Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Jacques Azéma
Richard F. Gundy
Marc Yor

Sur l'intégrabilité uniforme des martingales continues

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 53-61
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__53_0>

SUR L'INTEGRABILITE UNIFORME DES MARTINGALES CONTINUES

J. AZEMA, R.F. GUNDY ET M. YOR

I. Introduction. Soit (X_t) une martingale continue définie sur un espace filtré $(\Omega,\underline{\underline{F}},(\underline{\underline{F}}_t),P)$; on note $(<X,X>_t)$ son processus croissant, $S(X) = \sqrt{<X,X>_\infty}$, $X^* = \sup_t |X_t|$. L'objet de cette note est de montrer le théorème suivant

THEOREME 1 : Si (X_t) est bornée dans L^1, chacune des deux conditions suivantes est nécessaire et suffisante pour que (X_t) soit uniformément intégrable

a) $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda P[X^* \geq \lambda] = 0$

b) $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda P[S(X) \geq \lambda] = 0$

On trouvera au paragraphe VI des contre-exemples simples montrant qu'on ne peut pas supprimer l'hypothèse : (X_t) est bornée dans L^1 ; en revanche, nous ne savons pas dire grand chose quand on supprime la continuité.

II. Dans ce paragraphe, nous allons montrer la partie a) du théorème ; plus exactement, remarquer que ce résultat se trouve déjà dans la littérature sous une forme légèrement différente. La proposition suivante est en effet un cas particulier d'un théorème de Rao [11] relatif aux quasimartingales, généralisant un résultat bien connu de Johnson et Helms sur les surmartingales positives ([9]).

PROPOSITION 2 : Soit (X_t) une martingale continue à droite, bornée dans L^1 ; on pose $R_n = \inf\{t ; |X_t| \geq n\}$.

(X_t) est uniformément intégrable si et seulement si

(1) $$\lim_{n\to\infty} E[|X|_{R_n} ; \{R_n < \infty\}] = 0$$

(Pour avoir le résultat de Rao, il faut remplacer "martingale bornée dans L^1" par "quasimartingale" et "uniformément intégrable" par "de la classe (D)"). Pour éviter au lecteur un déplacement dans une bibliothèque qui n'est pas nécessairement bien chauffée, nous donnerons la démonstration dans le cas simple qui nous occupe.

Démonstration : Si (X_t) est uniformément intégrable, elle est de la classe (D) et l'on peut écrire

$$E[|X|_{R_n} ; \{R_n < \infty\}] \leq \sup_{T\in\mathcal{C}} E[|X_T| ; \{T < \infty\} \cap \{|X_T| \geq n\}]$$

où $\mathcal{C}$ désigne l'ensemble des temps d'arrêt de la filtration ; on en déduit que la condition (1) est nécessaire ; inversement, supposons (1) satisfaite, et appelons (A_t) un processus croissant adapté intégrable tel que $(|X_t|-A_t)$ soit une martingale ; on a

$$E[|X_t| ; \{|X_t|\geq n\}] \leq E[|X_{R_n}| ; \{R_n\leq t\}] + E[(|X_t|-|X_{t\wedge R_n}|) ; \{R_n\leq t\}]$$

$$\leq E[|X_{R_n}| ; \{R_n<\infty\}] + E[(A_t-A_{t\wedge R_n}) ; \{R_n\leq t\}]$$

$$\leq E[|X_{R_n}| ; \{R_n<\infty\}] + E[A_\infty ; \{R_n<\infty\}],$$

de sorte que le premier membre tend uniformément vers zéro quand n tend vers l'infini, puisque $P(R_n<\infty) \underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 0$. □

La partie a) du théorème 1 est alors immédiate, quand on a remarqué que la condition (1) s'écrit $\lim\limits_{n\to\infty} nP[X^*\geq n] = 0$ dans le cas où (X_t) est continue.

Le théorème de Rao ne s'étend pas aux semi-martingales : on trouvera un contre-exemple plus loin. Pour l'instant, nous allons nous attacher à la partie b) du théorème en montrant que X^* et $S(X)$ ont même comportement en loi à l'infini.

II. L'inégalité des "bons λ". Dans ce paragraphe les données sont un espace de probabilité $(\Omega,\underline{F},P)$ et deux variables aléatoires positives f et g. Si h est une variable aléatoire positive, on notera $\sigma_h = \sup\limits_{\lambda>0} \lambda P[h\geq\lambda]$; $\ell_h = \overline{\lim\limits_{\lambda\to\infty}} \lambda P[h\geq\lambda]$

DEFINITION 3 : Soit $\Phi :]0,a] \to \mathbb{R}_+$ une fonction qui tend vers 0 quand x décroit vers 0 et β un réel > 1. On dit que le couple ordonné (f,g) satisfait à l'inégalité des "bons λ" relative au couple (β,Φ) si

$$(IB(\beta,\Phi)) : \forall\lambda > 0,\ \forall\delta\in]0,a],\quad P[f\geq\beta\lambda \ ;\ g<\delta\lambda] \leq \Phi(\delta)\ P[f\geq\lambda]$$

Il est bien connu qu'un des fondements des inégalités de Burkholder-Gundy ([7], [8]) est la conséquence suivante de $IB(\beta,\Phi)$: pour toute fonction $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, continue, croissante, à croissance lente, et nulle en 0, il existe une constante positive c, ne dépendant que du triplet (β,Φ,F) telle que :

$$E[F(f)] \leq c\ E[F(g)].$$

(Voir, à ce sujet, l'article de Burkholder [5]).

Nous nous intéressons, pour notre part, aux inégalités de distributions qui découlent de la définition 3.

PROPOSITION 4 : Etant donné un couple (β,Φ) il existe une constante $C_{(\beta,\Phi)} \geq 0$ telle que, pour tout couple (f,g) satisfaisant à $(IB(\beta,\Phi))$ on ait

$$(i)\ \sigma_f \leq C_{(\beta,\Phi)}\ \sigma_g \quad \text{et} \quad (ii)\ \ell_f \leq C_{(\beta,\Phi)}\ \ell_g$$

De plus, la constante $C_{(\beta,\Phi)} = \inf\limits_{\{\delta|\beta\Phi(\delta)<1\}} \dfrac{\beta}{\delta(1-\beta\Phi(\delta))}$ convient

Démonstration : Choisissons δ tel que $\beta\Phi(\delta) < 1$; on peut écrire

(2) $\quad P[f\geq\beta\lambda] \leq P[f\geq\beta\lambda\ ;\ g<\delta\lambda] + P[g\geq\delta\lambda] \leq \Phi(\delta)\, P[f\geq\lambda] + P[g\geq\delta\lambda]$

Posons $F(\lambda) = \lambda P[f \geq\lambda]$; on a, d'après ce qui précède :

$$F(\beta\lambda) \leq \beta\Phi(\delta)\, F(\lambda) + \beta/_{\delta}\, \sigma_g, \text{ ou encore } F(\lambda) \leq \beta\Phi(\delta)\, F(\lambda/_{\beta}) + \beta/_{\delta}\, \sigma_g$$

En itérant cette relation, on trouve que, pour tout entier n positif :

$$F(\lambda) \leq (\beta\Phi(\delta))^n\, F(\lambda/_{\beta^n}) + \frac{\beta\sigma_g}{\delta}(1 + \beta\Phi(\delta) +\ldots+ (\beta\Phi(\delta))^n)$$
$$\leq F(\frac{\lambda}{\beta^n}) + \frac{\beta\sigma_g}{\delta}\ \frac{1}{1-\beta\Phi(\delta)}$$

Faisons tendre n vers l'infini ; il vient

$$F(\lambda) \leq \frac{\beta\sigma_g}{\delta(1-\beta\Phi(\delta))}, \text{ ce qui démontre (i).}$$

Pour montrer (ii), on peut supposer $\ell_g < +\infty$, ce qui entraine $\sigma_g < +\infty$; on a donc $\ell_f \leq \sigma_f < +\infty$ d'après (i). Revenant alors à l'inégalité (2), on écrit

$$\ell_f \leq \beta\Phi(\delta)\, \ell_f + \beta/_{\delta}\, \ell_g \quad \text{d'où l'on tire (ii)}$$

Remarque : En pratique, la fonction Φ sera souvent de la forme $cx^p (c,p > 0)$. La constante $C_{(\beta,\Phi)}$ donnée dans la proposition 4 se calcule alors facilement et vaut

(3) $\quad C_{(\beta,c,p)} = \beta\frac{(p+1)}{p}\, (\beta c(p+1))^{1/p}$

IV. L'inégalité des bons λ entre variables terminales de processus croissants.

Voici une condition suffisante pour que les variables terminales de deux processus croissants optionnels satisfassent à l'inégalité des "bons λ". (Voir, par exemple, la démonstration du lemme 1 de Lenglart - Lépingle - Pratelli [10], dans ce volume).

PROPOSITION 5 : Soient p et a deux réels > 0, A et B deux processus croissants optionnels (resp. prévisibles) vérifiant

(4) $\quad E[(A_{T^-} - A_{S^-})^p] \leq a\, E[B^p_{T^-}\, 1_{\{S < T\}}]$

quelque soient les temps d'arrêt (resp. les temps d'arrêt prévisibles) S et T avec $S \leq T$, (on convient que $A_{0^-} = B_{0^-} = 0$)
Alors, pour tout $\beta > 1$, le couple ordonné (A_∞,B_∞) vérifie $IB_{(\beta,\Phi)}$ avec
$\Phi(\delta) = a\,\frac{\delta^p}{(\beta-1)^p}$

COROLLAIRE 6 : On a $\sigma_{A_\infty} \leq C^a_p \, \sigma_{B_\infty}$ et $\ell_{A_\infty} \leq C^a_p \, \ell_{B_\infty}$ avec

$$(5) \qquad C^a_p = a^{1/p} \left[\left(1 + \frac{1}{p}\right)^{1+\frac{1}{p}} p^{1/p} \right]^2$$

Démonstration : D'après la proposition 4, et la remarque qui la suit, on peut écrire $\sigma_{A_\infty} \leq C^a_{\beta,p} \, \sigma_{B_\infty}$, avec $C^a_{\beta,p} = \dfrac{\beta(p+1)}{p(\beta-1)} \, a^{1/p} \, [\beta(p+1)]^{1/p}$.

Un calcul élémentaire montre alors que $C^a_p = \inf\limits_{\beta > 1} C^a_{\beta,p}$.

En suivant toujours [10], nous allons montrer que l'on peut associer à une martingale (non nécessairement continue) des couples de processus croissants vérifiant (4). Les exemples que nous donnons sont inutilement généraux pour ce qui nous concerne, mais permettent d'avancer le travail pour le cas discontinu.

Soit (M_t) une martingale locale continue à droite vérifiant $|\Delta M| \leq D_-$, où D est un processus croissant adapté (D_{0-} n'est pas nécessairement nul). M est alors localement de carré intégrable, si bien que $<M,M>$ a un sens. Si (S,T) est un couple de temps d'arrêt, on applique l'inégalité de Doob à la martingale locale ${}^S M^T = (M_{(S+\cdot)\wedge T} - M_{S-}) \, 1_{\{S < T\}}$, et l'on en tire les inégalités suivantes

$$E\left[(M^*_{T-} - M^*_{S-})^2\right] \leq 4E\left[[M,M]_T \, 1_{\{S<T\}}\right] \leq 4E\left[([M,M]^{1/2}_{T-} + D_{T-})^2 \, 1_{\{S<T\}}\right]$$

$$E\left[(M^*_{T-} - M^*_{S-})^2\right] \leq 4E\left[(<M,M>_T + \Delta M^2_S) \, 1_{\{S<T\}}\right] \leq 8E\left[(<M,M>^{1/2}_{T-} + D_{T-})^2 \, 1_{\{S<T\}}\right]$$

$$E\left[[M,M]_{T-} - [M,M]_{S-}\right] \leq E\left[({}^S M^T)^{*2}_\infty\right] \leq 2E\left[(M^*_{T-} + D_{T-})^2 \, 1_{\{S<T\}}\right]$$

$$E\left[<M,M>_{T-} - <M,M>_{S-}\right] \leq E\left[({}^S M^{T*}_\infty)^2 + D^2_{S-} \; ; \; \{S<T\}\right] \leq 4E\left[(M^*_{T-} + D_{T-})^2 \; ; \; \{S<T\}\right]$$

Ainsi les couples ordonnés $((M_t)^*, [M,M]^{1/2}_t + D_t)$, $(M^*_t, <M,M>^{1/2}_t + D_t)$, $([M,M]^{1/2}_t, M^*_t + D_t)$, $(<M,M>^{1/2}_t, M^*_t + D_t)$ vérifient tous l'inégalité (4) pour $p = 2$, les valeurs de a étant respectivement 4,8,2,4.

Appliquons maintenant le corollaire 6. On a, puisque $C^a_2 = \frac{27}{4}\sqrt{a}$.

THEOREME 7 : Si (X_t) est une martingale locale continue, on a

$$\frac{4}{27\sqrt{2}} \, \sigma_{S(X)} \leq \sigma_{X^*} \leq \frac{27}{2} \, \sigma_{S(X)} \quad \text{et} \quad \frac{4}{27\sqrt{2}} \, \ell_{S(X)} \leq \ell_{X^*} \leq \frac{27}{2} \, \ell_{S(X)}$$

Il est clair que le théorème 1 est maintenant complètement démontré.

COMMENTAIRES : 1) Si X est une martingale continue bornée dans L^1 on a $\sigma_{X^*} < +\infty$; c'est l'inégalité maximale de Doob. Si maintenant $Y_t = \int_0^t H_s\, dX_s$ avec (H_t) prévisible borné, Y n'est pas nécessairement bornée dans L^1, mais, d'après le théorème 7, on a toujours $\sigma_{Y^*} < +\infty$ puisque $\sigma_{S(Y)} \leq \sigma_{S(X)}$. Ce résultat était déjà connu, même dans le cas discontinu. Voir Burkholder ([3], et [4] pour une inégalité "sharp").

2) De même, si X est maintenant uniformément intégrable, Y n'est pas nécessairement uniformément intégrable (ni même bornée dans L^1) mais vérifie $\ell_{Y^*} = 0$. On peut étendre cette remarque au cas des martingales conformes $Z = X + iY$ pour lesquelles les parties réelle et imaginaire, X et Y, vérifient $\langle X,X\rangle = \langle Y,Y\rangle$: si X est uniformément intégrable, $\ell_{Y^*} = 0$

VI. Quelques contre-exemples.

Les deux premiers contre-exemples que nous donnons illustrent le fait que dans le théorème 1, ni a) ni b) ne suffisent à entrainer l'intégrabilité uniforme de la martingale (X_t) si elle n'a pas été supposée bornée dans L^1.

1) Soient B_t un mouvement brownien réel issu de 0, Z une variable aléatoire ≥ 0 finie indépendante de (B_t) ; posons $T = \inf\{t \geq 0 \mid |B_t| \geq Z\}$, $X_t = B_{t \wedge T}$; X_t est une martingale pour sa filtration naturelle. On voit facilement que $X^* = Z$ d'une part, et que $\sup_{t > 0} E|X_t| = EZ$ d'autre part.
Choisissons Z telle que $\varlimsup_{\lambda\to\infty} \lambda P[Z \geq \lambda] = 0$ et $EZ = \infty$; la martingale (X_t) n'est pas uniformément intégrable quoiqu'elle vérifie a).

2) Toujours sous les mêmes hypothèses pour (B_t) et Z, prenons maintenant $T = Z$ et considérons la martingale $X_t = B_{t \wedge T}$. On a $\sqrt{\langle X,X\rangle_\infty} = \sqrt{Z}$. D'autre part, on peut écrire

$$\sup_t E|X_t| = \sup_t \int_{\mathbf{R}_+} P[T \wedge t \in da]\; E|B_a| = \sup_t \int_{\mathbf{R}_+} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{a}\; P[T \wedge t \in da]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sup_t E\sqrt{T \wedge t} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, E\sqrt{Z}$$

Il suffit alors de prendre Z telle que $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda P[\sqrt{Z} \geq \lambda] = 0$ et $E\sqrt{Z} = +\infty$ pour avoir un contre-exemple pour b), lorsque (X_t) n'est pas uniformément intégrable.

3) Le théorème de Rao ne s'étend pas aux semi-martingales ; appelons (X_t) une martingale continue uniformément intégrable mais telle que : $EX^* = +\infty$. Considérons la variable aléatoire honnête $L = \sup\{t ; |X_t| = X_t^*\}$. D'après un résultat de Barlow [2] et Yor [12], X est encore une semi-martingale dans la filtration grossie à l'aide de L. Restons dans cette filtration : (X_t) vérifie toujours (1) (qui ne dépend pas de la filtration) et pourtant n'est pas de la classe (D) puisque L est un temps d'arrêt pour lequel

$$E[|X_L|] = E[X^*] = \infty .$$

Cet exemple prouve également, c'est là une idée de Barlow, que la propriété de quasi-martingale n'est pas conservée par grossissement.

4) L'inégalité latérale de Burkholder ([6]) $E[\sup_t |X_t|^p] \leq C_p\, E[\sup_t X_t^p]$ valable pour $o < p < 1$ et (X_t) martingale locale continue, nulle en 0, peut laisser supposer qu'il se passe quelque chose de ce genre du côté de $p = o$. Il n'en est rien ; posons $\tilde{X} = \sup_t X_t$. Il est clair que le théorème 1 devient inexact quand on remplace X^* par $\tilde{X}$; pour s'en convaincre, il suffit de considérer la martingale bornée dans L^1 $X_t = B_{t \wedge T}$ où $T = \inf\{t\ ;\ X_t = 1\}$ $\tilde{X}$ est bornée et pourtant (X_t) n'est pas uniformément intégrable. Pour cette martingale, $\ell_{\tilde{X}} = o$ et $\ell_{X^*} > o$. Un peu plus subtil est le contre-exemple suivant : il prouve que l'on peut avoir $\sigma_{\tilde{X}} < +\infty$ et $\sigma_{X^*} = \infty$; considérons pour $a \geq o$ les temps d'arrêt $T_a = \inf\{t\ ;\ B_t = a\}$, une variable aléatoire Z indépendante de (B_t) et intéressons nous à la martingale $X_t = B_{t \wedge T_Z}$. Il est clair que $\tilde{X} = Z$. Posons $\underset{\sim}{X}_t = \inf_t X_t$; on peut écrire pour $\lambda \geq o$

$$\lambda P[\underset{\sim}{X} < -\lambda] = \int_{\mathbf{R}_+} \lambda P[Z \in da]\ P[\inf_t B_{t \wedge T_a} < -\lambda]$$

$$= \int_{\mathbf{R}_+} P[Z \in da]\ \frac{\lambda a}{\lambda + a} = E\left[\frac{\lambda Z}{\lambda + Z}\right]$$

(Pour ceux qui refusent de lire autre chose que les séminaires de Strasbourg, voir les dernières lignes de l'article [1]).

On a donc $\sup \lambda P[\underset{\sim}{X} < -\lambda] = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda P[\underset{\sim}{X} < -\lambda] = EZ$, d'où un contre-exemple quand on prend Z vérifiant $\sigma_Z < +\infty$, mais $EZ = +\infty$.

VII. <u>Cas des sous-martingales</u>. Supposons que (X_t) soit une sous-martingale locale prévisible et appelons (A_t) le processus croissant prévisible nul à l'origine tel que $(X_t - A_t)$ soit une martingale locale.

Pour tout couple de temps d'arrêt (S,T) avec $S \leq T$ on a

$$E[A_T - A_S] \leq 2E[X_T^*\ ;\ \{S < T\}]$$

Il n'en pas difficile d'en déduire que le couple de processus croissants $((A_t),(X_t^*))$ vérifie (4) et l'on en déduit les inégalités

(6) $\quad \sigma_{A_\infty} \leq 32\, \sigma_{X^*}\ ;\ \ell_{A_\infty} \leq 32\, \ell_{X^*}$

Appliquons ces résultats aux sous-martingales locales $(|M_t|)$ ou (M_t^+), quand (M_t) est une martingale locale continue, nulle en 0 : les processus croissants continus (A_t), nuls en 0, qui sont respectivement associés à chacune de ces sous-martingales sont (L_t^o) et $(\frac{1}{2} L_t^o)$, où (L_t^o) désigne le temps local en 0 de (M_t). On déduit donc de (6), en notant $\tilde{M} = \sup_t M_t$:

(7) $\sigma_{(L_\infty^o)} \leq 32\, \sigma_{M^*}$; $\ell_{(L_\infty^o)} \leq 32\, \ell_{M^*}$.

(8) $\sigma_{(L_\infty^o)} \leq 64\, \sigma_{\tilde{M}}$; $\ell_{(L_\infty^o)} \leq 64\, \ell_{\tilde{M}}$.

Nous estimons maintenant, à la manière du théorème 7, $\sigma_{\tilde{M}}$ et $\ell_{\tilde{M}}$.

THEOREME 8 : <u>Soit</u> (M_t) <u>une martingale locale continue nulle en</u> 0. <u>On note</u> $\tilde{M} = \sup_t M_t$, <u>et</u> $N_t = \int_0^t 1_{(M_s>o)} dM_s$ $(t \geq o)$ (rappelons que

$$S(N)_t = \left(\int_0^t 1_{(M_s>o)}\, d\langle M,M\rangle_s\right)^{1/2}).$$

Alors :

(9) $\frac{1}{2}\sigma_{\tilde{M}} \leq \sigma_{N^*} \leq 66\, \sigma_{\tilde{M}}$.

(10) $\frac{4}{27\sqrt{2}}\sigma_{S(N)} \leq \sigma_{N^*} \leq \frac{27}{2}\sigma_{S(N)}$.

<u>Les mêmes inégalités sont vraies lorsque l'on remplace le symbole</u> σ <u>par</u> ℓ.

<u>Démonstration</u> : (10) n'est qu'une réécriture du théorème 7 avec $X = N$.

Pour montrer (9), on utilise la formule de Tanaka :

$$M_t^+ = \int_0^t 1_{(M_s>o)} dM_s + \frac{1}{2} L_t^o = N_t + \frac{1}{2} L_t^o,$$

où (L_t^o) désigne le temps local en 0 de M.

Il découle aisément de cette formule que $\frac{1}{2} L_t^o = \sup_{(s\leq t)} (N_s^-)$, et donc :

$\tilde{M} \leq 2N^*$, ce qui entraine $\frac{1}{2}\sigma_{\tilde{M}} \leq \sigma_{N^*}$. D'après la même formule, on a :

$N^* \leq \tilde{M} + \frac{1}{2} L_\infty^o$, d'où l'on déduit aisément, d'après (8), $\sigma_{N^*} \leq 66\, \sigma_{\tilde{M}}$

Pour clore cette discussion, remarquons qu'il existe une martingale locale continue (M_t), nulle en 0, telle que $\sigma_{(L^o_\infty)} < \infty$, mais $\sigma_{\tilde{M}} = \infty$. En effet, si la condition : $\{\sigma_{(L^o_\infty)} < \infty\}$ entraînait : $\{\sigma_{\tilde{M}} < \infty\}$, elle entraînerait aussi (après échange de M en (-M)) $\{\sigma_{M^*} < \infty\}$. Or, cette dernière implication est fausse, comme on le voit aisément à partir du contre-exemple qui termine le paragraphe VI, et du théorème de Paul Lévy indiquant que les processus $(S_t - B_t, S_t)$ et $(|B_t|, L_t)$ ont même loi (ici, $S_t = \sup_{s\leq t} B_s$; (L_t) est le temps local en 0 du mouvement brownien réel (B_t), issu de $x = o$).

Remarque finale : Avec les notations du théorème 8, on a :

$\frac{1}{2} L^o_t = \sup_{(s\leq t)} (N^-_s)$. On sait donc, à l'aide de ce théorème, et de la formule de Tanaka appliquée à (N^-_t) estimer précisément $\sigma_{(L^o_\infty)}$ et $\ell_{(L^o_\infty)}$ à l'aide des quantités analogues associées au suprémum d'une martingale locale continue, ou de la racine carrée de la variable terminale de son processus croissant.

REFERENCES :

[1] J. AZEMA ET M. YOR : Une solution simple au problème de Skorokhod. Sém. de Probabilités XIII. Lect. Notes in Maths. 721. Springer (1979).

[2] M.T. BARLOW : Study of a filtration expanded to include an honest time. Z. für Wahr. 44, 307-323, 1978.

[3] D.L. BURKHOLDER : Martingale transforms. Ann. Math. Statist. 37, 1494-1504, 1966.

[4] D.L. BURKHOLDER : A sharp inequality for martingale transforms. Preprint.

[5] D.L. BURKHOLDER : Distribution function inequalities for martingales. Ann. Probability 1, 19-42, 1973.

[6] D.L. BURKHOLDER : One-sided maximal functions and H^p. Journal of Funct. Analysis. 18, 429-454, 1975.

[7] D.L. BURKHOLDER AND R.F. GUNDY : Extrapolation and interpolation of quasi-linear operators on martingales. Acta Math. 124, 249-304, 1970.

[8] D.L. BURKHOLDER AND R.F. GUNDY : Distribution function inequalities for the area integral. Studia Math. 44, 527-544, 1972.

[9] G. JOHNSON AND L.L. HELMS : Class (D) supermartingales. Bull. Amer. Math. Soc ; 69, 59-62, 1963.

[10] E. LENGLART, D. LEPINGLE, ET M. PRATELLI : Présentation unifiée des inégalités en théorie des martingales. Dans ce volume.

[11] M. RAO : Quasi-martingales. Math. Scand. 24 (1969), 79-92.

[12] M. YOR : Grossissement d'une filtration et semi-martingales : théorèmes généraux. Sém. de Probabilités XII. Lect. Notes in Maths. 649.Springer (1978).