornée,telle que :

$$[f''_{x^2}(\lambda,.)] = \varphi(\lambda,x)dx \quad ;$$

(ii) $f'_\lambda(.,0)$ existe, et est localement intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Alors, on a l'égalité :

$$(2.3)\ f(L_t,X_t^+) = f(0,0) + \int_0^t f'_x(L_s,X_s)1_{(X_s>0)}\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f'_x(L_s,0)\, dL_s$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^t \varphi(L_s,X_s)\, 1_{(X_s>0)} ds + \int_0^t f'_\lambda(L_s,0)\, dL_s .$$

Il nous faut maintenant préciser quelques notations concernant les solutions de l'équation de Sturm-Liouville (e_q) sur $\mathbb{R}_+$ associée à $q : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, borélienne, localement intégrable :

$$(e_q) \qquad [f''] = q(x)f(x)dx \quad .$$

α) Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, $(T_q(x,a);x \geq 0)$ désigne la solution de (e_q) telle que : $f(0) = 1$; $f(a) = 0$.

Rappelons que, si f_1 et f_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de (e_q), on a :

$$(2.4) \qquad T_q(x,a) = \frac{f_1(a)f_2(x) - f_1(x)f_2(a)}{f_1(a)f_2(0) - f_1(0)f_2(a)}$$

L'expression $\tilde{T}_q(a) \overset{\text{déf}}{=} \dfrac{\partial T_q}{\partial x}(0+,a)$ joue un rôle important par la suite.

β) Il existe une unique solution $U_q : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ de (e_q) sur $\mathbb{R}_+$, telle que :

$$(2.5) \qquad U_q(0) = 0 \quad ; \quad U'_q(0) \ \left(\overset{\text{déf}}{=} \lim_{x \longrightarrow 0_+} \frac{U_q(x)}{x}\right) = 1 \ .$$

(Par un léger abus de notation, si q est définie sur $\mathbb{R}$, et à valeurs positives, on note encore U_q l'unique solution de (e_q) <u>sur $\mathbb{R}$</u> telle que :

$$U_q(0) = 0 \quad , \text{ et } \quad U'_q(0) \ \left(\overset{\text{déf}}{=} \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{U_q(x)}{x}\right) = 1 \ ).$$

γ) Il existe une unique solution positive, décroissante F_q de (e_q) telle que $F_q(0) = 1$.

<u>Remarques (2.6)</u> :

0) Dans le paragraphe 2, seule la fonction F_q -parmi les fonctions T_q, U_q, F_q- sera utilisée de façon essentielle. Cependant, il nous a semblé préférable de présenter ces notations de façon groupée, même si les fonctions T_q et U_q n'apparaissent effectivement qu'au paragraphe 4.

1) Si q dépend mesurablement du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+$, par exemple (i.e.: $(x,\lambda) \longrightarrow q(x,\lambda)$ est borélienne), les fonctions

$$T_q(x,a,\lambda) \overset{\text{déf}}{=} T_{q(.,\lambda)}(x,a) \ ; \ \tilde{T}_q(a,\lambda) \overset{\text{déf}}{=} \tilde{T}_{q(.,\lambda)}(a) \ ; \ U_q(x,\lambda) \overset{\text{déf}}{=} U_{q(.,\lambda)}(x) \ ;$$

$F_q(x,\lambda) \overset{\text{déf}}{=} F_{q(.,\lambda)}(x)$ sont boréliennes en (x,a,λ).

2) Les fonctions U_q et F_q étant linéairement indépendantes, on déduit aisément de la formule (2.4) que :

$$(2.7) \quad T_q(x,a) = F_q(x) - \frac{F_q(a)}{U_q(a)} U_q(x) \quad ;$$

$$(2.7.1) \quad \tilde{T}_q(a) = F'_q(0) - \frac{F_q(a)}{U_q(a)} \quad ,$$

d'où, puisque $U_q(a)$ tend vers l'infini avec a :

$$(2.7.2) \quad \tilde{T}_q(\infty -) = F'_q(0) \ .$$

Introduisons encore, pour $q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, les notations $q_+ = q|_{\mathbb{R}_+}$; $q_- = (q(-x), x \geq 0)$.
On peut maintenant énoncer :

<u>Proposition (2.8)</u> : <u>soit</u> $\tau_\alpha = \inf\{t \mid L_t > \alpha\}$ $(\alpha > 0)$ <u>et</u> $b : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ <u>une fonction borélienne</u>, <u>bornée</u>. <u>Alors</u> :

$$(2.9) \quad E\left[\exp - \frac{1}{2}\int_0^{\tau_\alpha} b(X_u,L_u)du\right] = \exp \frac{1}{2}\int_0^{\alpha} du \left[F'_{b_+}(0,u) + F'_{b_-}(0,u)\right] .$$

<u>Démonstration</u> : introduisons la fonction B (sur $\mathbb{R}_+^3$) :

$$(2.10) \quad B(x,y,\lambda) = F_{b_+}(x,\lambda)F_{b_-}(y,\lambda) \exp -\frac{1}{2}\int_0^{\lambda} du \left[F'_{b_+}(0,u) + F'_{b_-}(0,u)\right] .$$

On montre alors aisément, à l'aide de la "formule d'Ito" (2.3), que le processus :

$$(2.11) \quad M_t = B(X_t^+, X_t^-, L_t) \exp - \frac{1}{2}\int_0^t b(X_u,L_u)\, du$$

est une $(\underline{\underline{F}}_t)$ martingale locale. Pour tout $\alpha > 0$, $(M_{t\wedge\tau_\alpha}, t \geq 0)$ est uniformément bornée, et on a donc : $E\left[M_{\tau_\alpha}\right] = E\left[M_0\right]$, ce qui implique immédiatement (2.9).

Dans le cas où $b(x,\lambda) \equiv b(x)$, la formule (2.9) se simplifie en :

$$(2.9') \quad E\left[\exp - \frac{1}{2}\int_0^{\tau_\alpha} b(X_u)du\right] = \exp \frac{\alpha}{2}\left[F'_{b+}(0) + F'_{b-}(0)\right] .$$

Inversement, il n'est pas difficile de retrouver la formule "générale" (2.9) à partir de (2.9') : en effet, d'après K.Itô [7] , le processus des excursions du mouvement brownien en dehors de 0 est un processus de Poisson ponctuel de mesure caractéristique U . On a alors aisément :

$$E\left[\exp - \frac{1}{2}\int_0^{\tau_\alpha} b(X_u,L_u)du\right] = \exp \int_0^{\alpha} du \int U(d\omega)\left[\exp(- \frac{1}{2}\int_0^{T_0} b(X_s,u)ds) - 1\right] ,$$

où $T_0 = \inf\{s > 0 \mid X_s = 0\}$, ce qui permet immédiatement d'identifier $[F'_{b_+}(0,u) + F'_{b_-}(0,u)]$ dans le cas général.

Remarques (2.12) :

1) La formule (2.9') n'est pas nouvelle, et figure, en fait, dans le paragraphe (6.2) de Itô-Mc Kean ([6]).

2) Plus généralement, la plupart des résultats de cet article, ainsi que la solution du problème de Skorokhod donnée en [4] , peuvent être obtenus comme application de la théorie des excursions d'Itô. Cette remarque nous a été faite, de façon indépendante, après la lecture de cet article, par M.Balkéma, J.Pitman, et L.Rogers (voir, en particulier [19]).

Examinons brièvement deux conséquences importantes de (2.9') :

(i) Réécrivons l'intégrale $\int_0^{\tau_\alpha} b(X_u)du$ comme $\int_{\mathbb{R}} da\, b(a)\, L^a_{\tau_\alpha}$, où

$(L^a_t\ ;\ a \in \mathbb{R}, t \geq 0)$ désigne le processus (bi-continu) des temps locaux de X .
L'apparition de F_{b_+} et F_{b_-} dans le membre de droite traduit l'indépendance -bien connue- des processus $(L^a_{\tau_\alpha}, a \geq 0)$, et $(L^a_{\tau_\alpha}, a \leq 0)$.

(ii) De plus, (2.9') permet d'identifier, sans calculs explicites, à la manière de P.Mc Gill [15] , le processus $(L^a_{\tau_\alpha}, a \geq 0)$ comme diffusion (voir le théorème suivant). C'est ce type de résultat qui sert d'outil-clé à F.Knight en [13].

Théorème (2.13) (F.Knight, [11]) : le processus $(L^a_{\tau_\alpha}, a \geq 0)$ a pour loi celle du carré $(Z_t, t \geq 0)$ du processus de Bessel de dimension 0, issu de $Z_0 = \alpha$.

Rappel (voir, par exemple, Shiga et Watanabe [20]) : ce processus $(Z_t, t \geq 0)$ est caractérisé par les propriétés suivantes :
a) $Z_0 = \alpha$; b) (Z_t) est une martingale locale, positive, continue, de processus croissant ($4\int_0^t Z_u du$). En conséquence, (Z_t) est absorbé en 0 .

Démonstration du théorème : soit (Z_t) le processus caractérisé par a) et b). Il s'agit de montrer que, pour toute fonction $b : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, bornée, on a :

$$(*) \qquad E\left[\exp -\frac{1}{2}\int b(a) Z_a da\right] = \exp \frac{\alpha}{2} F'_b(0) \quad .$$

Or, on montre facilement, par application du calcul d'Itô, que :

$$N_t \overset{\text{déf}}{=} \exp\left\{ Z_t \frac{F_b'(t)}{2F_b(t)} - \frac{1}{2}\int_0^t b(a)Z_a\, da \right\}$$

est une $\underline{\underline{Z}}_t = \sigma\left\{ Z_s, s \leq t\right\}$ martingale locale, bornée par 1. D'où : $E[N_\infty] = E[N_0]$ ce qui est précisément l'égalité (*).

On se propose maintenant d'expliciter $\tilde{T}_q$ et U_q dans de nombreux cas importants, en particulier lorsque q est constante par morceaux, ce qui permet de retrouver, et de généraliser (pour tout $n \in \mathbb{N}$) les résultats de Knight, qui considère en [13] (pour $n \leq 2$) les fonctions :

$$(2.14)\quad b(x,\lambda) = a_1^2 1_{(0<x<k_1(\lambda))} + a_2^2 1_{(k_1(\lambda)\leq x<k_2(\lambda))} + \dots + a_{n+1}^2 1_{(k_n(\lambda)\leq x)}$$

où : $a_i \geq 0$, et $k_i : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une suite croissante de fonctions boréliennes $(i \leq n+1)$.

Les formules en question sont : si $0 < u < x$,

$$(2.15)\quad \tilde{T}_q(x) = \tilde{T}_q(u) + \frac{\frac{\partial}{\partial x}\Big|_{x=u} (T_q(x,u))}{U_q(u)\, \tilde{T}_{q(.+u)}(x-u) - U_q'(u)}$$

$$(2.16)\quad U_q(x) = U_q'(u)\, U_{q(.+u)}(x-u) - U_q(u)\, \tilde{T}_{q(.+u)}(x-u)\, U_{q(.+u)}(x-u) .$$

Dans le cas où $q(x) = m^2$ $(m \neq 0)$, on a :

$$(2.17.1)\quad U_{m^2}(x) = \frac{\mathrm{sh}(mx)}{x}$$

$$(2.17.2)\quad T_{m^2}(x,a) = \frac{\mathrm{sh}m(a-x)}{\mathrm{sh}ma} \quad ; \quad \tilde{T}_{m^2}(a) = -m\,\mathrm{coth}ma .$$

Afin de calculer $\tilde{T}_b(\infty-,\lambda) = F_b'(0,\lambda)$, pour b donnée par la formule (2.14), on étudie tout d'abord ce que devient la formule (2.15) lorsque $q(x) \equiv m^2$ sur $(0,u)$. On a alors, d'après les formules (2.17.1) et (2.17.2), pour $u < x$:

$$(2.15.1)\quad \tilde{T}_q(x) = m\left\{ \frac{\tilde{T}_{q(.+u)}(x-u) - m\,\mathrm{th}mu}{m - \tilde{T}_{q(.+u)}(x-u)\mathrm{th}mu} \right\} ,$$

et donc, si $H_q \overset{\text{déf}}{=} -\tilde{T}_q(\infty-)$ $(= -F_q'(0))$, on a :

$$(2.15.2)\quad H_q = m\left\{ \frac{H_{q(.+u)} + m\,\mathrm{th}(mu)}{m + H_{q(.+u)}\mathrm{th}(mu)} \right\} .$$

<u>Remarque (2.18)</u> : notons $\mathbb{P}^{\alpha}$ la loi du processus $(Z_t)_{t \geq 0}$ qui figure dans l'énoncé du théorème (2.13). Remarquons que le relation de récurrence (2.15.2) n'est qu'une traduction -via (2.9')- de l'égalité :

$$\mathbb{E}^{\alpha}\left[\exp -\frac{1}{2}\left\{m^2\int_0^u da\, Z_a + \lambda Z_u\right\}\right] = \exp -\frac{\alpha m}{2}\left\{\frac{\lambda + m\,\mathrm{th} mu}{m + \lambda\,\mathrm{th} mu}\right\} \quad (m \neq 0; \lambda \geq 0).$$

Remarquons encore que l'on peut retrouver, à partir de cette dernière formule, l'expression de la transformée de Laplace conditionnelle de $\int_0^u da\, Z_a$, étant donné Z_u, expression calculée par F.Knight en ([12],theorem 2.2).

b étant maintenant définie par (2.14), définissons $\bar{H}_{n+1}(\lambda) = a_{n+1}$, puis par récurrence pour $1 \leq j \leq n$, les fonctions :

$$(2.19) \qquad \bar{H}_j(\lambda) = a_j\left\{\frac{\bar{H}_{j+1}(\lambda) + a_j\,\mathrm{th}(a_j(k_j-k_{j-1})(\lambda))}{a_j + \bar{H}_{j+1}(\lambda)\,\mathrm{th}(a_j(k_j-k_{j-1})(\lambda))}\right\} \qquad (k_0(\lambda) = 0)\ ;$$

on a alors : $\bar{H}_1(\lambda) = H_{b(\cdot,\lambda)}$.

(La formule de récurrence (2.19) est suggérée très clairement par les expressions qui apparaissent dans les calculs de [13]).

Pour terminer, nous calculons les fonctions U_q et F_q, pour $q(x) = k^2|x|^{2p-2}$ $(k>0,\ 2p>1)$. On a alors : $q_+ = q_-$ (que l'on notera simplement q). Deux solutions linéairement indépendantes de (e_q) sont :

$$f_1(x) = \sqrt{x}\ I_{1/2p}\left(\frac{k}{p}x^p\right) \quad ; \quad f_2(x) = \sqrt{x}\ K_{1/2p}\left(\frac{k}{p}x^p\right).$$

Notons : $\nu = 1/2p$, $\tilde{x} = \frac{k}{p}x^p$.

A l'aide des équivalents de I_ν et K_ν en $x = 0$, et des relations de récurrence classiques entre fonctions de Bessel, on trouve aisément :

$$f_1(0) = 0\ ;\ f_1'(0) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}(k\nu)^{\nu} \qquad \left(\text{d'où : } U_q(x) = \frac{f_1(x)}{f_1'(0)}\right);$$

$$f_2(0) = \frac{\Gamma(\nu)}{2(k\nu)^{\nu}} \qquad \left(\text{et donc : } F_q(x) = \frac{f_2(x)}{f_2(0)}\right);$$

$$f_2'(x) = -\frac{\tilde{x}}{2\nu\sqrt{x}}K_{\nu-1}(\tilde{x}), \text{ d'où } f_2'(0) = -\frac{\Gamma(1-\nu)}{2\nu}(k\nu)^{\nu},$$

et finalement : $-F_q'(0) = c_\nu\,(k^2)^{\nu}$, avec :

$$c_\nu = \frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(\nu)}\nu^{2\nu-1} = \frac{\pi}{\nu\sin(\nu\pi)}\left(\frac{\nu^{\nu}}{\Gamma(\nu)}\right)^2.$$

On trouve donc, d'après la formule (2.9'), après changement de k^2 en $k \geq 0$:

$$E\left[\exp - \frac{k}{2} \int_0^{\tau_\alpha} |X_u|^{2p-2}\, du\right] = \exp(-\alpha c_\nu k^\nu),$$

autrement dit : le processus $\left(\int_0^{\tau_\alpha} |X_u|^{2p-2}\, du\ ;\ \alpha \geq 0\right)$ est le "one-sided stable process, with exponent ν, and rate $2^\nu c_\nu$". A nouveau, ce résultat figure, à un changement de temps près, en haut de la page 226 de Itô-Mc Kean [6] . Signalons encore que Molchanov-Ostrovski [16] montrent que, si $(\gamma_t, t \geq 0)$ désigne l'inverse continu à droite d'un temps local en 0 pour le processus de Bessel d'indice $a \in (-1,0)$ (défini avec le point 0 comme barrière instantanément réfléchissante), alors, $(\gamma_t, t \geq 0)$ est un "one-sided stable process, with exponent $\nu = -a$". Ce résultat découle du précédent lorsque l'on a remarqué que, si (B_t) désigne le mouvement brownien réel, issu de 0, alors, pour tout $p > 1/2$, le processus $\left(\frac{1}{p}|B_t|^p, t \geq 0\right)$, changé de temps avec l'inverse de la fonctionnelle additive $\left(A_t = \int_0^t |B_u|^{2p-2}\, du\right)$ est le processus de Bessel d'indice $(-\nu)$, si $\nu = 1/2p$ (processus défini toujours avec 0 pour barrière instantanément réfléchissante).

3. Une décomposition des trajectoires du mouvement brownien.

L'explication de la formule (1.6) -annoncée dans l'introduction- est fondée ici sur des techniques de grossissement de filtration (voir, par exemple, M. Barlow [5], T. Jeulin et M. Yor [9], ou, pour un ensemble complet de résultats, T. Jeulin [8]), techniques que nous rappelons brièvement.

On utilisera deux types de grossissement de la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$, à savoir :

- si ρ est la fin d'un ensemble $(\underline{\underline{F}}_t)$ optionnel, $(\underline{\underline{F}}_t^\rho)$ désigne la plus petite filtration contenant $(\underline{\underline{F}}_t)$ et faisant de ρ un temps d'arrêt.
- si U est une v.a. $\underline{\underline{F}}_\infty$-mesurable, on définit $\underline{\underline{F}}_t^{\sigma(U)}$ comme $\bigcap_{s>t} (\underline{\underline{F}}_s \vee \sigma(U))$.

Les rappels en question sont concentrés dans les deux énoncés ci-dessous.

<u>Lemme (3.1)</u> : <u>soit</u> T <u>un</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$ <u>temps d'arrêt fini</u>, <u>totalement inaccessible sur</u> $(T > 0)$, <u>et</u> (A_t) <u>la</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$ <u>projection duale prévisible de</u> $1_{(0 < T \leq t)}$. <u>Alors</u> :

a) A <u>est continu</u>, <u>et</u> $T = \inf\{t \mid A_t = A_T\} = \sup\{t \mid A_t = A_T\}$ (Azéma [1]).

b) (Azéma [1]) <u>La distribution de</u> A_T (<u>sur</u> $\mathbb{R}_+$) <u>est</u> :

$$P[T=0]\ \varepsilon_0(dt) + P[T>0]\ \exp(-t)\, dt \quad .$$

c) <u>Soit</u> U <u>une variable</u> $(\underline{\underline{F}}_T)$ <u>mesurable</u> (<u>éventuellement triviale</u>) <u>telle que les</u>

tribus $\sigma(U)$ et $(\underline{\underline{F}}_{T-})$ soient indépendantes, conditionnellement à A_T . Alors, si

$(\underline{\underline{G}}_t) \stackrel{\text{déf}}{=} (\underline{\underline{F}}_t^{\sigma(A_T;U)})$,

(i) T est un $(\underline{\underline{G}}_t)$ temps d'arrêt prévisible ;

(ii) toute $(\underline{\underline{F}}_t)$-semi-martingale est une $(\underline{\underline{G}}_t)$-semi-martingale ;

(iii) les $(\underline{\underline{F}}_t)$ martingales locales continues en T restent des $(\underline{\underline{G}}_t)$ martingales locales.

Nous préparons maintenant les notations pour la proposition suivante : soit ρ la fin d'un ensemble $(\underline{\underline{F}}_t)$ optionnel ; Z désigne la projection $(\underline{\underline{F}}_t)$ optionnelle de $1_{[0,\rho[}$ et A l'unique processus croissant $(\underline{\underline{F}}_t)$ prévisible, nul en 0, tel que $M \stackrel{\text{déf}}{=} Z + A$ soit une $(\underline{\underline{F}}_t)$ martingale.

Proposition (3.2) : soit ρ la fin d'un ensemble $(\underline{\underline{F}}_t)$ optionnel tel que $P[0 < \rho = T] = 0$, pour tout $(\underline{\underline{F}}_t)$ temps d'arrêt T . Alors :

a) ρ est un $(\underline{\underline{F}}_t^\rho)$ temps d'arrêt, totalement inaccessible sur $(\rho > 0)$; la projection duale $(\underline{\underline{F}}_t^\rho)$ prévisible de $1_{(0<\rho\leq t)}$ est A ; $A_\infty = A_\rho$;

b) ρ est un $(\underline{\underline{F}}_t^{\sigma(A_\infty)})$ temps d'arrêt prévisible ; en particulier, $\underline{\underline{F}}_t^\rho \subset \underline{\underline{F}}_t^{\sigma(A_\infty)}$, pour tout t ; $\underline{\underline{F}}_{\rho-} = \underline{\underline{F}}_{\rho-}^\rho = \underline{\underline{F}}_{\rho-}^{\sigma(A_\infty)}$, où, pour toute filtration $(\underline{\underline{G}}_t)$, on note :

$\underline{\underline{G}}_{\rho-} \stackrel{\text{déf}}{=} \sigma\left\{Z_\rho 1_{(\rho<+\infty)} \mid Z \ (\underline{\underline{G}}_t) \text{ prévisible}\right\}$.

c) Soit U une variable $(\underline{\underline{F}}_{\rho+} \stackrel{\text{déf}}{=} \sigma\{Z_\rho \mid Z \ (\underline{\underline{F}}_t) \text{ progressivement mesurable}\})$ mesurable (éventuellement triviale) telle que les tribus $\sigma(U)$ et $\underline{\underline{F}}_{\rho-}$ soient conditionnellement indépendantes par rapport à A_∞ $(= A_\rho)$.

Alors, si $\underline{\underline{G}}_t \stackrel{\text{déf}}{=} \underline{\underline{F}}_t^{\sigma(A_\infty;U)}$, et si (N_t) est une $(\underline{\underline{F}}_t)$ martingale locale,

$$(3.3)\quad \bar{N}_t = N_t - \int_0^{t\wedge\rho} \frac{d\langle N,M\rangle_s}{Z_{s-}} + \int_0^t 1_{(\rho<s)} \frac{d\langle N,M\rangle_s}{1 - Z_{s-}}$$

est une $(\underline{\underline{G}}_t)$ martingale locale (et donc, a fortiori, une $(\underline{\underline{F}}_t^\rho)$ martingale locale).

Les assertions qui figurent dans cette proposition sont :

- purement des résultats de grossissement, si elles s'expriment en termes de la filtration $(\underline{\underline{F}}_t^\rho)$;
- des applications du lemme (3.1), où l'on a remplacé le couple $(T,(\underline{\underline{F}}_t))$ par $(\rho,(\underline{\underline{F}}_t^\rho))$, si elles s'expriment en termes d'une filtration contenant $(\underline{\underline{F}}_t^\rho)$.

Venons en maintenant à notre propos. Soient H et K deux processus prévisibles positifs tels que :

3.i) $\int_0^{\cdot} (H_s+K_s)\, dL_s$ est p.s. fini ;

3.ii) $\int_0^{\infty} (H_s+K_s)\, dL_s = +\infty$,p.s.

On définit $G_t = \sup\{ s < t \mid X_s = 0 \}$ $(t > 0)$;

$T = \inf\{ t \mid H_{G_t} X_t^+ + K_{G_t} X_t^- = 1 \}$, et $\rho = G_T$.

Il suffirait pour "expliquer" la formule (1.6) de prendre $H = K$ (cette hypothèse simplifie également la présentation, mais le cas général n'est pas plus difficile à traiter).

Le lemme suivant nous permettra d'appliquer la proposition (3.2) au temps ρ .

<u>Lemme (3.4)</u> : a) <u>T est p.s. fini</u> .

b) <u>Avec les notations qui précèdent la proposition</u> (3.2), <u>on a</u> :

$Z\ (= M - A\ ) = (1 - H_{G_\cdot} X^+ - K_{G_\cdot} X^-)\, 1_{[0,T[}$, <u>avec</u> :

$$A_t = \frac{1}{2} \int_0^{t\wedge T} (H_s+K_s)\, dL_s \quad ;$$

$$M_t = 1 - \int_0^{t\wedge T} dX_s \left(1_{(X_s > 0)} H_{G_s} - 1_{(X_s < 0)} K_{G_s}\right) \quad .$$

c) <u>Pour tout</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$ <u>temps d'arrêt</u> V , $P[\rho = V] = 0$.

<u>Démonstration</u> : a) D'après la formule (2.2), on a :

$$(3.5)\quad H_{G_{t\wedge T}} X^+_{t\wedge T} + K_{G_{t\wedge T}} X^-_{t\wedge T} = \int_0^{t\wedge T} dX_s \left(1_{(X_s > 0)} H_{G_s} - 1_{(X_s < 0)} K_{G_s}\right) + \frac{1}{2} \int_0^{t\wedge T} (H_s+K_s)\, dL_s \ .$$

Le membre de gauche étant borné par 1 , $\int_0^T (H_s+K_s)\, dL_s$ est intégrable ; T est donc fini, d'après 3.ii).

b) Il suffit, d'après l'égalité (3.5), de montrer que $1_{(\rho \leq t)}$ admet

$A_t \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{2} \int_0^{t\wedge T} (H_s+K_s)\, dL_s$ pour $(\underline{\underline{F}}_t)$ projection duale prévisible.

Soit donc (U_t) un processus $(\underline{\underline{F}}_t)$ prévisible, borné, positif. Quitte à remplacer le couple (H,K) par (UH,UK) en (3.2), il vient :

$E[U_\rho] = E\left[U_{G_T} (H_{G_T} X_T^+ + K_{G_T} X_T^-)\right] = E\left[\int_0^T U_s\, dA_s\right]$, d'où le résultat cherché.

c) L'égalité $Z_\rho = 1$ implique (cf. [9]) $P[\rho = V] = 0$, pour tout $(\underline{\underline{F}}_t)$ temps d'arrêt V .

Une conséquence immédiate de la proposition (3.2,c) est que : pour toute $(\underline{\underline{F}}_t)$ martingale locale N , le processus

$$(3.6)\quad \bar{N}_t = N_t + \int_0^{t\wedge\rho} \frac{d\langle N,M\rangle_s}{Z_{s-}} - \int_0^{t\wedge T} 1_{(\rho < s)} \frac{d\langle N,X\rangle_s}{X_s}$$

est une $(\underline{\underline{F}}_t^{\sigma(A_\infty)})$ martingale locale.

Le résultat principal de ce paragraphe est le :

<u>Théorème (3.7)</u> :

a) $P[X_T > 0 \mid \underline{\underline{F}}_{\rho-}] = \dfrac{H_\rho}{H_\rho + K_\rho}$; $P[X_T < 0 \mid \underline{\underline{F}}_{\rho-}] = \dfrac{K_\rho}{H_\rho + K_\rho}$

b) <u>Conditionnellement à</u> $\underline{\underline{F}}_{\rho-}$, <u>et à l'ensemble</u> $(X_T > 0)$ (<u>resp</u>. $(X_T < 0)$, <u>le processus</u> $X_{(t+\rho)\wedge T}$, <u>resp</u>. $- X_{(t+\rho)\wedge T}$, <u>est un processus de Bessel de dimension</u> 3, <u>issu de</u> 0, <u>arrêté à son premier passage en</u> H_ρ^{-1} , <u>resp</u>. K_ρ^{-1}.

<u>Remarque (3.8)</u> : Dans le cas où $H = 1$, et $K = 0$, ce qui implique $T = \inf\{ t \mid X_t = 1 \}$, le théorème (3.7) a été obtenu par D.Williams [21] .

<u>Démonstration du théorème</u> :

a) Soit (U_t) un processus $(\underline{\underline{F}}_t)$ prévisible borné ; d'après (2.2) et (3.4), on a :

$$E[U_\rho \,; X_T > 0] = E\left[U_{G_T} H_{G_T} X_T^+\right] = \frac{1}{2} E\left[\int_0^T U_s H_s \, dL_s\right]$$
$$= E\left[\int_0^\infty U_s \frac{H_s}{H_s + K_s} dA_s\right] = E\left[U_\rho \frac{H_\rho}{H_\rho + K_\rho}\right] .$$

b) Le résultat cherché découle immédiatement de la formule (3.6), appliquée à $N = X$, et de la caractérisation du processus de Bessel de dimension 3 , comme solution de l'équation stochastique : $dy_t = d\beta_t + \dfrac{dt}{y_t}$; $y_t > 0$ $(t > 0)$, où (β_t) est un mouvement brownien réel.

Si l'on adopte, avec les notations de (1.7), une présentation avec le mouvement brownien $X_t' = L_t - |X_t|$, et $S_t' = L_t$, on obtient, dans le cas où $H = K$:

<u>Corollaire (3.9)</u> : <u>Conditionnellement à</u> $\underline{\underline{F}}_{\rho-}$, <u>le processus</u> $S_\rho' - X_{(t+\rho)\wedge T}$ <u>est un processus de Bessel de dimension</u> 3 , <u>issu de</u> 0 , <u>arrêté à son premier passage en</u> H_ρ^{-1} .

Conservons, très provisoirement, les notations du corollaire (3.9) pour commencer l'explication de la formule (1.6). On a, d'après ce corollaire, en écrivant $T = (T-\rho) + \rho$:

$$E\left[\exp(-\lambda T)/S'_\rho = s;\ H_\rho^{-1} = v\right] = E\left[\exp-\lambda R_v\right]\ E\left[\exp(-\lambda\rho)\ /\ S'_\rho = s\ ;\ H_\rho^{-1} = v\right] .$$

Pour terminer l'explication de la formule (1.6), nous sommes donc amenés de façon naturelle à étudier (en particulier) les lois conditionnelles de variables ($\underline{\underline{F}}_{\rho-}$) mesurables, $L_T = L_\rho$ étant donné (rappelons que $S'_t \equiv L_t$).

Introduisons les temps d'arrêt $T_u = \inf\{t \mid L_t = u\}$ $(u > 0)$, et les processus ($\underline{\underline{F}}_t$) prévisibles : $\lambda'_t = \frac{1}{2}(H_t+K_t)$, et $\lambda_t = \lambda'_t\, 1_{(t \leqslant T)}$. On a alors, dans le cadre général de notre étude , la :

<u>Proposition (3.10)</u> : <u>Soit</u> $(U_t, t \geqslant 0)$ <u>un processus</u> ($\underline{\underline{F}}_t$) <u>prévisible positif</u>. <u>Alors</u> :

a) (3.11) $$E\left[U_\rho\ /\ L_\rho = u\right] = \frac{E\left[U_{T_u}\ \lambda_{T_u}\right]}{E\left[\lambda_{T_u}\right]}$$ (<u>avec la convention</u> 0/0 = 0).

b) (3.12) $$E\left[U_\rho\,;(X_T > 0)\ /\ L_\rho = u\right] = \frac{E\left[U_{T_u}\ (1/2\ H_{T_u})\ ; T_u \leqslant T\right]}{E\left[\lambda_{T_u}\right]}$$

Remarquons que, si V désigne un second processus prévisible positif, on a, en conséquence de la formule (3.11) :

(3.11.1) $$E\left[U_\rho\ /\ L_\rho = u\ ;\ V_\rho = v\right] = \frac{E\left[U_{T_u}\ \lambda_{T_u}\ /\ V_{T_u} = v\right]}{E\left[\lambda_{T_u}\ /\ V_{T_u} = v\right]}$$

En particulier, il vient, avec $V = \lambda'$:

(3.11.2) $$E\left[U_\rho\ /\ L_\rho = u\ ;\ \lambda'_\rho = v\right] = \frac{E\left[U_{T_u}\ 1_{(T_u \leqslant T)}\ /\ \lambda'_{T_u} = v\right]}{P\left[T_u \leqslant T\ /\ \lambda'_{T_u} = v\right]} .$$

<u>Démonstration de la proposition</u> :

a) D'après le lemme (3.4,b), on a, pour toute fonction borélienne $a : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$:

$$E\left[U_\rho\ a(L_\rho)\right] = E\left[\int_0^\infty U_s\,\lambda_s\ a(L_s)\ dL_s\right] = E\left[\int_0^\infty U_{T_u}\ \lambda_{T_u}\ a(u)\ du\right] ,$$

d'où l'on déduit aisément la formule (3.11).

b) La formule (3.12) découle de (3.11), via l'égalité : $P\left[X_T > 0 \mid \underline{\underline{F}}_{\rho-}\right] = \dfrac{H_\rho}{H_\rho + K_\rho}$

(cf. théorème (3.7,a)).

Remarquons que, lorsque le processus λ' est de la forme $f(L_.)$, avec

$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, borélienne, la formule (3.11.2) se simplifie en :

$$(3.11.3)\qquad E\left[U_\rho \,/\, L_\rho = u\right] = \frac{E\left[U_{T_u} \,;\, T_u \leqslant T\right]}{P\left[T_u \leqslant T\right]} .$$

L'explication de l'égalité (1.6) est (a fortiori) terminée.

Il peut également être intéressant de connaitre les lois conditionnelles de variables $(\underline{\underline{F}}_{\rho-})$ mesurables, ρ étant donné. Pour ce faire, plaçons nous sur l'espace canonique $\Omega = C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, muni de la mesure de Wiener W_0. (X_t) désigne maintenant le processus des coordonnées, et $(\underline{\underline{F}}_t)$ est ici la filtration naturelle de (X_t). On a alors la

<u>Proposition (3.13)</u> ([18]) : <u>Soit</u> $\rho : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$ <u>une variable aléatoire</u> $(\underline{\underline{F}}_\infty)$ <u>mesurable, telle que la projection duale prévisible de</u> $1_{(0 < \rho \leqslant t)}$ <u>soit</u> $\int_0^t \lambda_s \, dL_s$, <u>où</u> (λ_s) <u>est un processus</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$ <u>prévisible positif</u>. <u>Alors, on a, pour tout processus</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$ <u>prévisible positif</u> $(U_t, t \geqslant 0)$:

$$(3.14)\qquad E\left[U_\rho \,/\, \rho = t\right] = \frac{W_0^{t,0}\left[U_t \lambda_t\right]}{W_0^{t,0}\left[\lambda_t\right]} ,$$

<u>où</u> $W_0^{t,0}$ <u>désigne la loi, sur</u> $\underline{\underline{F}}_t$, <u>du pont brownien entre</u> 0 <u>et</u> t, <u>valant</u> 0 <u>aux deux extrémités</u>.

Si V désigne un second processus prévisible positif, on a donc :

$$(3.14.1)\qquad E\left[U_\rho \,/\, \rho = t \,;\, V_\rho = v\right] = \frac{W_0^{t,0}\left[U_t \lambda_t \,/\, V_t = v\right]}{W_0^{t,0}\left[\lambda_t \,/\, V_t = v\right]} ,$$

formule qui, dans le cas où $V = L$, ou λ', peut (éventuellement) être aussi utile que (3.11.1).

<u>4. Une nouvelle extension des résultats de F.Knight</u> ([13]).

On suppose maintenant que $H = h(L)$, $K = k(L)$, où $h,k : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ sont des fonctions boréliennes finies sur $[0,\alpha[$ $(0 < \alpha \leqslant \infty)$, et identiquement égales à $(+\infty)$ sur $[\alpha,\infty[$. On suppose en outre que :

$$4.i)\ \forall\, x < \alpha ,\ \int_0^x (h+k)(u)du < \infty \quad ;\quad 4.ii)\ \int_0^\infty (h+k)(u)du = +\infty .$$

L'introduction de α (éventuellement $+\infty$!) est nécessaire pour englober dans le cadre du problème de Skorokhod le cas où $a_\mu < +\infty$; on peut prendre, en effet, dans ce cas :

$$h(x) = k(x) = (x - \phi_\mu(x))^{-1} ,\ \text{si}\ x < a_\mu \quad ;\ +\infty ,\ \text{si}\ x \geqslant a_\mu .$$

On modifie en conséquence la définition de T en $T' = T \wedge T_\alpha$ et de ρ en $\rho' = \sup\{s \leqslant T' \mid X_s = 0\}$. Les résultats obtenus dans le paragraphe 3 restent valides lorsque l'on remplace le couple (ρ, T) par (ρ', T'), hormis le fait que la projection duale prévisible de $1_{(0 < \rho' \leqslant t)}$ est :

$$A'_t = \frac{1}{2} \int_0^{t \wedge T'} (h+k)(L_s)\, dL_s + 1_{(T_\alpha = T' \leqslant t)} \quad .$$

La distribution explicite de $(L_{T'})$ est une conséquence facile du lemme (3.1,b). On trouve :

$$(4.1) \quad P[L_{T'} \in du] = \frac{du}{2} (h+k)(u) \exp(-\frac{1}{2}\int_0^u (h+k)(v)dv)\, 1_{(0 \leqslant u < \alpha)}$$
$$+ \varepsilon_\alpha(du) \exp(-\frac{1}{2}\int_0^\alpha (h+k)(v)dv) \quad .$$

Introduisons maintenant la plus petite filtration $(\underline{\underline{G}}_t)_{t \geqslant 0}$ telle que $L_{T'}$ et $(X_{T'} > 0)$ soient $\underline{\underline{G}}_0$ mesurables ($X_{T'}$ sera alors $\underline{\underline{G}}_0$ mesurable!), et $\underline{\underline{G}}_t \supset \underline{\underline{F}}_t$, pour tout t. De l'égalité $P[X_{T'} > 0 \mid \underline{\underline{F}}_{\rho'-}] = (\dfrac{h}{h+k} 1_{(0,\alpha)})(L_{\rho'})$ (théorème (3.7,a)), et de la proposition (3.2,c), on déduit que, si (N_t) est une $(\underline{\underline{F}}_t)$ martingale locale, le processus $(\bar{N}_t)$ qui figure en (3.6), soit :

$$(4.2) \quad \bar{N}_t = N_t + \int_0^{t \wedge \rho'} \left(1_{(X_s > 0)} \frac{h(L_s)}{1 - X_s^+ h(L_s)} - 1_{(X_s < 0)} \frac{k(L_s)}{1 - X_s^- k(L_s)}\right) d\langle N, X\rangle_s$$
$$- \int_0^{t \wedge T'} 1_{(\rho' < s)} \frac{d\langle N, X\rangle_s}{X_s}$$

est une $(\underline{\underline{G}}_t)$ martingale locale (par rapport à (3.6), on a explicité ici la martingale locale M ; cf. lemme (3.4,b)).

On déduit maintenant de la forme des $(\underline{\underline{G}}_t)$ martingales locales (4.2) et de la formule d'Itô (2.3), l'extension suivante des formules (2.10) et (2.11) :

<u>Proposition (4.3)</u> : a) <u>Soit</u> $b : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, <u>borélienne</u>, <u>bornée</u>. <u>Si</u> B <u>est la fonction définie sur</u> $\mathbb{R}_+^3$ <u>par</u> :

$$B(x,y,\lambda) = 0 \text{ , si } xh(\lambda) \geqslant 1 \text{ ou } yk(\lambda) \geqslant 1 \text{ ,}$$
$$= \frac{T_{b_+}(x, h^{-1}(\lambda), \lambda)}{1 - xh(\lambda)} \cdot \frac{T_{b_-}(y, k^{-1}(\lambda), \lambda)}{1 - yk(\lambda)} \exp -\frac{1}{2}\int_0^\lambda du \left[(h+k)(u) + \tilde{T}_{b_+}(h^{-1}(u), u) + \tilde{T}_{b_-}(k^{-1}(u), u)\right]$$

<u>sinon</u> (<u>on fait, en outre, la convention</u> $1/0 = +\infty$) ; <u>alors</u> :

$$\frac{B(X^+_{t \wedge \rho'}, X^-_{t \wedge \rho'}, L_{t \wedge \rho'})}{B(0,0,L_{T'})} \exp -\frac{1}{2}\int_0^{t \wedge \rho'} b(X_u, L_u)\, du$$

est une $(\underline{G}_t)$ martingale uniformément intégrable.

b) Soit $c : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, borélienne, bornée. Alors,

$$1_{(\rho' \leq t)} \frac{X_{T'}}{X_{t\wedge T'}} \frac{U_c(X_{t\wedge T'}, L_{T'})}{U_c(X_{T'}, L_{T'})} \exp - \frac{1}{2} \int_{\rho'}^{t\wedge T'} c(X_u, L_u)\, du$$

est une $(\underline{G}_{\rho' \vee t})$ martingale uniformément intégrable (on fait la convention : $\frac{U_c(0)}{0} = 1 \; (= U_c'(0))$).

Dans le but de calculer "explicitement" les expressions $K(a,b,c)$, définies à la fin de l'introduction, on commence par appliquer le théorème d'arrêt, d'abord en ρ' , puis en 0 , obtenant ainsi la formule (4.5) ci dessous, qui mérite le nom de formule de Lehoczky, car elle étend les résultats de [14].

Proposition (4.4) : soient $b,c : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, boréliennes, bornées. On a :

$$(4.5) \quad E\left[\exp - \frac{1}{2}\left\{\int_0^{\rho'} b(X_u,L_u)du + \int_{\rho'}^{T'} c(X_u,L_u)du\right\} / (X_{T'}, L_{T'})\right]$$

$$= \frac{X_{T'}}{U_c(X_{T'},L_{T'})} \exp \frac{1}{2}\int_0^{L_{T'}} du\left[(h+k)(u) + \tilde{T}_{b_+}(h^{-1}(u),u) + \tilde{T}_{b_-}(k^{-1}(u),u)\right] .$$

Le calcul explicite de $K(a,b,c)$ résulte alors de la connaissance de la loi conjointe de $(X_{T'}, L_{T'})$, donnée par la formule (4.1) et l'égalité :

$$P\left[X_{T'} > 0 \mid \underline{F}_{\rho'-}\right] = \left(\frac{h}{h+k}\right)(L_{\rho'})\, 1_{(L_{\rho'} < \alpha)} .$$

Références.

[1] J.Azéma : Quelques applications de la théorie générale des processus I. Inv. Math. 18, 293-336, 1972 .

[2] J.Azéma : Représentation multiplicative d'une surmartingale bornée. Zeitschrift für Wahr. 45, 191-212, 1978 .

[3] J.Azéma, M.Yor : En guise d'Introduction (... aux Temps Locaux). Astérisque (Soc. Math. France) 52-53,p. 3-35, 1977 .

[4] J.Azéma, M.Yor : Une solution simple au problème de Skorokhod. Sém. Proba. Strasbourg XIII, Lect.Notes in Math. 721, 1979 .

[5] M.Barlow : Study of a filtration expanded to include an honest time. Zeitschrift für Wahr., 44, 307-323, 1978 .

[6] K.Itô, H.P.Mc Kean : Diffusion processes and their sample paths. Springer, 1965 .

[7] K.Itô : Poisson point processes attached to Markov processes. Proc. 6^{th} Berkeley Symposium, 225-239, 1972 .

[8] T.Jeulin : Semi-martingales et grossissement d'une filtration. Lect. Notes in Math. 833, Springer, 1980 .

[9] T.Jeulin, M.Yor : Nouveaux résultats sur le grossissement des tribus. Ann.Sci.E.N.S., 4^e Série, t.11, 429-443, 1978 .

[10] D.Kennedy : Some martingales related to cumulative sum tests and single server queues. Stochastic processes and their applications 4 , 261-267, 1976 .

[11] F.Knight : Random Walks and a sojourn density process of Brownian motion. Trans.Amer.Math.Soc. 109, 56-86, 1963 .

[12] F.Knight : Brownian local times and taboo processes. Trans.Amer.Math.Soc; 143, 173-185, 1969 .

[13] F.Knight : On sojourn times of killed Brownian motion. Sém. Proba. Strasbourg XII, Lect.Notes in Math.649, 1978.

[14] J.Lehoczky : Formulas for stopped diffusion processes, with stopping times based on the maximum. Ann. Probability, 5, 601-608, 1977 .

[15] P.Mc Gill : A direct proof of the Ray-Knight theorem. Dans ce volume .

[16] S.A. Molchanov, E.Ostrovskii : Symmetric stable processes as traces of degenerate diffusion processes. Teo.Vero.ii.Prim.

[17] J.W.Pitman : One-dimensional Brownian motion and the three-dimensional Bessel process. Adv. Appl. Prob. 7, 511-526, 1975 .

[18] J.W.Pitman, T.Jeulin, M.Yor : Sur le calcul de certaines espérances conditionnelles en théorie des processus de Markov. En préparation.

[19] L.Rogers : Williams' characterization of the Brownian excursion law : proof and applications. Dans ce volume.

[20] T.Shiga, S.Watanabe : Bessel diffusions as a one-parameter family of diffusion processes. Z. für Wahr. 27, 37-46, 1973 .

[21] D.Williams : Path decomposition and continuity of local time for one-dimensional diffusions I. Proc.London Math.Soc.,28, 738-768, 1974 .

[22] M.Yor : Sur le balayage des semi-martingales continues. Sem. Proba. Strasbourg XIII, Lect.Notes in Math. 721, 453-471, Springer, 1979 .