

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

XAVIER FERNIQUE

Sur les lois de certaines intégrales associées à des mouvements browniens

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 1-5

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__1_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES LOIS DE CERTAINES INTEGRALES

ASSOCIEES A DES MOUVEMENTS BROWNIENS

par Xavier FERNIQUE

0. Soit $(Z_k, k \in \mathbb{N})$ une suite de mouvements browniens séparables sur $[0, 1]$ indépendants ; on lui associe la suite $(U_k, k \in \mathbb{N})$ des fonctions aléatoires sur $[0, 1]$ définies par :

$$\forall t \in [0, 1], U_0(t) = \int_0^t dZ_0(s),$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, 1], U_{k+1}(t) = \int_0^t U_k(s) dZ_{k+1}(s);$$

on définit une suite $(a_k, k \in \mathbb{N})$ de variables aléatoires en posant :

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_k = U_k(1),$$

et on se propose d'étudier les lois des a_k ; il s'agit d'une étude technique utile pour la solution de certain problème probabiliste dont nous ne parlerons pas ici. Nous prouverons :

THEOREME. Les lois des a_k sont absolument continues ; la suite $(g_k, k \in \mathbb{N})$ des densités vérifie :

$$(0.1) \quad \lim_{|u| \rightarrow \infty} \frac{\log |\log(g_k(u))|}{\log |u|} = \frac{2}{k+1}.$$

1. Notations et lemmes préliminaires, schéma de la preuve.

Remarquons pour commencer qu'en notant $(\lambda_k, k \in \mathbb{N})$ une suite de v.a. gaussiennes centrées réduites indépendantes entre elles et des données précédentes, l'intégration partielle en $(dZ_{k+1}(s))$ fournit :

LEMME 1.1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, a_n a même loi que $\lambda_n V_n$ où V_n est défini par :

$$(1.1) \quad V_0 = 1, \quad V_n = \sqrt{\int_0^1 |U_{n-1}(s)|^2 ds} \quad \text{si } n > 0.$$

En fonction de ce lemme, la loi de a_n se calcule comme celle d'un produit de v.a. indépendantes dont l'une a une densité et l'autre n'a pas de charge à l'origine ; on en déduit :

LEMME 1.2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la loi de a_n est absolument continue et sa densité g_n vérifie :

$$(1.2) \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad g_n(u) = E \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(-\frac{u^2}{2V_n^2})}{V_n} \right\}$$

Dans ces conditions, tout le problème consiste à étudier la loi de V_n . En fait, pour des raisons techniques, nous associons à la suite $(g_n, n \in \mathbb{N})$ la suite légèrement modifiée $(h_n, n \in \mathbb{N})$ définie par :

$$(1.3) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall u > 0, \quad h_n(u) = E\{\psi_u(V_n)\},$$

$$(1.4) \quad \forall v > 0, \quad \forall u > 0, \quad \psi_u(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{v} \exp(-\frac{u^2}{2v^2}) \quad \text{si } v < u,$$

$$\psi_u(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} e} \frac{1}{u} \quad \text{si } v \geq u.$$

Un calcul simple de variations montre en effet :

LEMME 1.5. Pour tout $u > 0$, ψ_u est une fonction croissante sur \mathbb{R}^+ et on a :

$$(1.5) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad g_n(u) \leq h_n(u) \leq g_n(u) + \frac{1}{u\sqrt{2\pi}e} P\{V_n > u\}.$$

Dans ces conditions, le calcul qui fonde la preuve du théorème est le suivant : nous allons déterminer des suites de variables aléatoires positives et simples à évaluer $(X_n, n \in \mathbb{N})$, $(Y_n, n \in \mathbb{N})$ encadrant $(V_n, n \in \mathbb{N})$ au sens suivant :

$$(1.6) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P\{X_n \geq x\} \leq P\{V_n \geq x\} \leq n 2^n P\{Y_n \geq x\};$$

les formules (1.3) et (1.4) et le lemme 1.5 impliqueront alors :

$$(1.7) \quad n 2^n E\{\psi_u(Y_n)\} \geq g_n(u) \geq E\{\psi_u(X_n)\} - \frac{n 2^n}{u\sqrt{2\pi e}} P\{Y_n \geq u\}.$$

La formule (1.7) et les évaluations sur X et Y fourniront le résultat.

2. Construction de la suite Y .

Pour abréger le langage, nous utiliserons la notation suivante pour tout couple (V, W) de variables aléatoires et tout nombre $a > 0$:

$$V \ll_a W \iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad P\{V \geq x\} \leq aP\{W \geq x\}.$$

La formule (1.1) s'écrit alors pour tout $n \geq 2$:

$$V_n \ll \sup_{s \in [0,1]} \left| \int_0^s U_{n-2}(\sigma) dZ_{n-1}(\sigma) \right| = \sup_{s \in [0,1]} |U_{n-1}(s)|.$$

Pour évaluer la loi du supremum figurant au second membre de cette relation, on peut appliquer les inégalités de Levy : c'est en effet une borne supérieure de sommes partielles pour les accroissements de Z_{n-1} qui sont indépendants et symétriques ; en intégrant ensuite par rapport aux autres variables intervenant, on obtient :

$$\sup_{s \in [0,1]} |U_{n-1}(s)| \ll |U_{n-1}(1)| = |a_{n-1}| \ll |\lambda_{n-1}| V_{n-1};$$

Par récurrence et un calcul simple pour $n=1$, on en déduit pour tout $n \geq 1$:

$$V_n \ll \prod_{k=0}^{n-1} |\lambda_k| \ll |\lambda_0|^n.$$

Ceci justifie le résultat annoncé avec :

$$(2.1) \quad \forall n \geq 1, \quad Y_n = |\lambda_0|^n.$$

3. Construction de la suite X .

Nous fixons $n \geq 1$ et nous choisissons un élément f_0 de la boule uni-

té de $L^2\{[0, 1], ds\}$. Nous définissons une famille finie $(f_k, 1 \leq k \leq n)$ de fonctions sur $[0, 1]$ et une famille finie $(w_k, 1 \leq k \leq n)$ de variables aléatoires en posant :

$$\forall s \in [0, 1], f_k(s) = f_0(s) \int_s^1 f_{k-1}(t) dt,$$

$$w_k = \left| \int_0^1 f_{k-1}(s) U_{n-k}(s) ds \right|;$$

la formule (1.1) implique alors :

$$v_n \geq w_1;$$

par ailleurs, la définition de w_k fournit :

$$w_k = \left| \int_0^1 U_{n-k-1}(s) \left(\int_s^1 f_{k-1}(t) dt \right) dZ_{n-k}(s) \right|,$$

et par suite :

$$w_k \gg^1 |\lambda_{k-1}| \sqrt{\int_0^1 \left[U_{n-k-1}(s) \int_s^1 f_{k-1}(t) dt \right]^2 ds};$$

en répétant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ceci donne :

$$w_k \gg^1 |\lambda_{k-1}| w_{k+1},$$

et en regroupant ces inégalités :

$$v_n \gg^1 \left(\prod_{k=0}^{n-1} |\lambda_k| \right) \sigma,$$

où σ est un nombre qui s'évalue en fonction de f_0 ; en choisissant $f_0 = 1$,

on obtient par exemple :

$$\sigma = \sqrt{\int_0^1 \left(\int_s^1 f_{n-1}(t) dt \right)^2 ds} \geq \frac{1}{(n+1)!}.$$

Ceci justifie le résultat annoncé avec :

$$(3.1) \quad \forall n \geq 1, X_n = \frac{1}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n-1} |\lambda_k|.$$

4. Preuve du théorème.

L'existence des densités étant affirmée au lemme 1.2, il nous suffit de prouver la relation (0.1) ; elle est triviale au rang $k=0$, nous la prouvons aux rangs suivants.

4.1. Majoration des densités. L'inégalité (1.7) et la relation (2.1) impliquent :

$$\forall n \geq 1, \forall u \in \mathbb{R}, g_n(u) \leq n 2^n E\{\psi_{|u|}(|\lambda_0|^n)\},$$

on a évidemment :

$$E\{\psi_{|u|}(|\lambda_0|^n)\} \leq \int_{|\lambda| \geq |u|} \frac{1}{|\lambda|^{n+1}} \frac{\exp(-\frac{\lambda^2}{2})}{|u| \sqrt{2\pi e}} d\lambda + \int_{|\lambda| < |u|} \frac{1}{|\lambda|^{n+1}} \frac{\exp(-\frac{u^2}{2|\lambda|^{2n}})}{|\lambda|^n \sqrt{2\pi}} d\lambda,$$

ces deux intégrales se majorent facilement ; on obtient :

$$(4.1) \quad g_n(u) \leq n 2^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{|u|} \exp(-\frac{1}{2} |u|^{\frac{2}{n+1}}).$$

4.2. Minoration des densités. L'inégalité (1.7) et les relations (2.1) et (3.1) impliquent :

$$\forall n \geq 1, \forall u \in \mathbb{R}, g_n(u) \geq E\left\{\psi_{|u|}\left(\frac{\prod_{k=0}^{n-1} |\lambda_k|}{(n+1)!}\right)\right\} - \frac{n 2^n}{|u| \sqrt{2\pi e}} P\{|\lambda|^n > u\};$$

le dernier terme se majore usuellement ; quant au premier terme du second membre, on le minore efficacement en intégrant par exemple dans le seul domaine :

$$\forall k \in [0, n-1], |\lambda_k| \in \left[\frac{1}{2} |u|^{\frac{1}{n+1}}, \frac{3}{2} |u|^{\frac{1}{n+1}} \right],$$

on obtient :

$$(4.2) \quad E\left\{\psi_{|u|}\left(\frac{\prod_{k=0}^{n-1} |\lambda_k|}{(n+1)!}\right)\right\} \geq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \frac{2}{3\sigma} \exp\left(-\left\{\frac{2^{2n}}{2\sigma^2} + \frac{9}{8}\right\} |u|^{\frac{2}{n+1}}\right).$$

Les inégalités (4.1) et (4.2) fournissent bien le résultat annoncé.