Paul-André Meyer

Une question de théorie des processus

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 142

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__142_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1979/80

UNE QUESTION DE THEORIE DES PROCESSUS

par P.A. Meyer

Comme le titre l'indique, il ne s'agit pas ici d'un exposé, mais d'un problème. Ayant rédigé un cours de "géométrie différentielle stochastique", je me suis aperçu qu'on n'utilisait réellement que des intégrales stochastiques du type $\int f(s,X_s)dX_s$. Posons donc les définitions suivantes, en nous restreignant au cas continu pour simplifier.

DEFINITION 1. Soient U et V deux processus réels continus. On dit que U est intégrable par rapport à V s'il existe un processus W continu, nul en 0, tel que l'on ait pour t dyadique

$$W_t = \lim_k \sum_{i<2^{-k}} U_{it2^{-k}}(V_{(i+1)t2^{-k}} - V_{it2^{-k}}) \quad \text{en probabilité}$$

et l'on pose $W=U\cdot V$ ou $W_t = \int_0^t U_s dV_s$.

DEFINITION 2. Soit X un processus continu à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On dit que X est une hyposesquimartingale[1] si les conditions suivantes sont satisfaites :

1) Pour toute fonction de classe C^∞ v sur $\mathbb{R}^n$, toute fonction continue bornée u sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n$, l'intégrale stochastique

$$W_t = \int_0^t u(s,X_s)dv(X_s)$$

existe au sens de la définition 1.

2) Pour v fixée, cette intégrale stochastique est prolongeable aux fonctions boréliennes bornées u(s,x), avec un théorème de convergence dominée en probabilité (autrement dit, si des u_n convergent simplement vers 0 en restant bornées en valeur absolue, $(u_n(.,X)\cdot v(X))^*_t \rightarrow 0$ en probabilité pour tout t fini).

Si X et Y sont deux hyposesquimartingales, il n'y a aucune raison que X et Y soient compatibles , i.e. que le couple (X,Y) en soit une - toutes les semimartingales d'une même filtration sont des hsmartingales compatibles. Jeulin connaît des exemples simples de hsmartingales qui ne sont pas des semimartingales. Stricker sait montrer que toute hsmartingale (continue) déterministe est à variation finie. Par ailleurs, les hsmartingales continues ont beaucoup de propriétés des semimartingales continues : formule d'Ito, variation quadratique, etc.

<u>Peut on résoudre des équations différentielles stochastiques dans la classe des hsmartingales</u> ?

1. Sesqui=3/4. Il faut prendre hypo < 2/3 pour avoir hyposesqui < 1/2=Semi.