ÉRIK LENGLART

Tribus de Meyer et théorie des processus

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 500-546
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__500_0>

TRIBUS DE MEYER
ET
THEORIE DES PROCESSUS

par E. Lenglart

INTRODUCTION

Lorsqu'une filtration $\mathbb{F}$ n'est ni continue à droite, ni complétée, l'étude de ses (sur) martingales fortes optionnelles est facilitée par l'introduction de la tribu engendrée par les processus càdlàg indistinguables de processus $\mathbb{F}$-optionnels. Cette tribu n'est pas, en général, une tribu optionnelle, mais est située entre les tribus prévisible et optionnelle de la filtration vérifiant les "conditions habituelles" associée à $\mathbb{F}$.

Dans un premier temps, nous reprenons tous les concepts de la théorie générale des processus, mais sous un angle différent. Nous partons non d'une filtration sur Ω, mais d'une tribu $\underline{\underline{A}}$ sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, engendrée par une famille de processus càdlàg contenant $(t,\omega)\to t$ et stable par arrêt $X \to X^t$ en tout $t \in \mathbb{R}_+$. Nous appelons tribu de Meyer une tribu vérifiant ces conditions. Nous montrons qu'on peut, à partir d'une tribu de Meyer $\underline{\underline{A}}$, développer tous les concepts de la théorie générale des processus introduits par P.A. MEYER et son école: filtration associée à $\underline{\underline{A}}$, temps d'arrêt de $\underline{\underline{A}}$, puis, après introduction d'une probabilité, théorèmes de section, de projection, de projection duale. Cette partie suit de très près l'article de C. DELLACHERIE "Sur les théorèmes fondamentaux de la théorie générale des processus"[1], mais le point de vue adopté est différent, et plus maniable pour les applications.

La seconde partie, qui s'appuie fortement sur la première, est consacrée à la théorie générale des (sur)martingales. Après avoir introduit la notion de $\underline{\underline{A}}$-(sur)martingale, nous élucidons complètement leur structure: régularité des trajectoires, théorème de modification, décomposition de Mertens. A cette occasion, nous introduisons la notion fondamentale de co-$\underline{\underline{A}}$-martingale: si $\mathbb{F}$ est la filtration vérifiant les "conditions habituelles" associée à la filtration $\mathbb{F}^a$ de $\underline{\underline{A}}$, les co-$\underline{\underline{A}}$-martingales sont les $\mathbb{F}$-martingales L, purement discontinues, vérifiant $E[L_T|\underline{\underline{F}}^a_T]=L_{T-}$, pour tout temps d'arrêt T de $\underline{\underline{A}}$. Toute $\underline{\underline{A}}$-martingale M se décompose alors, de façon unique, en $M=L_-+N$, où L est une co-$\underline{\underline{A}}$-martingale locale, et N une $\mathbb{F}$-martingale locale (au sens habituel, donc càdlàg) $\underline{\underline{A}}$-mesurable. Si, par exemple, $\underline{\underline{A}}$ est la tribu prévisible de $\mathbb{F}$, les co-$\underline{\underline{A}}$-martingales sont les martingales purement discontinues; si $\underline{\underline{A}}$ est la tribu optionnelle d'une filtration complète $\mathbb{G}$,les co-$\underline{\underline{A}}$-martingales bornées dans L^2sont les éléments de l'espace vectoriel fermé dans $\underline{\underline{M}}^2$, engendré par les martingales de la forme $xI_{[\![t,+\infty[\![}$, où $t\in\mathbb{R}_+$ et $x\in L^2(\underline{\underline{G}}_{t+})\ominus L^2(\underline{\underline{G}}_t)$. Les "martingales de saut" de Lejan sont un cas particulier de co-$\underline{\underline{A}}$-martingales [5]. Nous devons beaucoup au volume 2 de Probabilité et Potentiel de Dellacherie-Meyer, qui nous a guidé dans notre recherche. Nous en profitons pour remercier ses deux co-auteurs, pour leurs conseils et leur aide amicale.

La dernière partie est consacrée à l'étude des semimartingales dans notre cadre. Nous montrons qu'à l'exception du caractère continu à droite, qu'il faut abandonner (et remplacer par "làdlàg"), tous les théorèmes de structure connus, démontrés sous les conditions habituelles sont encore valides. Nous montrons enfin que l'intégrale stochastique peut se développer de manière, ô surprise!, très simple: on peut développer un bon calcul intégral stochastique, pour les processus làdlàg X tels que X_+ soit une $\mathbb{F}$-semimartingale, où $\mathbb{F}$ est une filtration vérifiant les conditions habituelles (ce qui est le cas de tous les processus étudiés ici). Cette intégrale stochastique vérifie, de plus, des conditions du type: si X est une $\underline{\underline{A}}$-semimartingale (resp. $\underline{\underline{A}}$-martingale locale), et si f est prévisible localement borné, $\int f\,dX$ est une $\underline{\underline{A}}$-semimartingale (resp. $\underline{\underline{A}}$-martingale locale). Les théorèmes usuels de la théorie des équations différentielles stochastiques restent valides dans ce cadre.

I <u>THEORIE ABSTRAITE</u> (<u>sans probabilité</u>).

Ω est un ensemble donné, fixé une fois pour toute.

DEFINITIONS 0. Nous appelons <u>temps</u>, toute application $T:\Omega\to[0,+\infty]$. Si T est un temps, nous notons $[\![T,+\infty[\![$ l'ensemble, appelé intervalle stochastique, égal à $\{(t,\omega)\in\mathbb{R}_+\times\Omega\ ,\ T(\omega)\leq t\}$. Les autres types d'intervalles stochastiques sont définis de façon similaire. Nous noterons $[\![T]\!]$ l'ensemble $\{(t,\omega)\in\mathbb{R}_+\times\Omega\ ,\ T(\omega)=t<+\infty\}$, et dirons que c'est le <u>graphe</u> de T. Si B est une partie de Ω, nous notons T_B le temps qui vaut T sur B et $+\infty$ sur B^c.

Nous appelons <u>processus</u> toute application $X:\ \mathbb{R}_+\times\Omega\to\mathbb{R}$.

DEFINITIONS 1.- Si $\underline{\underline{A}}$ est une tribu sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, nous dirons qu'un temps T est:

- un temps de coupe de $\underline{\underline{A}}$, si l'ensemble $[\![T, +\infty[\![$ appartient à $\underline{\underline{A}}$.
- un temps de stabilité de $\underline{\underline{A}}$, si, pour tout processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable X, le processus arrété en T, X^T, est encore $\underline{\underline{A}}$-mesurable.
- un temps d'arrèt de $\underline{\underline{A}}$, si T est à la fois un temps de coupe de $\underline{\underline{A}}$ et un temps de stabilité de $\underline{\underline{A}}$.

Nous verrons, plus loin, que pour les tribus considérées ici, les notions de temps de coupe et de temps d'arrèt se confondent. Nous les avons cependant introduites, car, dans un cadre plus général, ces notions sont distinctes.

Les temps d'arrèt de $\underline{\underline{A}}$ sont caractérisés par la propriété suivante: un temps T est un temps d'arrêt de $\underline{\underline{A}}$, si et seulement si, pour tout processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable X, le processus $X_T I_{[\![T,+\infty[\![}$ est $\underline{\underline{A}}$-mesurable.

Voici le type fondamental de tribu étudiée ici.

DEFINITION 2.Nous dirons qu'une tribu $\underline{\underline{A}}$, sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, est une tribu de Meyer si :

1°) $\underline{\underline{A}}$ est engendrée par des processus càdlàg (continus à droite et ayant des limites à gauche).
2°) $\underline{\underline{A}}$ contient la tribu"déterministe" $\underline{\underline{B}}_{\mathbb{R}} \times \{\emptyset,\Omega\}$.
3°) Si X est un processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, X^t est $\underline{\underline{A}}$-mesurable.

Remarquons qu'avec le langage introduit dans la définition I, les conditions 2°) et 3°) se résument en : les temps constants sont des temps d'arrèt de $\underline{\underline{A}}$.

EXEMPLES. Rappelons qu'une filtration $\mathbb{F}$ sur Ω,est une famille croissante de tribus ($\underline{\underline{F}}_t$) sur Ω, indéxée par $\mathbb{R}_+ \cup \{0-\}$ (0- est un symbole, et l'on fait la convention $0- < 0$).
On dit qu'un processus X est $\mathbb{F}$-adapté si, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, X_t est $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable.
La tribu optionnelle de $\mathbb{F}$, notée $\mathbb{O}(\mathbb{F})$, est la tribu, sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, engendrée par les processus càdlàg $\mathbb{F}$-adaptés.
La tribu prévisible de $\mathbb{F}$, notée $\mathbb{P}(\mathbb{F})$, est la tribu, sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, engendrée par les processus continus $\mathbb{F}$-adaptés X, tels que X_0 est $\underline{\underline{F}}_{0-}$-mesurable.
Les tribus $\mathbb{P}(\mathbb{F})$ et $\mathbb{O}(\mathbb{F})$ sont des tribus de Meyer, et $\mathbb{P}(\mathbb{F})$ est incluse dans $\mathbb{O}(\mathbb{F})$. On sait que les temps d'arrêt de $\mathbb{O}(\mathbb{F})$ sont les temps T tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,l'ensemble $\{T \leq t\}$ appartient à $\underline{\underline{F}}_t$, c'est à dire les temps d'arrèt de la filtration $\mathbb{F}$. Les temps d'arrèt de $\mathbb{P}(\mathbb{F})$ sont par définition, les temps d'arrèt prévisibles de $\mathbb{F}$.

Dans toute la suite $\underline{\underline{A}}$ désigne une tribu de Meyer.

FILTRATION ASSOCIEE. Si $t\in\mathbb{R}_+$, on appelle $\underline{\underline{F}}_t^a$ la tribu sur Ω, engendrée par les applications X_t, X décrivant l'ensemble des processus $\underline{\underline{A}}$-mesurables. Les temps constants étant des temps de stabilité de $\underline{\underline{A}}$, on vérifie aisément que la famille $(\underline{\underline{F}}_t^a)$ est croissante. On pose $\underline{\underline{F}}_{0-}^a = \underline{\underline{F}}_0^a$ et on appelle filtration de $\underline{\underline{A}}$ la famille $(\underline{\underline{F}}_t^a)_{t\in\mathbb{R}_+\cup\{0-\}}$. On note $\mathbb{F}^a$ cette filtration et $\underline{\underline{F}}_\infty^a$ la tribu $\bigvee_t \underline{\underline{F}}_t^a$.

THEOREME 1. La tribu $\underline{\underline{A}}$ est située entre les tribus prévisible et optionnelle de sa filtration. Réciproquement, une tribu, sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$, engendrée par des processus càdlàg, est une tribu de Meyer si elle est située entre les tribus prévisible et optionnelle d'une filtration.

DEMONSTRATION. La tribu $\underline{\underline{A}}$ étant engendrée par des processus càdlàg, il est clair qu' elle est incluse dans $\mathbb{O}(\mathbb{F}^a)$. La tribu prévisible de $\mathbb{F}^a$ est engendrée par les processus de la forme $xI_{]t,+\infty[}$, où x est une application $\underline{\underline{F}}_{t-}^a$-mesurable ($\underline{\underline{F}}_{t-}^a = \bigvee_{s<t}\underline{\underline{F}}_s^a$) et $xI_{[0,+\infty[}$, x appartenant à $\underline{\underline{F}}_0^a$. Il est clair qu'elle est alors engendrée par les processus $xI_{[t,+\infty[}$, où x est $\underline{\underline{F}}_u^a$-mesurable et $u<t$ (sauf pour $t=0$, auquel cas $u=0$). Soit $xI_{[t,+\infty[}$ un tel processus; comme x est aussi $\underline{\underline{F}}_t^a$-mesurable, on peut trouver un processus X $\underline{\underline{A}}$-mesurable tel que $x = X_t$, et donc $xI_{[t,+\infty[} = X_t I_{[t,+\infty[}$ est $\underline{\underline{A}}$-mesurable. On a donc prouvé que $\mathbb{P}(\mathbb{F}^a)$ est incluse dans $\underline{\underline{A}}$.
Montrons la réciproque. Soit $\underline{\underline{B}}$ une tribu située entre les tribus prévisible et optionnelle d'une filtration $\mathbb{F}$. Montrons que les temps constants sont des temps d'arrêt de $\underline{\underline{B}}$. Si X est un processus $\underline{\underline{B}}$-mesurable et $t\in\mathbb{R}_+$, $X_t I_{[\![t,+\infty[\![}$ est égal à $XI_{[\![t]\!]} + X_t I_{]\!]t,+\infty[\![}$. Le processus $X_t I_{]\!]t,+\infty[\![}$ est prévisible, donc $\underline{\underline{B}}$-mesurable, et il est clair que $XI_{[\![t]\!]}$ est $\underline{\underline{B}}$-mesurable , $[\![t]\!]$ étant prévisible. Le temps constant t est donc un temps d'arrêt de $\underline{\underline{B}}$.

Nous noterons $\mathbb{F}^{a+}$ la filtration définie par $\underline{\underline{F}}_t^{a+} = \underline{\underline{F}}_{t+}^a = \bigcap_{s>t}\underline{\underline{F}}_s^a$ si $t\in\mathbb{R}_+$ et $\underline{\underline{F}}_{0-}^{a+} = \underline{\underline{F}}_{0-}^a = \underline{\underline{F}}_0^a$.

THEOREME 2. 1°) Les temps de stabilité de $\underline{\underline{A}}$ sont les temps d'arrêt de la filtration $\mathbb{F}^{a+}$.
2°) T est un temps d'arrêt de $\underline{\underline{A}}$ si et seulement si T est un temps de coupe de $\underline{\underline{A}}$.

DEMONSTRATION. 1°) Soit T un temps de stabilité de $\underline{\underline{A}}$. Le processus déterministe $X_t = t$, est $\underline{\underline{A}}$-mesurable, et donc, pour tout t, $X_t^T = t\wedge T$ est $\underline{\underline{F}}_t^a$-mesurable, ce qui implique le résultat. Réciproquement, soit T un temps d'arrêt de $\mathbb{F}^{a+}$. Si X est un processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable, on a

$X^T = XI_{[\![0,T]\!]} + X_T I_{]\!]T,+\infty[\![}$. La tribu prévisible de $\mathbb{F}^{a+}$ étant égale à la tribu prévisible de $\mathbb{F}^a$, X^T est $\underline{\underline{A}}$-mesurable car $[\![0,T]\!]$ et $X_T I_{]\!]T,+\infty[\![}$ sont prévisibles, donc $\underline{\underline{A}}$-mesurables. Le 2°) résulte immédiatement du 1°).

COROLLAIRE 1.1°) <u>Les temps d'arrêt de $\underline{\underline{A}}$ sont les temps</u> T <u>tels que</u> $[\![T,+\infty[\![$ <u>appartienne à $\underline{\underline{A}}$</u>.
2°) <u>Les temps de stabilité de $\underline{\underline{A}}$ sont les temps</u> T <u>tels que</u> $]\!]T,+\infty[\![$ <u>appartienne à $\underline{\underline{A}}$</u>.

DEFINITION. Si A est une partie de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, on appelle <u>début de</u> A, le temps D_A défini par $D_A(\omega) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+,\ (t,\omega) \in A\}$ $(\inf \emptyset = +\infty)$

COROLLAIRE 2. <u>Soit</u> $A \in \underline{\underline{A}}$. <u>Si le début de</u> A <u>est un temps de stabilité de $\underline{\underline{A}}$ dont le graphe est inclus dans</u> A, <u>alors c'est un temps d'arrêt de $\underline{\underline{A}}$</u>.

DEMONSTRATION. $[\![D_A,+\infty[\![\; = A \cup]\!]D_A,+\infty[\![$.

THEOREME 3. <u>La tribu $\underline{\underline{A}}$ est engendrée par les intervalles stochastiques</u> $[\![0,T[\![$, <u>où</u> T <u>décrit l'ensemble des temps d'arrêt de $\underline{\underline{A}}$</u>.

DEMONSTRATION. Soit $\underline{\underline{B}}$ la tribu engendrée par les intervalles stochastiques $[\![0,T[\![$, où T décrit les t.a. (temps d'arrêt) de $\underline{\underline{A}}$. Il est clair que $\underline{\underline{B}}$ est incluse dans $\underline{\underline{A}}$. Réciproquement, considérons un processus X càdlàg et $\underline{\underline{A}}$-mesurable. Nous allons adapter la démonstration de D-M [3] p.197, à laquelle nous renvoyons pour les détails. Soit $\varepsilon > 0$. Considérons la suite de temps (T_n) définie par récurrence: $T_0 = 0$, T_{n+1} est le début de l'ensemble $A_n =]\!]T_n,+\infty[\![\cap \{|X - X^{T_n}| \geq \varepsilon$ ou $|X_- - X^{T_n}_-| \geq \varepsilon\}$, où X_- désigne le processus càg X_{t-} (avec $X_{0-} = X_0$). On montre alors que, pour tout n, T_n est un t.a. de $\mathbb{F}^a$. D'après les résultats précédents et le fait que X_- est prévisible, on voit que A_n est $\underline{\underline{A}}$-mesurable. Le lecteur vérifiera que A_n est à coupes fermées, et donc que $[\![T_{n+1}]\!]$ est inclus dans A_n, ce qui prouve, d'après le corollaire 2, que les temps T_n sont des t.a. de $\underline{\underline{A}}$. Si X^ε désigne le processus $\sum_n X_{T_n} I_{[\![T_n,T_{n+1}[\![}$, X^ε approche uniformément X à ε près; il suffit donc de montrer que X^ε est $\underline{\underline{A}}$-mesurable. On est donc ramené à montrer que si X est un processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable et T un t.a. de $\underline{\underline{A}}$, le processus $X_T I_{[\![T,+\infty[\![}$ est $\underline{\underline{B}}$-mesurable. Si X est l'indicatrice d'un ensemble $\underline{\underline{A}}$-mesurable A, en appelant B l'ensemble A_T $(= \{\omega, (T(\omega),\omega) \in A\})$, on voit que $X_T I_{[\![T,+\infty[\![}$, qui est $\underline{\underline{A}}$-mesurable, est égal à $I_{[\![T_B,+\infty[\![}$; d'où l'on déduit que T_B est un t.a. de $\underline{\underline{A}}$ et donc que $X_T I_{[\![T,+\infty[\![}$ est $\underline{\underline{B}}$-mesurable. Le résultat s'ensuit par un argument de limite monotone.

DEFINITIONS. Nous dirons qu'un <u>processus</u> X <u>défini sur</u> $[0,+\infty] \times \Omega$ <u>est $\underline{\underline{A}}$-mesurable</u> si et seulement si sa restriction à $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ est $\underline{\underline{A}}$-mesurable et X_∞ est $\underline{\underline{F}}^a_\infty$-mesurable.

Si T *est un temps, nous appelons* $\underline{\underline{F}}^a_T$ *la tribu sur* Ω, *engendrée par les applications* X_T *où* X *décrit l'ensemble des processus* $\underline{\underline{A}}$*-mesurables, définis sur* $[0,+\infty]\times\Omega$.

THEOREME 4.1°) *Si* S *et* T *sont deux temps de stabilité de* $\underline{\underline{A}}$ *tels que* $S\leq T$, *on a* $\underline{\underline{F}}^a_S\subset\underline{\underline{F}}^a_T$.
2°) *Si* T *est un temps d'arrêt de* $\underline{\underline{A}}$, *on a* $\underline{\underline{F}}^a_T = \{A\in\underline{\underline{F}}^a_\infty,\ T_A$ est un t.a.de $\underline{\underline{A}}\}$

DEMONSTRATION. Le 1°) est évident. Montrons le 2°). Soit T un t.a. de $\underline{\underline{A}}$. Si A est $\underline{\underline{F}}^a_\infty$-mesurable et tel que T_A soit un t.a. de $\underline{\underline{A}}$, soit X le processus égal à $I_{[\![T_A,+\infty[\![}$, prolongé à l'infini par $X_\infty = I_A$. Le processus X est $\underline{\underline{A}}$-mesurable et $X_T = I_A$, ce qui prouve que A appartient à $\underline{\underline{F}}^a_T$. Réciproquement, si A appartient à $\underline{\underline{F}}^a_T$ et si Y est un processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable tel que $I_A=Y_T$, on a, pour tout processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable X: $X_{T_A} I_{[\![T_A,+\infty[\![} = (XY)_T I_{[\![T,+\infty[\![}$; ceci, joint au fait que T est un t.a. de $\underline{\underline{A}}$, prouve que T_A est un t.a. de $\underline{\underline{A}}$.

REMARQUE. Si T est un t.a. *fini* de $\underline{\underline{A}}$, on a $\underline{\underline{F}}^a_T = \{A\in\Omega,\ T_A$ t.a. de $\underline{\underline{A}}\}$.

Nous laissons au lecteur le soin d'établir le corollaire suivant

COROLLAIRE.1°) *Si* T *est un t.a. de* $\underline{\underline{A}}$ *et* S *un temps de stabilité de* $\underline{\underline{A}}$, *l'ensemble* $\{S<T\}$ *est* $\underline{\underline{F}}^a_S$ *et* $\underline{\underline{F}}^a_T$ *mesurable.*
2°) *Si* S *et* T *sont deux t.a. de* $\underline{\underline{A}}$, *les ensembles* $\{S\leq T\}$, $\{S<T\}$, $\{S=T\}$ *sont* $\underline{\underline{F}}^a_S$ *et* $\underline{\underline{F}}^a_T$ *mesurables.*
3°) *Si* S *et* T *sont deux t.a. de* $\underline{\underline{A}}$ *et* $A\in\underline{\underline{F}}^a_S$, *les ensembles* $A\cap\{S\leq T\}$, $A\cap\{S<T\}$ *et* $A\cap\{S=T\}$ *sont* $\underline{\underline{F}}^a_T$*-mesurables.*

REMARQUE. Si $\underline{\underline{A}}$ est la tribu optionnelle d'une filtration $\mathbb{F}$, et T est un t.a. de $\underline{\underline{A}}$ (i.e. de $\mathbb{F}$), la tribu $\underline{\underline{F}}^a_T$ est alors égale à la tribu $\{A\in\underline{\underline{F}}_\infty :\ \forall t\ A\cap\{T\leq t\}\in\underline{\underline{F}}_t\}$ habituellement notée $\underline{\underline{F}}_T$.
Si $\underline{\underline{A}}$ est la tribu prévisible de $\mathbb{F}$, la tribu $\underline{\underline{F}}^a_T$ est notée $\underline{\underline{F}}_{T-}$. On pourra vérifier que, pour $t>0$, on a $\underline{\underline{F}}_{t-} = \bigvee_{s<t}\underline{\underline{F}}_s$, ce qui justifie l'appellation, et que $\underline{\underline{F}}_{T-}$ est la tribu engendrée par $\underline{\underline{F}}_{0-}$ et les ensembles $A\cap\{t<T\}$, $t\geq 0$, $A\in\underline{\underline{F}}_t$, si T est un t.a. de $\mathbb{F}$.

II. THEORIE PROBABILISTE. LES THEOREMES FONDAMENTAUX.

Nous allons montrer, dans ce chapitre, qu'après introduction d'une probabilité, une tribu de Meyer satisfait aux théorèmes de section, de projection et de projection duale. Les démonstrations consistent essentiellement à montrer que l'on peut se ramener aux théorèmes de Dellacherie, énoncés dans son article "Sur les théorèmes fondamentaux de la théorie générale des processus" [1]. Pour cela, nous introduirons la notion fondamentale de P-*complétée d'une tribu de Meyer*.

Nous considérons maintenant un <u>espace probabilisé</u> $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$. Nous ne perdrons pas de généralité en le supposant <u>complet</u>. <u>Les tribus étudiées seront toujours supposées, implicitement, incluses dans la tribu produit</u> $\underline{\underline{B}}_{\mathbb{R}} \times \underline{\underline{F}}$, <u>appelée tribu des processus mesurables</u>. Un <u>temps aléatoire</u> sera un $^+$temps $\underline{\underline{F}}$-mesurable. Les temps aléatoires sont les temps d'arrêt de $\underline{\underline{B}}_{\mathbb{R}_+} \times \underline{\underline{F}}$, qui est une tribu de Meyer.

§ 1. LE THEOREME DE SECTION.

DEFINITION 1. Un ensemble de temps aléatoires V est un <u>système d'arrêt</u> si il vérifie les conditions suivantes:

a) V est stable pour les "sup" et "inf" finis.

b) V est stable pour les limites le long des suites croissantes.

c) 0 et $+\infty$ appartiennent à V.

d) Si S et T appartiennent à V, alors $S_{\{S<T\}}$ appartient à V.

Le lecteur vérifiera que l'ensemble des temps d'arrêt d'une tribu de Meyer est un système d'arrêt qui, de plus, <u>contient les temps constants et est stable pour les limites le long des suites décroissantes stationnaires</u> (une suite (T_n) de temps, est dite stationnaire si, pour tout ω, la suite $(T_n(\omega))$ est constante à partir d'un certain rang).

Si V est un système d'arrêt, <u>on notera</u> $\underline{\underline{A}}_V$ <u>la tribu engendrée par les intervalles stochastiques</u> $[\![0,T[\![$, T <u>décrivant</u> V.

Si A est une partie mesurable de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, nous notons p(A) sa <u>projection sur</u> Ω, qui est $\underline{\underline{F}}$-mesurable, $\underline{\underline{F}}$ étant complète; l'ensemble A est dit <u>évanescent</u> si sa projection est négligeable. Deux processus X et Y sont dits <u>indistinguables</u> si l'ensemble $\{X \neq Y\}$ est évanescent.

THEOREME DE SECTION 0. <u>Soit</u> V <u>un système d'arrêt</u>. <u>Si</u> A <u>appartient à</u> $\underline{\underline{A}}_V$, <u>pour tout</u> $\varepsilon>0$, <u>on peut trouver un temps</u> $T\in V$ <u>vérifiant la condition</u>: $\{T<+\infty\} = $ p.s. $\{\omega: (T(\omega),\omega)\in A\}$ <u>et</u> $P[p(A)] \leq P[T<+\infty]+\varepsilon$.

DEMONSTRATION. Soit $\bar{V}$ l'ensemble des temps aléatoires égaux p.s. à des temps de V. $\bar{V}$ forme encore un système d'arrêt et est saturé pour l'égalité presque sure; il satisfait donc aux hypothèses du théorème général de section de Dellacherie [0]. Il est clair que $\underline{\underline{A}}_{\bar{V}}$ contient $\underline{\underline{A}}_V$. Soient $A\in\underline{\underline{A}}_V$ et $\varepsilon>0$. Il existe alors un temps S de $\bar{V}$, dont le graphe est inclus dans A et tel que $P[p(A)] \leq P[S<+\infty]+\varepsilon$. Il suffit de choisir un temps $T\in V$ égal p.s. à S.

THEOREME DE SECTION 1. <u>Soit</u> $\underline{\underline{A}}$ <u>une tribu de Meyer</u>. <u>Si</u> A <u>appartient à</u> $\underline{\underline{A}}$, <u>pour tout</u> $\varepsilon>0$, <u>on peut trouver un temps d'arrêt</u> T <u>de</u> $\underline{\underline{A}}$, <u>dont le graphe est inclus dans</u> A, <u>et tel que</u> $P[p(A)] \leq P[T<+\infty]+\varepsilon$.

DEMONSTRATION. Nous avons vu que l'ensemble V des temps d'arrêt de $\underline{\underline{A}}$ est un système d'arrêt et que $\underline{\underline{A}}$ est égale à $\underline{\underline{A}}_V$ (th.3,I). Soient $A\varepsilon\underline{\underline{A}}$ et $\varepsilon>0$. Soit S un t.a. de $\underline{\underline{A}}$ tel que l'ensemble $\{S<+\infty\}$ est égal p.s. à $B=\{\omega: (S(\omega),\omega)\varepsilon A\}$. L'ensemble B est $\underline{\underline{F}}^a_S$-mesurable, et donc $T=S_B$ est un t.a. de $\underline{\underline{A}}$ égal p.s. à S et dont le graphe est inclus dans $\underline{\underline{A}}$.

COROLLAIRE. Soit $\underline{\underline{A}}$ une tribu de Meyer. Si X et Y sont deux processus $\underline{\underline{A}}$-mesurables tels que, pour tout temps d'arrêt borné T de $\underline{\underline{A}}$, on ait $X_T\leq Y_T$ p.s. (resp. $X_T=Y_T$ p.s.), alors l'ensemble $\{X>Y\}$ est évanescent (resp. X et Y sont indistinguables).

§2. TRIBU P-COMPLETE, P-COMPLETEE D'UNE TRIBU.

Dans toute la suite, $\underline{\underline{A}}$ désigne une tribu de Meyer incluse dans $\underline{\underline{B}}_{\mathbb{R}_+}\times\underline{\underline{F}}$.

THEOREME ET DEFINITION 2. Les propositions suivantes sont équivalentes.

a) Tout temps égal p.s. à un temps d'arrêt de $\underline{\underline{A}}$ est un temps d'arrêt de $\underline{\underline{A}}$.
b) Tout processus càdlàg indistinguable d'un processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable est $\underline{\underline{A}}$-mesurable.
c) Tout processus mesurable indistinguable d'un processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable est $\underline{\underline{A}}$-mesurable.

Si $\underline{\underline{A}}$ vérifie ces propositions, nous dirons que $\underline{\underline{A}}$ est P-complète.

DEMONSTRATION. L'implication c)$\Rightarrow$b) est évidente car tout processus càdlàg indistinguable d'un processus mesurable est lui-même mesurable. Montrons b)$\Rightarrow$a): soit T un temps égal p.s. à un temps d'arrêt S de $\underline{\underline{A}}$. Le processus $I_{[\![T,+\infty[\![}$ est indistinguable du processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable (càdlàg) $I_{[\![S,+\infty[\![}$, et donc est $\underline{\underline{A}}$-mesurable, ce qui prouve que T est un temps d'arrêt de $\underline{\underline{A}}$. Montrons a)$\Rightarrow$c): soit X un processus mesurable élémentaire de la forme $I_F I_{[\![t,+\infty[\![}$, où $F\varepsilon\underline{\underline{F}}$. Si X est indistinguable d'un processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable Y, X est alors indistinguable du processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable $Y_t I_{[\![t,+\infty[\![}$ et on peut supposer que Y_t est l'indicatrice d'un élément A de $\underline{\underline{F}}^a_t$. Le temps t_F est alors égal p.s. au temps t_A et donc est un t.a. de $\underline{\underline{A}}$. Par suite X (égal à $I_{[\![t_F,+\infty[\![}$) est $\underline{\underline{A}}$-mesurable. On en déduit aisément le résultat (cf. la démonstration du th. 5)

Revenons à notre tribu $\underline{\underline{A}}$, qui n'est pas nécessairement P-complète.

DEFINITION. Nous appelons $\underline{\underline{A}}^P$ la tribu engendrée par les intervalles stochastiques $[\![0,T[\![$, où T est un temps égal p.s. à un temps d'arrêt de $\underline{\underline{A}}$.

On voit immédiatement que $\underline{\underline{A}}^P$ est encore une tribu de Meyer. Un argument de classe monotone montre que tout processus $\underline{\underline{A}}^P$-mesurable *est indistinguable d'un processus* $\mathcal{A}$*-mesurable*. Si $\mathcal{A}$ est P-complète, on a évidemment $\mathcal{A}=\mathcal{A}^P$; nous allons voir que, de manière générale, $\mathcal{A}^P$ est P-complète (ce n'est pas évident!).

Appelons $\bar{V}$ l'ensemble des temps égaux p.s. à des temps d'arrêt de $\mathcal{A}$. Avec cette définition, nous avons $\mathcal{A}^P = \mathcal{A}_{\bar{V}}$.

LEMME. *L'ensemble* $\bar{V}$ *est un système d'arrêt stable pour les limites le long des suites décroissantes stationnaires.*

DEMONSTRATION. Nous avons déjà vu que $\bar{V}$ est un système d'arrêt. Soit (T_n) une suite décroissante stationnaire de temps de $\bar{V}$. Soit (S^n) une suite de t.a. de $\mathcal{A}$ tels que, pour tout n, S^n soit égal p.s. à T_n. Nous pouvons supposer que la suite (S^n) est décroissante. Pour tout n, posons $A_n = \bigcap_{m\geq n}\{S^n=S^m\}$. L'ensemble A_n appartient à $\mathcal{F}^a_{S^n}$, et donc $S'_n = S^n_{A_n}$ est un t.a. de $\mathcal{A}$. La suite (S'_n) est décroissante et stationnaire, et admet donc pour limite un t.a. de $\mathcal{A}$, noté S. Il est clair qu'alors T est égal presque surement à S.

THEOREME 3. *Un temps* T *est un temps d'arrêt de* $\mathcal{A}^P$ *si et seulement si il est égal p.s. à un temps d'arrêt de* $\mathcal{A}$.

DEMONSTRATION. Il nous faut donc montrer que $\bar{V}$ est l'ensemble des t.a. de $\mathcal{A}^P$. Il est clair que $\bar{V}$ est un ensemble de t.a. de $\mathcal{A}^P$. Soit T un temps d'arrêt de $\mathcal{A}^P$. On a vu qu'alors $[\![T,+\infty[\![$ et $]\!]T,+\infty[\![$ appartiennent à $\mathcal{A}^P$(I,th.2,Cor.1); par différence, on voit que $[\![T]\!]$ appartient à $\mathcal{A}^P$. Montrons, plus généralement, que si T est un temps dont le graphe appartient à $\mathcal{A}^P$, alors T appartient à $\bar{V}$ (et donc, est un t.a. de $\mathcal{A}^P$). Appliquons le théorème de section 0 à $[\![T]\!]$. Soit (S_n) une suite de temps de $\bar{V}$ tels que $[\![S_n]\!]$ soit inclus dans $[\![T]\!]$ et $P[T<+\infty]$ soit majoré par $P[S_n<+\infty]+2^{-n}$. La suite (R_n), définie par $R_n=\inf_{i\leq n}S_i$ est décroissante stationnaire. D'après le lemme précédent, sa limite R est un temps de $\bar{V}$ égal p.s. à T. Le système $\bar{V}$ étant saturé pour l'égalité presque sure, T appartient à $\bar{V}$.

REMARQUE. La démonstration montre, en particulier, que *si* $\mathcal{A}$ *est* P-*complète, un temps* T *est un temps d'arrêt de* $\mathcal{A}$ *si et seulement si* $[\![T]\!]$ *appartient à* $\mathcal{A}$.

COROLLAIRE 1. *La tribu* $\mathcal{A}^P$ *est* P-*complète*.

DEMONSTRATION. Le théorème 3 montre, à l'évidence, que l'ensemble des temps d'arrêt de $\mathcal{A}^P$ est saturé pour l'égalité presque sure.

COROLLAIRE 2. *La tribu* $\mathcal{A}^P$ *est engendrée par les processus càdlàg* (resp. *mesurables*) *indistinguables de processus* $\mathcal{A}$*-mesurables*.

DEFINITION. *Nous dirons que* $\mathcal{A}^P$ *est la* P-*complétée de* $\mathcal{A}$.

NOTATION. Si $\underline{\underline{G}}$ est une sous tribu de $\underline{\underline{F}}$, nous notons $\overline{\underline{\underline{G}}}$ la tribu engendrée par $\underline{\underline{G}}$ et les ensembles négligeables de $\underline{\underline{F}}$.

THEOREME 4. Si T est un temps d'arrêt de $\underline{\underline{A}}^P$, $\underline{\underline{F}}_T^{a^P}$ est égale à $\overline{\underline{\underline{F}}}_T^a$.[1]

DEMONSTRATION. Si T est un temps borné, tout processus $\underline{\underline{A}}^P$-mesurable étant indistinguable d'un processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable, il est clair que $\underline{\underline{F}}_T^{a^P}$ est incluse dans $\overline{\underline{\underline{F}}}_T^a$. On en déduit que $\underline{\underline{F}}_\infty^{a^P}$ est incluse dans $\overline{\underline{\underline{F}}}_\infty^a$, et donc que, pour tout temps T, $\underline{\underline{F}}_T^{a^P}$ est incluse dans $\overline{\underline{\underline{F}}}_T^a$. Soit T un temps d'arrêt de $\underline{\underline{A}}^P$; soit S un t.a. de $\underline{\underline{A}}$ qui lui est égal p.s. . Il est clair que $\overline{\underline{\underline{F}}}_S^a$ est égale à $\overline{\underline{\underline{F}}}_T^a$. Soit A un élément de $\overline{\underline{\underline{F}}}_T^a$; si B est un élément de $\underline{\underline{F}}_S^a$ qui lui est égal p.s., T_A est égal p.s. à S_B qui est un t.a. de $\underline{\underline{A}}$. Par suite T_A est un t.a. de $\underline{\underline{A}}^P$ et donc (I,Th.4), A est $\underline{\underline{F}}_T^{a^P}$-mesurable.

EXEMPLES. Soit $\mathbb{F}$ une filtration sur Ω, constituée de sous tribus de $\underline{\underline{F}}$.
1°) Si $\mathbb{F}$ est continue à droite, la P-complétée de sa tribu optionnelle est la tribu optionnelle de $\overline{\mathbb{F}}$ (qui vérifie les conditions habituelles) (Voir D-M[3],p.193)
2°) La P-complétée de la tribu prévisible de $\mathbb{F}$ est la tribu prévisible de $\overline{\mathbb{F}}$, qui est égale à la tribu prévisible de $\overline{\mathbb{F}}^+$, où l'on a posé $\overline{\underline{\underline{F}}}_{0-}^+$ égale à $\overline{\underline{\underline{F}}}_{0-}$. (D-M [3], p. 213).
3°) Si $\mathbb{F}$ n'est pas continue à droite, la P-complétée de sa tribu optionnelle n'est pas, en général, un tribu optionnelle:

Si la P-complétée de $\mathbb{O}(\mathbb{F})$ était une tribu optionnelle, ce ne pourrait être que la tribu optionnelle de sa filtration $\overline{\mathbb{F}}$. Tout t.a. de $\overline{\mathbb{F}}$ serait alors égal p.s. à un t.a. de $\mathbb{F}$, ce qui n'est pas en général (on peut montrer, par contre, que tout t.a. de $\overline{\mathbb{F}}$ est égal p.s. à un t.a. de $\mathbb{F}^+$, la réciproque étant évidemment fausse D-M [3], p. 193): considérons, sur un "bon" espace, une filtration $\mathbb{F}$, continue à gauche. D'aprè le " test de Galmarino"(D-M,[3], p.234), tout t.a. de $\mathbb{F}$ est prévisible. La tribu optionnelle de $\mathbb{F}$ est donc égale à la tribu prévisible de $\mathbb{F}$. La P-complétée de $\mathbb{O}(\mathbb{F})$ est donc la tribu prévisible de $\overline{\mathbb{F}}$, différente de la tribu optionnelle de $\overline{\mathbb{F}}$, en général, car celle-ci peut posséder des t.a. totalement inaccessibles.

THEOREME 5. Une tribu engendrée par des processus càdlàg est une tribu de Meyer P-complète si, et seulement si, elle est située entre les tribus prévisible et optionnelle d'une filtration vérifiant les conditions habituelles.

---

[1] $\underline{\underline{F}}_T^{a^P}$ désigne la "valeur en T" de la filtration associée à $\underline{\underline{A}}^P$.

DEMONSTRATION. Si $\underline{\underline{A}}$ est une tribu de Meyer P-complète, elle est comprise entre les tribu prévisible et optionnelle de sa filtration, qui est "P-complète" (égale à $\bar{\mathbb{F}}^a$). Elle est alors située entre les tribus optionnelle et prévisible de la filtration $\mathbb{F}^{a+}$, qui vérifie les conditions habituelles. Réciproquement, soit $\underline{\underline{B}}$ une tribu située entre les tribus prévisible et optionnelle d'une filtration $\mathbb{F}$ vérifiant les conditions habituelles. Montrons que tout processus mesurable indistinguable d'un processus $\underline{\underline{B}}$-mesurable est $\underline{\underline{B}}$-mesurable. Par différence, il suffit de montrer que tout processus mesurable indistinguable de 0 est $\mathbb{P}(\mathbb{F})$-mesurable. Soit X un tel processus; posons $A = \{\omega : \exists t\ X_t(\omega) \neq 0\}$. Comme A est négligeable, il est $\underline{\underline{F}}_{0-}$-mesurable. Soit $\underline{\underline{C}}$ la tribu engendrée par les processus mesurables à trajectoires nulles hors de A; il est clair que $\underline{\underline{C}}$ est engendrée par les processus mesurables élémentaires, de ce type. Si $Y = yI_{[t,+\infty[}$ est nul hors de A, il est clair que y est $\underline{\underline{F}}_{0-}$-mesurable, et donc, que Y est prévisible.

§3. CLASSIFICATION DES TEMPS ALEATOIRES.

DEFINITION. Un temps aléatoire T est dit $\underline{\underline{A}}$-accessible s'il existe une suite (T_n) de t.a. de $\underline{\underline{A}}$ telle que l'on ait: $P[\bigcup_n \{T_n = T < +\infty\}] = P[T < +\infty]$. Un temps aléatoire T est dit totalement $\underline{\underline{A}}$-inaccessible si l'on a $P[S = T < +\infty] = 0$, pour tout t.a. S de $\underline{\underline{A}}$.

Remarquons que la P-complétée de $\underline{\underline{A}}$ donne la même classification que $\underline{\underline{A}}$ aux temps aléatoires. Nous notons $\underline{\underline{T}}(\underline{\underline{A}})$ l'ensemble des t.a. de $\underline{\underline{A}}$.

THEOREME 6. Soit $\underline{\underline{B}}$ une tribu de Meyer contenant $\underline{\underline{A}}$. Si T est un temps d'arrêt de $\underline{\underline{B}}$, il existe une partition, essentiellement unique, de $\{T < +\infty\}$, en deux ensembles A et I, $\underline{\underline{F}}^b_T$-mesurables, tels que T_A soit un t.a. de $\underline{\underline{B}}$ $\underline{\underline{A}}$-accessible, et T_I un t.a. de $\underline{\underline{B}}$ totalement $\underline{\underline{A}}$-inaccessible.

DEMONSTRATION. Soit T un t.a. de $\underline{\underline{B}}$. Si S est un t.a. de $\underline{\underline{A}}$, S est un t.a. de $\underline{\underline{B}}$ car l'ensemble $[\![S,+\infty[\![$ appartient à $\underline{\underline{A}}$, donc à $\underline{\underline{B}}$; l'ensemble $\{S = T < +\infty\}$ est donc $\underline{\underline{F}}^b_T$-mesurable. Soit $\underline{\underline{H}} = \{\bigcup_n \{S_n = T < +\infty\}, (S_n) \in \underline{\underline{T}}(\underline{\underline{A}})^{\mathbb{N}}\}$; les éléments de $\underline{\underline{H}}$ sont $\underline{\underline{F}}^b_T$-mesurables et $\underline{\underline{H}}$ est stable pour les réunions dénombrables. Si A est un représentant de ess.sup $\underline{\underline{H}}$, et I est son complémentaire dans $\{T < +\infty\}$, on vérifie aisément que ces ensembles conviennent. L'unicité essentielle est évidente.

REMARQUE. En particulier, tout temps aléatoire se décompose, de manière essentiellement unique, en un temps aléatoire $\underline{\underline{A}}$-accessible, et un temps aléatoire totalement $\underline{\underline{A}}$-inaccessible. Cette classification dépend évidemment de la probabilité de référence.

THEOREME 7. *Soit A un ensemble $\underline{\underline{A}}$-mesurable dont presque toutes les coupes sont dénombrables. L'ensemble A est alors indistinguable d'une réunion dénombrable et disjointe de graphes de temps d'arrêt de $\underline{\underline{A}}$.*

DEMONSTRATION. On sait que A est indistinguable d'une réunion dénombrable de graphes de temps aléatoires (D [0], p.137). Soit (T_n) une telle suite de temps aléatoires. Appelons T_n^a (resp. T_n^i) la partie $\underline{\underline{A}}$-accessible (resp. totalement $\underline{\underline{A}}$-inaccessible) de T_n. Soit (S^n) une suite de t.a. de $\underline{\underline{A}}$ telle que $\bigcup_n [\![T_n^a]\!]$ soit indistinguable de $\bigcup_n [\![S^n]\!]$. L'ensemble $\underline{\underline{A}}$-mesurable $A\setminus\bigcup_n [\![S^n]\!]$ est indistinguable de $\bigcup_n [\![T_n^i]\!]$; il est donc évanescent d'après le théorème de section. L'ensemble A est donc indistinguable de l'ensemble $\bigcup_n A\cap[\![S^n]\!]$ égal à $\bigcup_n [\![S_n']\!]$, où l'on a posé $S_n' = S^n_{A_{S^n}}$. Pour rendre disjointe cette réunion, il suffit de poser $[\![U_n]\!] = [\![S_n']\!]\setminus\bigcup_{p<n}[\![S_p']\!]$.

REMARQUE. Si $\underline{\underline{A}}$ est P-complète, on a vu que si les coupes de A ont au plus un point, A est le graphe d'un t.a. de $\underline{\underline{A}}$; de même, si les coupes de A sont dénombrables, A est égal à une réunion dénombrable de graphes de t.a. de $\underline{\underline{A}}$.

§ 4. LE THEOREME DE PROJECTION.

THEOREME DE PROJECTION 8. *Si X est un processus mesurable borné, il existe un processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable Y, unique à l'indistinguabilité près, vérifiant: pour tout t.a. T de $\underline{\underline{A}}$, on a* $Y_T I_{\{T<+\infty\}} = E[X_T I_{\{T<+\infty\}}|\underline{\underline{F}}^a_T]$.

On notera ${}^aX$ ce processus, et on l'appellera la $\underline{\underline{A}}$-projection de X.

DEMONSTRATION. Quitte à démontrer le théorème pour $\underline{\underline{A}}^P$, et prendre ensuite pour $\underline{\underline{A}}$-projection de X un processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable indistinguable de la $\underline{\underline{A}}^P$-projection de X, on peut supposer que $\underline{\underline{A}}$ est P-complète. La tribu $\underline{\underline{A}}$ est alors située entre les tribus prévisible et optionnelle d'une filtration $\mathbb{F}$ vérifiant les conditions habituelles. Nous recopions alors la démonstration de Dellacherie [1]. Le théorème de projection sous les conditions habituelles, permet de projeter les processus mesurables bornés sur $\mathbb{O}(\mathbb{F})$. On est donc ramené à projeter sur $\underline{\underline{A}}$ les processus optionnels bornés. Par un raisonnement de classe monotone, on voit qu'il suffit de savoir projeter les intervalles stochastiques $[\![0,T[\![$, où T est un t.a. de $\mathbb{F}$. Si T est un t.a. de $\mathbb{F}$, $[\![0,T]\!]$ est prévisible et sa projection doit lui être égale; il reste à savoir projeter $[\![T]\!]$. Si T^a et T^i désignent respectivement les t.a. de $\mathbb{F}$ $\underline{\underline{A}}$-accessible et totalement $\underline{\underline{A}}$-inaccessible associés à T, on a alors $[\![T]\!] = [\![T^a]\!] + [\![T^i]\!]$. Nécessairement, la projection de $[\![T^i]\!]$ doit être nulle. Il reste à projeter $[\![T^a]\!]$. Soit (S_n) une suite de t.a. de $\underline{\underline{A}}$, à

graphes disjoints, tels que $[\![T^a]\!] = \bigcup_n [\![T]\!] \cap [\![S_n]\!]$. Il suffit donc de savoir projeter $[\![T]\!] \cap [\![S_n]\!]$ égal à $[\![T_{\{T=S_n\}}]\!]$ qui est inclus dans $[\![S_n]\!]$. On est donc ramené à la situation suivante: projeter un t.a. T dont le graphe est inclus dans le graphe d'un t.a. S de $\underline{\underline{A}}$. Considérons alors la mesure L définie sur $\underline{\underline{B}}_{\mathbb{R}_+} \times \underline{\underline{F}}$, par $L[X] = E[X_S I_{\{S<+\infty\}}]$. Une projection de $[\![T]\!]$ sur $\underline{\underline{A}}$ est fournie par une version de l'espérance conditionnelle de $[\![T]\!]$ par rapport à L et à la tribu $\underline{\underline{A}}$, nulle hors du graphe de S.
On a donc établi l'existence d'une projection sur $\underline{\underline{A}}$. L'unicité est immédiate à partir du théorème de section.

On pourrait démontrer, en reprenant les mêmes arguments que ceux utilisés dans la démonstration du th.48, ch. VI de D-M [4], le résultat suivant

THEOREME 9. <u>Un processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable borné</u>[1] X <u>a presque surement ses trajectoires limitées à droite</u> (resp. <u>à gauche</u>) <u>si et seulement si</u> $E[X_{T^n}]$ <u>converge, pour toute suite décroissante</u> (resp. <u>croissante</u>) <u>et uniformément bornée</u> (T^n) <u>de temps d'arrêt de</u> $\underline{\underline{A}}$.

COROLLAIRE. <u>Si un processus mesurable borné a presque surement ses trajectoires limitées à droite</u> (resp. <u>à gauche</u>), <u>il en est de même pour sa</u> $\underline{\underline{A}}$<u>-projection</u>.

<u>Complément au théorème de projection</u>.

Ce complément nous sera essentiel par la suite.

DEFINITION. Soit X un processus mesurable. Si T est un t.a. de $\underline{\underline{A}}$, nous dirons que X <u>est</u> $\underline{\underline{A}}$<u>-projetable en</u> T si $E[|X_T| I_{\{T<+\infty\}} | \underline{\underline{F}}^a_T]$ est fini p.s.

THEOREME 10. <u>Soit</u> X <u>un processus mesurable</u>. <u>Il existe un processus</u> $\underline{\underline{A}}$<u>-mesurable</u> Y <u>tel qu'en tout t.a.</u> T <u>de</u> $\underline{\underline{A}}$ <u>où</u> X <u>est</u> $\underline{\underline{A}}$<u>-projetable, on a</u>: $Y_T I_{\{T<+\infty\}} = E[X_T I_{\{T<+\infty\}} | \underline{\underline{F}}^a_T]$ p.s. .

DEMONSTRATION. Par différence, il suffit de montrer ce résultat quand X est positif. Soit (X^n) une suite de processus mesurables bornés positifs croissant vers X. Pour tout n, soit Y^n la $\underline{\underline{A}}$-projection de X^n. Il suffit alors de poser $Y = (\liminf Y^n) I_{\{\liminf Y^n < +\infty\}}$.

DEFINITION. <u>Un processus mesurable est dit</u> $\underline{\underline{A}}$<u>-projetable si et seulement s'il est</u> $\underline{\underline{A}}$<u>-projetable en tout temps d'arrêt de</u> $\underline{\underline{A}}$.

---

[1] la démonstration montre, en fait, que si X_T est intégrable pour tout t.a. borné T et si $E[X_{T^n}]$ converge pour toute suite décroissante (resp. croissante) uniformément bornée de t.a. de $\underline{\underline{A}}$, alors X est p.s. à trajectoires limitées à droite (resp. à gauche).

COROLLAIRE. Soit X un processus mesurable $\underline{\underline{A}}$-projetable. Il existe un processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable Y, unique à l'indistinguabilité près, tel que, pour tout t.a. T de $\underline{\underline{A}}$, on a : $Y_T I_{\{T<+\infty\}} = E[X_T I_{\{T<+\infty\}} | \underline{\underline{F}}^a_T]$ p.s.

On notera encore ${}^aX$ ce processus, et il sera appelé la $\underline{\underline{A}}$-projection de X.

THEOREME 11. Soit X un processus mesurable. S'il existe une suite (T_n) croissante p.s. vers $+\infty$ de temps de stabilité de $\underline{\underline{A}}$ tels que, pour tout n, X^{T_n} soit $\underline{\underline{A}}$-projetable, alors X est $\underline{\underline{A}}$-projetable.

DEMONSTRATION. Soit T un t.a. de $\underline{\underline{A}}$. La mesure $L^n = |X^{T_n}_T| I_{\{T<+\infty\}}.P$ est σ-finie sur $\underline{\underline{F}}^a_T$ et concentrée sur $\{T<+\infty\}$. Les ensembles $A_n = \{T \leq T_n\}$ recouvrent $\{T<+\infty\}$ et sont $\underline{\underline{F}}^a_T$ mesurables. Sur A_n, la mesure $|X_T| I_{\{T<+\infty\}}.P$ appelée L, coincide avec L^n. On en déduit que la mesure L est σ-finie sur $\underline{\underline{F}}^a_T$, ce qui prouve que X est projetable en T.

Du théorème de projection, on déduit un théorème général de modification.

THEOREME DE MODIFICATION 12. Soit X un processus mesurable. Il existe un processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable Y tel que, pour tout t.a. T de $\underline{\underline{A}}$ tel que $X_T I_{\{T<+\infty\}}$ soit $\bar{\underline{\underline{F}}}^a_T$-mesurable, on ait $X_T = Y_T$ p.s. sur $\{T<+\infty\}$.

DEMONSTRATION. C'est un conséquence immédiate du théorème 10.

§ 4 . LE THEOREME DE PROJECTION DUALE.

THEOREME 13. Un processus càdlàg X est $\underline{\underline{A}}^P$-mesurable si, et seulement si, il vérifie les deux conditions

a) Pour tout t.a. fini T de $\underline{\underline{A}}$, X_T est $\bar{\underline{\underline{F}}}^a_T$-mesurable.

b) Pour tout temps de stabilité T de $\underline{\underline{A}}$ totalement $\underline{\underline{A}}$-inaccessible, $\Delta X_T = 0$ p.s. .

Le processus X vérifie alors $\Delta X_T = 0$ p.s. pour tout temps aléatoire totalement $\underline{\underline{A}}$-inaccessible T.

DEMONSTRATION. Montrons que les conditions sont nécessaires. Considérons un processus càdlàg $\underline{\underline{A}}^P$-mesurable X (donc indistinguable d'un processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable). Il est clair que X vérifie la condition a). Montrons b). L'ensemble $\{\Delta X \neq 0\}$ est à coupes dénombrables; il est indistinguable d'un ensemble $A \in \underline{\underline{A}}$ qui est donc égal, à un évanescent près, à un réunion dénombrable de graphes de t.a. de $\underline{\underline{A}}$. Si T est un temps aléatoire totalement $\underline{\underline{A}}$-inaccessible, $[\![T]\!] \cap \{\Delta X \neq 0\}$ est donc évanescent. Montrons que ces deux conditions sont suffisantes. La condition a) indique que X est adapté à $\mathbb{F}^{a^P}$; appelons $\mathbb{F}$ la filtration $\mathbb{F}^{a^P}{}_+$. Le processus X_- est $\underline{\underline{A}}^P$-mesurable car $\mathbb{F}$-prévisible. Il reste à voir que ΔX est

$\underline{\underline{A}}^P$-mesurable. Soit (T_n) une suite de t.a. de $\mathbb{F}$ épuisant les sauts de X; d'après la condition b), on peut les supposer $\underline{\underline{A}}$-accessibles. On peut alors trouver une suite (S^n) de t.a. de $\underline{\underline{A}}$, à graphes disjoints telle que X est indistinguable de $Z = \sum_n X_{S^n} I_{[\![S^n]\!]}$. D'après a) et le fait que X_- est $\underline{\underline{A}}^P$-mesurable, Z est $\underline{\underline{A}}^P$-mesurable. Le processus X, étant càdlàg et indistinguable de $X_- + Z$ qui est $\underline{\underline{A}}^P$-mesurable, est donc $\underline{\underline{A}}^P$-mesurable.

CONVENTION. Un processus mesurable positif A, est appelé <u>croissant continu à droite</u> (en abrégé, càd) si <u>presque toutes ses trajectoires</u> sont croissantes et continues à droite. Nous précisons "continu à droite" car nous rencontrerons souvent par la suite, des processus à trajectoires croissantes non continues à droite. Nous dirons que A est <u>intégrable</u> si A_∞ est intégrable. On notera ΔA tout processus mesurable ($\underline{\underline{A}}$-mesurable si A l'est) dont presque toutes les trajectoires sont égales aux trajectoires des sauts de A.

LEMME. <u>Si A et B sont deux processus croissants càd intégrables $\underline{\underline{A}}$- mesurables, vérifiant</u> $E[\int_0^\infty X_s\, dA_s] = E[\int_0^\infty X_s\, dB_s]$ <u>pour tout processus X $\underline{\underline{A}}$-mesurable borné, alors A et B sont indistinguables.</u>

DEMONSTRATION. Nous pouvons supposer que $\underline{\underline{A}}$ est P-complète. Si T est un t.a. de $\mathbb{F} = \mathbb{F}^{a+}$, on obtient, en considérant le processus $X = I_{[\![0,T]\!]}$, $E[A_T] = E[B_T]$, ce qui prouve que A-B est une $\mathbb{F}$-martingale à variation finie. Posons $A_{0-} = B_{0-} = 0$. Pour tout t.a. T de $\underline{\underline{A}}$ et toute v.a. $\underline{\underline{F}}^a_T$-mesurable x, on a $E[x\, \Delta A_T] = E[x\, \Delta B_T]$ (considérer $X = xI_{[\![T]\!]}$), ce qui montre que ΔA_T est égal p.s. à ΔB_T. Par suite ΔA et ΔB sont indistinguables. La martingale A-B est donc à variation finie, continue et nulle en 0. On sait alors qu'elle est indistinguable de 0.

DEFINITION. Une mesure m sur $\underline{\underline{B}}_{\mathbb{R}_+} \times \underline{\underline{F}}$ est dite <u>engendrée par le processus croissant càd</u> A si on peut écrire $m[X] = E[\int_0^\infty X_s\, dA_s]$, pour tout processus X mesurable borné.
Une mesure m sur $\underline{\underline{B}}_{\mathbb{R}_+} \times \underline{\underline{F}}$ est appelée <u>une $\underline{\underline{A}}$-mesure</u> si et seulement si elle est positive, finie, elle ne charge pas les ensembles évanescents et elle vérifie $m[X] = m[{}^aX]$, pour tout processus mesurable borné X.

THEOREME 14. <u>Une mesure m, sur $\underline{\underline{B}}_{\mathbb{R}_+} \times \underline{\underline{F}}$, est une $\underline{\underline{A}}$-mesure si et seulement si elle est engendrée par un processus croissant càd intégrable $\underline{\underline{A}}$-mesurable. Un tel processus est unique</u> (à l'indistinguabilité près).

DEMONSTRATION. Nous pouvons supposer que $\underline{\underline{A}}$ est P-complète (sinon on travaille dans $\underline{\underline{A}}^P$ et on revient à $\underline{\underline{A}}$ en considérant des processus $\underline{\underline{A}}$-mesurables indistinguables de ceux introduits). Considérons une $\underline{\underline{A}}$-mesure m. La mesure m ne chargeant pas les évanescents, on sait qu'il existe

un processus croissant càd mesurable et intégrable A, qui l'engendre. Montrons que A est $\underline{\underline{A}}$-mesurable. Soient T un t.a. fini de $\underline{\underline{A}}$ et x une v.a. bornée orthogonale à $\underline{\underline{F}}^a_T$. On vérifie que la $\underline{\underline{A}}$-projection du processus $X = xI_{[\![0,T]\!]}$ est nulle. On a donc $E[xA_T] = 0$, ce qui prouve que A_T est $\underline{\underline{F}}^a_T$-mesurable. Soit T un temps aléatoire totalement $\underline{\underline{A}}$-inaccessible. On a alors $m([\![T]\!]) = m({}^a[\![T]\!]) = 0 = E[\Delta A_T]$, ce qui montre que $\Delta A_T = 0$ p.s. . D'après le théorème précédent, A est $\underline{\underline{A}}$-mesurable.
Montrons que la condition est nécessaire. Soit A un processus croissant càd intégrable et $\underline{\underline{A}}$-mesurable, et m la mesure qu'il engendre. Posons $L(X) = m({}^aX)$ pour tout processus mesurable borné X. La mesure L est une $\underline{\underline{A}}$-mesure; elle est donc engendrée par un processus croissant càd $\underline{\underline{A}}$-mesurable et intégrable B. Ces deux mesures coincident sur $\underline{\underline{A}}$, et donc, d'après le lemme précédent, A et B sont indistinguables. La mesure m est donc une $\underline{\underline{A}}$-mesure.

THEOREME DE PROJECTION DUALE 15. <u>Soit</u> B <u>un processus croissant càd mesurable et intégrable</u>. <u>Il existe un processus croissant càd $\underline{\underline{A}}$-mesurable et intégrable</u>, <u>unique</u> (à l'indistinguabilité près), <u>noté</u> B^a, <u>vérifiant</u> $E[\int_0^\infty X_s\, dB^a_s] = E[\int_0^\infty {}^aX_s dB_s]$, <u>pour tout processus</u> X <u>mesurable borné</u>. <u>On appellera projection duale de</u> B <u>ce processus</u>.

DEMONSTRATION. Soit L la mesure engendrée par B. Il suffit de prendre pour B^a le processus croissant qui engendre la $\underline{\underline{A}}$-mesure $m(X) = L({}^aX)$. L'unicité provient du lemme précédent (qui est plus précis).

REMARQUES. Il est clair que si B est un processus mesurable càd, à variation intégrable, on peut, par différence, définir la $\underline{\underline{A}}$-projection duale de B, notée encore B^a.
Soit B un processus mesurable càd, presque surement à variation finie. Supposons qu'il existe une suite (T_n), croissante p.s. vers $+\infty$, de temps de stabilité de $\underline{\underline{A}}$ tels que, pour tout n, B^{T_n} soit à variation intégrable. On peut alors, grâce à l'unicité, recoller les $\underline{\underline{A}}$-projections duales des processus B^{T_n} en un processus càd, p.s. à variation intégrable, $\underline{\underline{A}}$-mesurable, noté encore B^a. En tout temps de stabilité T de $\underline{\underline{A}}$ tel que B^T soit à variation intégrable, $(B^a)^T$ est la $\underline{\underline{A}}$-projection duale de B^T. L'unicité d'un tel processus est évidente, on l'appellera encore la $\underline{\underline{A}}$-projection duale de B.

<u>Calculs sur les projections duales</u>.

THEOREME 16. <u>Si</u> B <u>est un processus mesurable càd à variation intégrable</u>, ΔB^a <u>est indistinguable de</u> ${}^a(\Delta B)$.

DEMONSTRATION. Soient T un t.a. de $\underline{\underline{A}}$ et x une v.a. $\underline{\underline{F}}^a_T$-mesurable bornée. Le processus $X = xI_{[\![T]\!]}$ est $\underline{\underline{A}}$-mesurableet l'on a $E[x\,\Delta B_T] = E[x\,\Delta B^a_T]$. Par suite, ΔB_T^a est égal p.s. à $E[\Delta B_T|\underline{\underline{F}}_T^a]$, ce qui prouve le théorème.

Remarquons que l'on a, en particulier, $B_0^a = E[B_0|\underline{\underline{F}}_0^a]$ (car on a posé $B_{0-}^a = B_{0-} = 0$).

THEOREME 17. Soient x une v.a. intégrable, T un temps aléatoire, et B le processus mesurable $xI_{[\![T,+\infty[\![}$. On a alors

1°) Si T est un t.a. de $\underline{\underline{A}}$, le processus B^a est égal à $E[x|\underline{\underline{F}}_T^a]I_{[\![T,+\infty[\![}$.

2°) Si T est totalement $\underline{\underline{A}}$-inaccessible, le processus B^a est continu.

DEMONSTRATION. Le point 1°) est immédiat, par unicité. Montrons le 2°) Si S est un t.a. de $\underline{\underline{A}}$, $\Delta B_S^a = E[xI_{\{T=S<+\infty\}}|\underline{\underline{F}}_S^a] = 0$ p.s. , ce qui implique que ΔB^a est indistinguable de 0.

§ 5. UN THEOREME D'ANALYSE FONCTIONNELLE.

Le théorème suivant est du à Meyer. On en trouvera sa démonstration dans D-M [4], VII, th.2 . Celle-ci est fort longue et nous avons maintenant tous les arguments nécessaires pour pouvoir la recopier, mutatis mutandis, en la replaçant dans notre cadre. Pour cette raison, nous nous contenterons de l'énoncé du théorème, renvoyant le lecteur scrupuleux au livre précité.

Nous désignons par $\mathbb{G}$ un espace vectoriel de processus $\wedge$-stable, contenant les constantes, possédant les propriétés suivantes

1°) Tout $X \in \mathbb{G}$ est borné càglàd (avec une limite à l'infini) et tel que X_+ est $\underline{\underline{A}}$-mesurable.

2°) Pour tout t.a. T de $\underline{\underline{A}}$, le processus $I_{]\!]T,+\infty[\![}$ appartient à $\mathbb{G}$.

THEOREME 18. Soit J une forme linéaire positive sur $\mathbb{G}$, possédant la propriété suivante: pour toute suite décroissante (X^n) d'éléments positifs de $\mathbb{G}$, telle que $\lim_n (X^n)_\infty^* = 0$ p.s., on a $\lim_n J(X^n) = 0$

Il existe alors deux processus croissants càd intégrables A et B, A $\mathbb{F}^a$-prévisible nul en 0, pouvant sauter à l'infini, B purement discontinu $\underline{\underline{A}}$-mesurable, tels que l'on ait pour $X \in \mathbb{G}$

$$J(X) = E[\int_{]0,+\infty]} X_s\, dA_s + \int_{[0,+\infty[} X_{s+}\, dB_s] .$$

Une telle représentation est unique (à l'indistinguabilité près).

III . THEORIE DES MARTINGALES.

Pour simplifier nos notations et conventions, nous supposerons dorénavant que $\underline{\underline{A}}$ est une tribu de Meyer P-complète. Nous ne perdons en fait aucune généralité: si $\underline{\underline{A}}$ n'était pas P-complète, nous travaillerions dans $\underline{\underline{A}}^P$, et reviendrions sur $\underline{\underline{A}}$ pour l'énoncé des résultats; en quelque sorte, sous la loi P, $\underline{\underline{A}}^P$ est 'indistinguable' de $\underline{\underline{A}}$ (que notre lecteur se souvienne: tout t.a. de $\underline{\underline{A}}^P$ est égal p.s. à un t.a. de $\underline{\underline{A}}$, tout processus $\underline{\underline{A}}^P$-mesurable est indistinguable d'un processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable, $\underline{\underline{F}}_T^{a^P}$ est égale à $\bar{\underline{\underline{F}}}_T^a$ pour tout t.a. de $\underline{\underline{A}}^P$ etc...).

Nous appelons $\mathbb{F}$ la filtration vérifiant les conditions habituelles $\mathbb{F}^{a+}$(rappelons la convention $\underline{\underline{F}}_{0-} = \underline{\underline{F}}_0^a$). Les tribus optionnelle et prévisible de $\mathbb{F}$ sont notées $\mathbb{O}$ et $\mathbb{P}$. Rappelons que $\underline{\underline{A}}$ est située entre ces tribus.

§0. $\underline{\underline{A}}$-MARTINGALES.

DEFINITION 1. Si $\mathbb{G}$ est une filtration, on appelle $\mathbb{G}$-martingale tout processus X vérifiant

a) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ X_t, est $\underline{\underline{G}}_t$-mesurable et intégrable.

b) Pour tout couple (s,t) tel que $s \leq t$, on a $X_s = E[X_t | \underline{\underline{G}}_s]$ p.s.

DEFINITION 2. On appelle $\underline{\underline{A}}$-martingale tout processus X $\underline{\underline{A}}$-mesurable, vérifiant

a) Pour tout t.a. borné T de $\underline{\underline{A}}$, X_T est intégrable.

b) Pour tout couple (S,T) de t.a. bornés de $\underline{\underline{A}}$ tel que $S \leq T$, on a $X_S = E[X_T | \underline{\underline{F}}_S^a]$ p.s.

Il est facile de vérifier qu'un processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable X est une $\underline{\underline{A}}$-martingale si, et seulement si, $E[X_T] = E[X_0]$ pour tout t.a. borné T de $\underline{\underline{A}}$. Nous dirons qu'un processus X est une modification d'un processus Y, si l'on a $X_t = Y_t$ p.s. pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

THEOREME DE MODIFICATION 1. Toute $\mathbb{F}^a$-martingale admet une modification en une $\underline{\underline{A}}$-martingale. Une telle modification est unique [1].

DEMONSTRATION. Soit X une $\mathbb{F}^a$-martingale. Si Y est une $\underline{\underline{A}}$-martingale modification de X, on doit avoir, pour tout n et tout t.a. de $\underline{\underline{A}}$ T borné par n, $Y_T = E[X_n | \underline{\underline{F}}_T^a]$ p.s. . Le théorème de section montre qu'une telle modification est unique. Montrons l'existence d'une telle modification. Pour tout n, soit Y^n la $\underline{\underline{A}}$-projection du processus constant (en t) égal à X_n. Il est clair que Y^n est une $\underline{\underline{A}}$-martingale et vérifie $Y_T^n = E[X_n | \underline{\underline{F}}_T^a]$ pour tout t.a. T de $\underline{\underline{A}}$ borné par n. D'après le théorème de section, on voit que Y^n et Y^m doivent coincider sur $[\![0,n \wedge m]\!]$ pour tout n et m. Posons $Y = (\liminf Y^n) I_{\{\limsup |Y^n| < +\infty\}}$. Le processus Y est $\underline{\underline{A}}$-mesurable et coincide avec Y^n sur $[\![0,n]\!]$. On vérifie aisément que Y est la modification cherchée.

COROLLAIRE. Deux $\underline{\underline{A}}$-martingales modifications l'une de l'autre sont indistinguables.

---

[1] à l'indistinguabilité près, nous ne le dirons plus.

Nous étudions maintenant la structure des $\underline{\underline{A}}$-martingales. On peut voir tout de suite, en utilisant le théorème 9, ch. II et sa note en bas de page, qu'<u>une $\underline{\underline{A}}$-martingale est à trajectoires làdlàg</u> (à Limites A Droite et à Limites A Gauche). Nous n'aurons pas besoin de ce théorème. <u>Le sort des $\underline{\underline{A}}$-martingales càdlàg est réglé par le lemme suivant</u> (laissé au lecteur). Rappelons que les $\mathbb{O}$-martingales sont les $\mathbb{F}$-martingales càdlàg.

LEMME. <u>Soit</u> X <u>un processus càdlàg. Les conditions suivantes sont équivalentes</u>

a) X <u>est une $\mathbb{F}$-martingale $\underline{\underline{A}}$-mesurable</u>.

b) X <u>est une $\mathbb{F}^a$-martingale $\underline{\underline{A}}$-mesurable</u>.

c) X <u>est une $\underline{\underline{A}}$-martingale</u>.

§1. <u>STRUCTURE DES MARTINGALES BORNEES DANS</u> L^2.

Nous appelons $\underline{\underline{M}}$ l'espace des $\mathbb{F}$-martingales càdlàg bornées dans L^2. L'espace $\underline{\underline{M}}$, muni du produit scalaire $(M,N)\to E[M_\infty N_\infty]$ est un espace de Hilbert isomorphe à $L^2(\underline{\underline{F}}_\infty)$ $(=L^2(\underline{\underline{F}}^a_\infty))$. Une norme équivalente est donnée par $p(M)=\|M^*_\infty\|_2$, où $M^*_t = \sup_{s\leq t}|M_s|$, $M^*_\infty = \sup_t|M_t|$.

DEFINITION. <u>Nous appelons</u> $^a\underline{\underline{M}}$ <u>le sous espace de</u> $\underline{\underline{M}}$ <u>constitué des martingales càdlàg $\underline{\underline{A}}$-mesurables</u>.

D'après le lemme précédent, les éléments de $^a\underline{\underline{M}}$ sont les $\underline{\underline{A}}$-martingales càdlàg bornées dans L^2. En utilisant la norme p, on voit immédiatement <u>que</u> $^a\underline{\underline{M}}$ <u>est un sous espace fermé de</u> $\underline{\underline{M}}$. Les temps d'arrêt de $\mathbb{F}$ étant les temps de stabilité de $\underline{\underline{A}}$, on voit de plus <u>que</u> $^a\underline{\underline{M}}$ <u>est un sous espace stable de</u> $\underline{\underline{M}}$ (fermé, et si T est un t.a. de $\mathbb{F}$, $A\in\underline{\underline{F}}_{0-}$ $(=\underline{\underline{F}}^a_0)$ et $M\in{}^a\underline{\underline{M}}$, alors $I_A M^T\in{}^a\underline{\underline{M}}$).

<u>L'espace orthogonal à</u> $^a\underline{\underline{M}}$, <u>qui sera noté</u> $\underline{\underline{M}}^a$, <u>est appelé l'espace des</u> co-<u>$\underline{\underline{A}}$-martingales</u> (sous entendu ici bornées dans L^2). <u>L'espace</u> $\underline{\underline{M}}^a$ <u>est un sous espace stable de</u> $\underline{\underline{M}}$.

Pour toute martingale M, nous ferons la convention $M_{0-}=E[M_0|\underline{\underline{F}}_{0-}]$. <u>Si $\underline{\underline{A}}$ est égale à</u> $\mathbb{P}$, on sait que $^p\underline{\underline{M}}$ est l'<u>espace des martingales continues</u> (y compris en 0: $M_{0-}=M_0$, c'est à dire M_0 est $\underline{\underline{F}}_{0-}$-mesurable). Son orthogonal (espace des co-$\mathbb{P}$-martingales) sera appelé l'<u>espace des martingales purement discontinues</u>, <u>noté</u> $\underline{\underline{M}}_d$. Si $M\in\underline{\underline{M}}_d$, on doit avoir $M_{0-}=0$ (i.e. $E[M_0|\underline{\underline{F}}_{0-}]=0$). Si M se décompose en $L+N$, avec L purement discontinue et N continue, on a $L_0=M_0-M_{0-}$ et $N_0=M_{0-}$.

LEMME. <u>Si</u> B <u>est un processus $\mathbb{F}$-adapté càdlàg à variation intégrable</u>, $B-B^a$ <u>est une $\mathbb{F}$-martingale càdlàg</u>. <u>Si la variation de</u> B <u>est de carré intégrable</u>, $B-B^a$ <u>est bornée dans</u> L^2.

DEMONSTRATION. Si T est un t.a. de $\mathbb{F}$, l'ensemble $[\![0,T]\!]$ appartient à $\underline{\underline{A}}$ et donc, par intégration du processus $X = I_{[\![0,T]\!]}$, on voit que $E[B_T]$ est égal à $E[B^a_T]$, soit encore $E[(B-B^a)_T] = 0$. Le processus $B-B^a$ étant adapté, le résultat s'ensuit. Les inégalités usuelles entre un processus à variation intégrable et sa projection duale prévisible, sont encore valides entre un processus à variation intégrable et sa $\underline{\underline{A}}$-projection duale (exercice), ce qui montre le deuxième point.

THEOREME 2. <u>L'espace des co-$\underline{\underline{A}}$-martingales est l'adhérence dans $\underline{\underline{M}}$ de l'espace des martingales de la forme</u> $B-B^a$, <u>où</u> B <u>est un processus càdlàg</u> $\mathbb{F}$-<u>adapté à variation de carré intégrable</u>.

DEMONSTRATION. Montrons tout d'abord que si B est un processus càdlàg $\mathbb{F}$-adapté, à variation de carré intégrable, $B-B^a$ est une co-$\underline{\underline{A}}$-martingale: soit $M \in {}^a\underline{\underline{M}}$; on a alors la suite d'égalités $E[M_\infty B_\infty] = E[\int M_s dB_s]$ $= E[\int M_s dB^a_s] = E[M_\infty B^a_\infty]$ (car $M = {}^o(M_\infty) = {}^a(M_\infty)$). Par différence, on voit que $B-B^a$ est orthogonale à M.
Appelons $\mathbb{L}$ l'espace des martingales de la forme $B-B^a$ que nous venons d'étudier. Il nous suffit de montrer que toute martingale M de $\underline{\underline{M}}$, orthogonale à $\mathbb{L}$, est $\underline{\underline{A}}$-mesurable.
Soit M une telle martingale. 1°) Si T est un t.a. fini de $\underline{\underline{A}}$, montrons que M_T est $\underline{\underline{F}}^a_T$-mesurable. Soit $x \in L^2(\underline{\underline{F}}_T) \ominus L^2(\underline{\underline{F}}^a_T)$ et appelons B le processus $xI_{[\![T,+\infty[\![}$. Nous avons vu que $B^a = E[x|\underline{\underline{F}}^a_T]I_{[\![T,+\infty[\![}$ et donc, ici, B^a est nul. M étant orthogonale à B $(=B-B^a)$, on a $E[M_T x] = E[M_\infty B_\infty] = 0$, ce qui prouve que M_T est $\underline{\underline{F}}^a_T$-mesurable.
2°) Si T est un t.a. d'arrêt de $\mathbb{F}$ totalement $\underline{\underline{A}}$-inaccessible, montrons que $\Delta M_T = 0$. Soit $x \in L^2(\underline{\underline{F}}_T)$ et B le processus $xI_{[\![T,+\infty[\![}$. Nous avons vu que B^a est continu. Nous avons alors la suite d'égalités:
$E[\Delta M_T x] = E[\int M_s dB_s] - E[\int M_{s-} dB_s] = E[\int M_s dB_s] - E[\int M_{s-} dB^a_s]$ (M_- est $\underline{\underline{A}}$-mesurable) $= E[\int M_s dB_s] - E[\int M_s dB^a_s]$ (B^a est continu) $= E[M_\infty B_\infty] - E[M_\infty B^a_\infty]$ (car $M = {}^o(M_\infty)$) $= E[M_\infty (B-B^a)_\infty] = 0$ (car M et $B-B^a$ sont orthogonales).
Par suite, ΔM_T est égale à 0 p.s.
On conclut grâce au théorème 13, § 4, II .

COROLLAIRE. $\underline{\underline{A}}$-THEOREME D'ARRET. <u>L'espace des co-$\underline{\underline{A}}$-martingales est l'espace des martingales</u> L, <u>purement discontinues</u>, <u>de</u> $\underline{\underline{M}}$, <u>vérifiant</u> ${}^aL = L_-$.

DEMONSTRATION. On a vu que les co-$\underline{\underline{A}}$-martingales sont purement discontinues. Si L est une co-$\underline{\underline{A}}$-martingale de la forme $B-B^a$, nous avons vu que ΔB^a est égal à ${}^a(\Delta B)$ (th. 16, II). On a alors ${}^aL = L_- + {}^a(\Delta L) = L_-$.
Par densité, on voit que le résultat est vrai pour toute co-$\underline{\underline{A}}$-martingale. Réciproquement, soit M une martingale purement discontinue, vérifiant ${}^aM = M_-$. Décomposons M en $L+N$, où L est une co-$\underline{\underline{A}}$-martingale, et

N une martingale $\underline{\underline{A}}$-mesurable. On a alors $L_- + N_- = {}^aM = L_- + N$, et donc N est égale à N_-, ce qui montre qu'elle est continue. La martingale N est aussi purement discontinue car L et M le sont; elle est donc nulle. Par suite M est égale à L, et est donc une co-$\underline{\underline{A}}$-martingale.

DEFINITION. On dit qu'<u>une $\underline{\underline{A}}$-martingale est bornée dans</u> L^2 si elle est la $\underline{\underline{A}}$-projection d'un processus constant (en t), égal à une v.a. de $L^2(\underline{\underline{F}}_\infty)$ $(=L^2(\underline{\underline{F}}^a_\infty))$.

THEOREME 3. <u>Un processus X est une $\underline{\underline{A}}$-martingale bornée dans L^2 si et seulement si on peut l'écrire $X = L_- + N$, où L est une co-$\underline{\underline{A}}$-martingale (bornée dans L^2) et N une $\mathbb{F}$-martingale càdlàg $\underline{\underline{A}}$-mesurable bornée dans L^2. Une telle décomposition est unique.</u>

DEMONSTRATION. Montrons l'unicité. Si $L_- + N = 0$, en prenant les limites à droite, on obtient $L + N = 0$, et par unicité $L = N = 0$.
Montrons que tout processus de la forme $L_- + N$ est une $\underline{\underline{A}}$-martingale bornée dans L^2. en effet on a $L = {}^o(L_\infty)$, $N = {}^o(N_\infty)$, et donc $L_- = {}^aL = {}^a(L_\infty)$ et $N = {}^a(N_\infty)$. Par suite, $L_- + N = {}^a(L_\infty + N_\infty)$ est une $\underline{\underline{A}}$-martingale bornée dans L^2.
Réciproquement, si X est une $\underline{\underline{A}}$-martingale bornée dans L^2, $\underline{\underline{A}}$-projection du processus constant(en t) égal à $x \in L^2(\underline{\underline{F}}_\infty)$, appelons M la projection optionnelle de x. On peut décomposer M en $L + N$. Par transitivité des projections, on obtient $X = {}^aM = {}^a(L+N) = L_- + N$.

REMARQUE. On voit ainsi que toute $\underline{\underline{A}}$-martingale M bornée dans L^2, est làdlàg, que M^+ est une martingale de $\underline{\underline{M}}$ et que $M = {}^a(M_+) = {}^a(M_\infty)$.

EXEMPLES. Considérons une filtration $\mathbb{F}$ vérifiant les conditions habituelles et $\underline{\underline{H}}$ un ensemble de t.a. de $\mathbb{F}$. Pour tout élément T de $\underline{\underline{H}}$, donnons nous une tribu $\underline{\underline{G}}_T$ telle que $\underline{\underline{F}}_{T-} \subset \underline{\underline{G}}_T \subset \underline{\underline{F}}_T$.
DEFINITION. Nous appelons <u>tribu associée à</u> $(\underline{\underline{G}}_T)_{T\in H}$ la tribu sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ engendrée par les processus càdlàg $\mathbb{F}$-adaptés, vérifiant $X_T I_{\{T<+\infty\}}$ est $\underline{\underline{G}}_T$-mesurable pour tout $T \in \underline{\underline{H}}$.

-Si $\underline{\underline{H}}$ est l'ensemble des temps d'arrêt de $\mathbb{F}$ et $\underline{\underline{G}}_T = \underline{\underline{F}}_{T-}$, la tribu associée a été étudiée par Y. Lejan qui l'a appelée "<u>tribu des optionnels stricts</u>" [5] et notée $\underline{\underline{S}}$. Les co-$\underline{\underline{S}}$-martingales ont été appelées "<u>les martingales de sauts</u>". Remarquons que cette construction à partir des prévisibles $(\underline{\underline{F}}_{T-} = \underline{\underline{F}}^p_T)$, peut être reprise à partir d'une tribu $\underline{\underline{A}}$ située entre $\mathbb{P}$ et $\mathbb{O}$: on peut étudier la tribu associée à $(\underline{\underline{F}}^a_T)_{T\in \underline{\underline{T}}(\mathbb{F})}$, les résultats qu'on obtient alors sont très voisins de ceux de Lejan.
Dans le même ordre d'idée, on pourrait étudier, par exemple, la tribu associée à $(\underline{\underline{F}}^a_T)_{T\in\underline{\underline{T}}(\underline{\underline{A}})}$.
- Si $(\underline{\underline{G}}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une filtration complète telle que $\mathbb{G}^+ = \mathbb{F}$, la tribu

associée à $(\underline{\underline{G}}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est la tribu optionnelle de $\mathbb{G}$.

Soit donc $\underline{\underline{A}}$ la tribu associée à $(\underline{\underline{G}}_T)_{T\in\underline{\underline{H}}}$. On vérifie immédiatement les points suivants

a) Un temps T est un t.a. de $\underline{\underline{A}}$ ssi T est un t.a. de $\mathbb{F}$ vérifiant, pour tout $S\in\underline{\underline{H}}$, $\{T\leq S\}\in\underline{\underline{G}}_S$.

b) Si T est un t.a. de $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{F}}^a_T=\{A\in\underline{\underline{F}}_\infty : \forall S\in\underline{\underline{H}} \quad A\cap\{T\leq S\}\in\underline{\underline{G}}_S\}$, et, pour $A\in\underline{\underline{F}}^a_T$ et $S\in\underline{\underline{H}}$, $A\cap\{T=S\}$ appartient à $\underline{\underline{G}}_S$.

On en déduit aisément le lemme suivant

LEMME. Soient S un temps de $\underline{\underline{H}}$ et x un élément de $L^2(\underline{\underline{F}}_S)\ominus L^2(\underline{\underline{G}}_S)$. Si T est un t.a. de $\underline{\underline{A}}$, $xI_{\{S=T\}}$ appartient à $L^2(\underline{\underline{F}}_T)\ominus L^2(\underline{\underline{F}}^a_T)$.

THEOREME. L'espace des co-$\underline{\underline{A}}$-martingales est l'espace vectoriel fermé engendré par les martingales $xI_{[\![T,+\infty[\![}$, où $T\in\underline{\underline{H}}$ et $x\in L^2(\underline{\underline{F}}_T)\ominus L^2(\underline{\underline{G}}_T)$.

DEMONSTRATION. Appelons $\mathbb{L}$ l'ensemble des martingales $xI_{[\![T,+\infty[\![}$ de la forme précitée. a) Montrons que $\mathbb{L}$ est inclus dans $\underline{\underline{M}}^a$. Soit T un temps de H et $L=xI_{[\![T,+\infty[\![}$ une martingale de $\mathbb{L}$. Si S est un t.a. de $\underline{\underline{A}}$, on a, d'après le lemme précédent, $E[\Delta L_S|\underline{\underline{F}}^a_S]=E[xI_{\{S=T\}}|\underline{\underline{F}}^a_S]I_{\{S<+\infty\}}=0$, ce qui prouve que L est un co-$\underline{\underline{A}}$-martingale.

b) Réciproquement, soit M une martingale orthogonale à $\mathbb{L}$. Soit $T\in\underline{\underline{H}}$ et $x\in L^2(\underline{\underline{F}}_T)\ominus L^2(\underline{\underline{G}}_T)$. Posons $L=xI_{[\![T,+\infty[\![}$. On a alors $E[M_TI_{\{T<+\infty\}}x]=E[M_\infty L_\infty]=0$. Par suite, $M_TI_{\{T<+\infty\}}$ est $\underline{\underline{G}}_T$-mesurable. Ceci étant vrai pour tout temps de H, M est $\underline{\underline{A}}$-mesurable.

§3. STRUCTURE DES $\underline{\underline{A}}$-MARTINGALES, $\underline{\underline{A}}$-MARTINGALES LOCALES.

la structure des $\underline{\underline{A}}$-martingales ne s'exprime bien qu'en termes de martingales locales. C'est pourquoi nous introduisons tout de suite la définition suivante

DEFINITION. Un processus X est une $\underline{\underline{A}}$-martingale locale si et seulement s'il existe une suite (T_n) de temps d'arrêt de $\underline{\underline{A}}$, croissant p.s. vers $+\infty$ et tels que, pour tout n, X^{T_n} soit une $\underline{\underline{A}}$-martingale.

D'après le "complément au théorème de projection", toute $\mathbb{F}$-martingale locale (sous entendu càdlàg, nous l'omettrons toujours par la suite) est $\underline{\underline{A}}$-projetable.

Nous dirons qu'un processus croissant càdlàg A est localement intégrable s'il existe une suite (T_n) de t.a. de $\mathbb{F}$, croissante p.s. vers $+\infty$, et tels que, pour tout n, A_{T_n} soit intégrable.

THEOREME 4. Soit A un processus croissant càdlàg localement intégrable. Il existe alors une suite (T_n) de t.a. prévisibles, croissante vers $+\infty$, tels que, pour tout n, A_{T_n} soit intégrable.

DEMONSTRATION. Soit A^p la projection duale prévisible de A. Appelons S_n le t.a. prévisible égal à $\inf\{t: A_t^p \geq n\}$. Le temps S_n est annoncé par une suite de temps d'arrêt prévisibles. On peut alors construire une suite (T_n) de temps d'arrêt prévisibles, croissante vers $+\infty$, tels que, pour tout n, $A^p_{T_n}$ soit intégrable. On a alors, en utilisant la propriété de Beppo-Lévi, $E[A_{T_n}] = E[A^p_{T_n}] < +\infty$.

Ce résultat montre, par exemple, que si M est une $\mathbb{F}$-martingale locale localement dans $\underline{\underline{H}}^p$, M peut être réduite, dans $\underline{\underline{H}}^p$, par une suite de temps d'arrêt prévisibles. Si M est une $\mathbb{F}$-martingale locale, on peut trouver une suite (T_n) de temps d'arrêt prévisibles, croissante vers $+\infty$, tels que, pour tout n, M^{T_n} soit une $\mathbb{F}$-martingale (càdlàg) vérifiant $(M^{T_n})^*_\infty$ est intégrable (i.e. est dans H^1), ceci parce que M^*_t est localement intégrable.

On en déduit

COROLLAIRE. Un processus càdlàg X est une $\underline{\underline{A}}$-martingale locale si et seulement s'il est une $\mathbb{F}$-martingale locale $\underline{\underline{A}}$-mesurable.

DEFINITIONS. On dira qu'une $\mathbb{F}$-martingale locale est purement discontinue si on peut l'écrire, localement, comme la somme d'une martingale purement discontinue bornée dans L^2 et d'un processus càdlàg à variation intégrable V, vérifiant $E[V_0|\underline{\underline{F}}_{0-}] = 0$.
Pour toute $\mathbb{F}$-martingale locale M, on fait la convention $M_{0-} = E[M_0|\underline{\underline{F}}_{0-}]$. Toute $\mathbb{F}$-martingale locale M purement discontinue vérifie donc $M_{0-} = 0$.

On appelle co-$\underline{\underline{A}}$-martingale locale toute $\mathbb{F}$-martingale locale purement discontinue M, vérifiant ${}^aM = M_-$.

Les symboles L et N désigneront toujours, respectivement, une co-$\underline{\underline{A}}$-martingale locale et une $\mathbb{F}$-martingale locale $\underline{\underline{A}}$-mesurable.

THEOREME 5. Toute $\mathbb{F}$-martingale locale se décompose, de façon unique, en la somme d'une co-$\underline{\underline{A}}$-martingale locale et d'une $\mathbb{F}$-martingale locale $\underline{\underline{A}}$-mesurable.

DEMONSTRATION. Unicité. Il suffit, par différence, de montrer que toute co-$\underline{\underline{A}}$-martingale locale $\underline{\underline{A}}$-mesurable est nulle. Soit L une telle co-$\underline{\underline{A}}$-martingale locale. On a alors $L = {}^aL = L_-$, ce qui montre que L est continue nulle en 0. On peut alors l'écrire localement comme une co-$\underline{\underline{A}}$-martingale bornée et $\underline{\underline{A}}$-mesurable; or, par définition, toute co-$\underline{\underline{A}}$-martingale bornée dans L^2 et $\underline{\underline{A}}$-mesurable est nulle.
Existence. Grâce à l'unicité établie précédemment, on peut se ramener au cas où M se décompose en $X + V$, avec X une martingale bornée dans L^2 et V à variation intégrable (c'est bien connu). Décomposons X en la

somme d'une co-$\underline{\underline{A}}$-martingale L bornée dans L^2, et d'une $\mathbb{F}$-martingale N càdlàg bornée dans L^2 et $\underline{\underline{A}}$-mesurable. Il suffit alors de poser L' égale à $L+(V-V^a)$ et N' à $N+V^a$, pour avoir la décomposition cherchée.

THEOREME DE STRUCTURE DES $\underline{\underline{A}}$-MARTINGALES LOCALES 6. <u>Soit</u> X <u>un processus.</u> <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u>

a) X <u>est une</u> $\underline{\underline{A}}$-<u>martingale locale</u>.
b) X <u>est làdlàg,</u> X_+ <u>est une</u> $\mathbb{F}$-<u>martingale locale et</u> $X={}^a(X_+)$.
c) X <u>est la</u> $\underline{\underline{A}}$-<u>projection d'une</u> $\mathbb{F}$-<u>martingale locale.</u>
d) <u>On peut écrire</u> $X=L_-+N$, <u>où</u> L <u>est une co-</u>$\underline{\underline{A}}$-<u>martingale locale</u>, <u>et</u> N <u>une</u> $\mathbb{F}$-<u>martingale locale</u> $\underline{\underline{A}}$-<u>mesurable</u>.

<u>La décomposition figurant en</u> d) <u>est unique</u>.

DEMONSTRATION. a) $\Rightarrow$ b). Soit (T_n) une suite, croissante vers $+\infty$, de temps d'arrêt de $\underline{\underline{A}}$ bornés et tels que, pour tout n, X^{T_n} soit une $\underline{\underline{A}}$-martingale. Montrons tout d'abord le point pour X^{T_n}. On est ramené au cas d'une $\underline{\underline{A}}$-martingale M, vérifiant $M={}^a(M_\infty)$. Posons $Y={}^o(M_\infty)$; Y est une $\mathbb{F}$-martingale càdlàg et peut donc se décomposer en $L+N$; par transitivité des projections, on a $M={}^a(Y)={}^a(L+N)=L_-+N$, ce qui prouve que M est làdlàg, M_+ est une $\mathbb{F}$-martingale (égale à Y) et $M={}^a(M_+)$.
Reprenons notre démonstration. On vient de voir que, pour tout n, X^{T_n} est làdlàg, et donc que X est elle même làdlàg; de plus, $(X^{T_n})_+$ est une $\mathbb{F}$-martingale et X^{T_n} est égale à ${}^a((X^{T_n})_+)$. Par suite, T_n étant un t.a. de $\underline{\underline{A}}$, $XI_{[\![0,T_n[\![}$ est égal à ${}^a((X^{T_n})_+I_{[\![0,T_n[\![})={}^a(X_+I_{[\![0,T_n[\![})$. On en déduit que X_+ est $\underline{\underline{A}}$-projetable et que X est égal à ${}^a(X_+)$. On voit, en particulier, que $E[\,\Delta_+X_{T_n}|\underline{\underline{F}}^a_{T_n}]=0$ ($\Delta_+X=X_+-X$), et donc que $\Delta_+X_{T_n}I_{[\![T_n,\infty[\![}$ est une $\mathbb{F}$-martingale locale. Par différence, $(X_+)^{T_n}$ est une $\mathbb{F}$-martingale locale. Le processus X_+ est donc une $\mathbb{F}$-martingale locale.
Il est clair que b) implique c). Montrons c) $\Rightarrow$ d). Soit M une $\mathbb{F}$-martingale locale. M se décompose en $L+N$, et donc ${}^aM$ est égal à L_-+N.
Montrons que d) $\Rightarrow$ a). Si X peut s'écrire L_-+N, alors $X_+=L+N$ est une $\mathbb{F}$-martingale locale et l'on a $X={}^a(X_+)$. D'après le théorème 4, X_+ peut être réduite par une suite (T_n) de temps d'arrêt prévisibles (donc de $\underline{\underline{A}}$). On a alors $X^{T_n}={}^a(((X_+)^{T_n})^{T_n}$, et donc, X^{T_n} est une $\underline{\underline{A}}$-martingale locale.
L'unicité de la décomposition figurant dans d) est évidente: si X se décompose en L_-+N, X_+ est égal à $L+N$ et on a vu qu'alors L et N étaient uniquement déterminées.

REMARQUES. On a prouvé que, pour toute $\underline{\underline{A}}$-martingale locale, il existe une suite (T_n), croissante vers $+\infty$, de temps d'arrêt prévisibles, tels que pour tout n, X^{T_n} est une $\underline{\underline{A}}$-martingale.
Si X est une $\underline{\underline{A}}$-martingale, de décomposition L_-+N , $L+N$ est une

$\mathbb{F}$-martingale.
Si X est un processus làdlàg, nous noterons $\Delta_+ X$ le processus $X_+ - X$ et $\Delta_- X$ le processus $X - X_-$.

THEOREME 7. Toute $\underline{\underline{A}}$-martingale locale X peut s'écrire $M + V$, où M est une $\underline{\underline{A}}$-martingale locale à sauts gauches et droits bornés, et V est une $\underline{\underline{A}}$-martingale locale à variation finie (làdlàg).

DEMONSTRATION. La $\underline{\underline{A}}$-martingale locale X se décompose en $L_- + N$. Posons $B_t = \sum_{s\leq t} \Delta L_s I_{\{|\Delta L_s| \geq a\}}$ et $A_t = \sum_{s\leq t} \Delta N_s I_{\{|\Delta N_s| \geq a\}}$ $(a\varepsilon\mathbb{R}_+)$. On montre facilement que $N' = N - (A - A^p)$ est une $\mathbb{F}$-martingale locale, $\underline{\underline{A}}$-mesurable, à sauts bornés par 2a (lemme du à Yen). La même démonstration, appliquée à L et B, montre que $L' = L - (B - B^a)$ est une co-$\underline{\underline{A}}$-martingale à sauts bornés par 2a. Il suffit alors de poser $M = L'_- + N'$ et $V = (B_- - B^a_-) + (A - A^p)$. On a ainsi $|\Delta_+ M| = |\Delta L'| \leq 2a$ et $|\Delta_- M| = |\Delta N'| \leq 2a$.

Crochet droit d'une $\underline{\underline{A}}$-martingale locale.

DEFINITION. Soit M une $\underline{\underline{A}}$-martingale locale, de décomposition $L_- + N$. La partie martingale continue de M, notée M^c, sera, par définition, la partie martingale continue de $N - N_0$ (elle sera donc nulle en 0); c'est en fait la partie martingale continue de M_+ au sens habituel. On pose, par définition, $[M,M] = [L,L]_- + 2[L,N]_- + [N,N]$, et on dit que c'est le crochet droit de M.

Il faut bien prendre garde: $[M,M]$ n'est pas, comme d'habitude, un processus croissant (attention aussi, $M_{0-} = M_0 = N_0$, $M_{0+} = L_0 + N_0$).

THEOREME 8. Avec les notations précédentes, on a
a) $[M,M]_t$ est égal à $\langle M^c,M^c\rangle_t + \sum_{0\leq s<t}(M_{s+} - M_{s-})^2 + (M_t - M_{t-})^2$.
b) $[M,M]$ est un processus làdlàg à variation finie, $\underline{\underline{A}}$-mesurable.
c) $M^2 - [M,M]$ est une $\underline{\underline{A}}$-martingale locale.

DEMONSTRATION. Un simple calcul prouve l'assertion a). Pour prouver b) il suffit de montrer que $\sum_{s\leq t}(M_s - M_{s-})^2$ est finie pour tout t, ce qui est vrai car cette somme est égale à la variation quadratique de la partie martingale locale discontinue de N.
Montrons c) La $\mathbb{F}$-martingale locale M_+ se décompose en $L + N$, et on a $M_+^2 - [M_+,M_+] = (L^2 - [L,L]) + 2(LN - [L,N]) + (N^2 - [N,N])$.
$N^2 - [N,N]$ est une $\mathbb{F}$-martingale locale $\underline{\underline{A}}$-mesurable.
$L' = L^2 - [L,L]$ est une co-$\underline{\underline{A}}$-martingale locale car ${}^a(\Delta L') = L_-{}^a(\Delta L) = 0$.
$NL - [L,N]$ est une $\mathbb{F}$-martingale locale de $\underline{\underline{A}}$-projection $NL_- - [L,N]_-$ car ${}^a(NL)$ est égal à $N^aL = NL_-$ et ${}^a(\Delta N \Delta L) = \Delta N^a(\Delta L) = 0$.
On voit alors que $M^2 - [M,M]$ est la $\underline{\underline{A}}$-projection de $M_+^2 - [M_+,M_+]$, qui est une $\mathbb{F}$-martingale locale, ce qui prouve le point c).

REMARQUE $[M,M]_+ = [M_+,M_+]$ et $[M,M]_- = [M_-,M_-]$ (M_- est une $\mathbb{P}$-martingale locale).

On polarise de façon évidente cette notion, et on obtient le résultat Si M et M' sont deux $\underline{\underline{A}}$-martingales locales, $[M,M']$ est $\underline{\underline{A}}$-mesurable, à variation finie (làdlàg), et $MM'-[M,M']$ est une $\underline{\underline{A}}$-martingale locale.

IV THEORIE DES $\underline{\underline{A}}$-SURMARTINGALES.

Nous supposons encore, sans perte de généralité, que $\underline{\underline{A}}$ est P-complète.

DEFINITION 1. Si $\mathbb{G}$ est une filtration, on appelle $\mathbb{G}$-surmartingale, tout processus X vérifiant

a) Pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, X_t est $\underline{\underline{G}}_t$-mesurable et intégrable.

b) Pour tout couple (s,t), tel que $s\leq t$, on a $E[X_t|\underline{\underline{G}}_s] \leq X_s$ p.s.

DEFINITION 2. On appelle $\underline{\underline{A}}$-surmartingale tout processus X, $\underline{\underline{A}}$-mesurable vérifiant

a) Pour tout temps d'arrêt borné T de $\underline{\underline{A}}$, X_T est intégrable.

b) Pour tout couple (S,T) de t.a. bornés de $\underline{\underline{A}}$, tel que $S\leq T$, on a $E[X_T|\underline{\underline{F}}^a_S] \leq X_S$ p.s.

THEOREME DE MODIFICATION 1. Toute $\mathbb{F}^a$-surmartingale admet une modification en une $\underline{\underline{A}}$-surmartingale.

DEMONSTRATION. (elle est inspirée de celle de Dellacherie [2], mais est plus simple). Considérons une $\mathbb{F}^a$-surmartingale X (rappelons que $\mathbb{F}=\mathbb{F}^{a+}$ vérifie les conditions habituelles). L'application $t\to E[X_t]=m(t)$ est décroissante et admet donc une quantité au plus dénombrable de points de discontinuité. Notons $\mathbb{S}$ l'ensemble de ses points de discontinuité et $\mathbb{S}_n$ l'ensemble des points s de $\mathbb{S}$ tels que $|\Delta m(s)| \geq n^{-1}$. La suite $\mathbb{S}_n$ croit vers $\mathbb{S}$ et ne rencontre chaque intervalle borné qu'en un nombre fini de points. Soit $\mathbb{D}$ l'ensemble des dyadiques et $\mathbb{D}_n$ l'ensemble $\{k2^{-n},\ k\in\mathbb{N}\}$. Posons $\mathbb{I}=\mathbb{S}\cup\mathbb{D}$ et $\mathbb{I}_n=\mathbb{S}_n\cup\mathbb{D}_n$. Nous rangeons les points de $\mathbb{I}_n$ en une suite croissante $(i^n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (qu'il ne faut pas confondre avec les $k2^{-n}$). L'ensemble $\mathbb{I}$ est dénombrable dense dans $\mathbb{R}_+$. La théorie habituelle des surmartingales montre que si l'on pose X^+_t égal à $\lim_{s\in\mathbb{I},s\downarrow t,s>t} X_s$ (qui existe), X^+ est une $\mathbb{F}$-surmartingale càdlàg et, pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, on a $X_t\geq E[X^+_t|\underline{\underline{F}}^a_T]$ (M. [9]). Le processus X^+ est $\underline{\underline{A}}$-projetable, nous notons Y sa $\underline{\underline{A}}$-projection. Il est clair que Y est une $\underline{\underline{A}}$-surmartingale et que $X_t\geq Y_t$ p.s. pour tout t.

Si t n'appartient pas à $\mathbb{S}$, on a $E[X_t]=E[X^+_t]=E[Y_t]$ et donc $X_t=Y_t$ p.s. Posons alors $\bar{X}_t = Y_t I_{\{t\notin\mathbb{S}\}} + X_t I_{\{t\in\mathbb{S}\}}$. Il est clair, d'après ce qui précéde, que $\bar{X}$ est une modification de X. On peut écrire que $\bar{X}$ est

égal à $YI_{\mathbb{S}^c \times \Omega} + \sum_{s\in\mathbb{S}} X_{\underline{s}} I_{[\![s]\!]}$, ce qui montre que $\bar{X}$ est $\underline{\underline{A}}$-mesurable.
Il reste à montrer que $\bar{X}$ est une $\underline{\underline{A}}$-surmartingale.
Si T est un t.a. de $\underline{\underline{A}}$ borné, posons $T^{(n)}(\omega) = T(\omega)$ si $T(\omega) \in \mathbb{S}_n$, et i^n_{k+1} si $T(\omega) \notin \mathbb{S}_n$ et $i^n_k \leq T(\omega) < i^n_{k+1}$.
On vérifie aisément les points suivants: la suite $(T^{(n)})$ est décroissante, stationnaire sur $\{T\in\mathbb{S}\}$ (et seulement sur cet ensemble), et constituée de temps d'arrêt étagés de $\underline{\underline{A}}$. Si $S \leq T$, on a $S^{(n)} \leq T^{(n)}$ (se rappeler que $\mathbb{S}_n$ est inclus dans $\mathbb{I}_n$).
Il est clair que $X_{T^{(n)}}$ converge vers $X_T I_{\{T\in\mathbb{S}\}} + X^+_T I_{\{T\notin\mathbb{S}\}}$. la suite $T^{(n)}$ étant décroissante, on a $E[X_{T^{(n)}}] \to E[X_T I_{\{T\in\mathbb{S}\}} + X^+_T I_{\{T\notin\mathbb{S}\}}]$ qui est égal à $E[X_T I_{\{T\in\mathbb{S}\}} + Y_T I_{\{T\notin\mathbb{S}\}}] = E[\bar{X}_T]$.
On a alors, si S et T sont deux t.a. bornés de $\underline{\underline{A}}$ tels que $S \leq T$:
$E[\bar{X}_S] = \lim_n E[X_{S^{(n)}}] \geq \lim_n E[X_{T^{(n)}}] = E[\bar{X}_T]$, ce qui prouve que $\bar{X}$ est une $\underline{\underline{A}}$-surmartingale (utiliser l'astuce habituelle).

THEOREME 2 <u>Toute $\underline{\underline{A}}$-surmartingale est à trajectoires làdlàg.</u>

DEMONSTRATION. Si (T_n) est une suite croissante (resp. décroissante) de temps d'arrêt de $\underline{\underline{A}}$ bornés par N, la suite $E[X_{T_n}]$ est décroissante minorée par $E[X_N]$ (resp. croissante, majorée par $E[X_0]$) et est donc convergente. Il suffit alors d'appliquer le th. 9 II (et la note en bas de page).

THEOREME 3. <u>Soit</u> X <u>une $\underline{\underline{A}}$-surmartingale</u>. <u>Il existe un processus croissant</u> B <u>càdlàg purement discontinu et $\underline{\underline{A}}$-mesurable</u>, <u>tel que</u> $\Delta B = X - {}^a(X_+)$. <u>Si</u> (S,T) <u>est un couple de temps d'arrêt bornés de $\underline{\underline{A}}$ tel que</u> $S \leq T$, <u>on a</u> $E[B_T - B_S] \leq E[X_{S+} - X_{T+}]$.

DEMONSTRATION. Il est clair (cf. la démonstration du th. 1) que X_+ est une $\mathbb{F}$-surmartingale càdlàg.
a) <u>Montrons que</u> $X \geq {}^a(X_+)$. Si T est un t.a. borné de $\underline{\underline{A}}$, et $T^n = T + n^{-1}$, $E[X_{T^n} | \underline{\underline{F}}^a_T]$ est majorée par X_T; passant à la limite ((X_{T^n}) est uniformément intégrable), on obtient $E[X_{T+} | \underline{\underline{F}}^a_T] \leq X_T$ p.s. Le théorème de section permet alors de conclure.
b) <u>l'ensemble</u> $\{X > {}^a(X_+)\}$ <u>est à coupes dénombrables</u>. L'ensemble $\{X \neq X_+\}$ est à coupes dénombrables. D'après le théorème de décomposition des temps aléatoires, on peut trouver une suite (S_n) de t.a. de $\underline{\underline{A}}$ et une suite (T_n) de temps aléatoires totalement $\underline{\underline{A}}$-inaccessibles tels que $\{X \neq X_+\}$ soit inclus dans $(\bigcup_n [\![S_n]\!]) \cup (\bigcup_n [\![T_n]\!])$. L'ensemble $\{X \neq {}^a(X_+)\}$ est alors inclus dans $\bigcup_n [\![S_n]\!]$.
c) <u>Montrons le résultat pour une $\underline{\underline{A}}$-surmartingale définie à l'infini et vérifiant l'inégalité des surmartingales pour tout couple</u> (S,T) <u>de t.a. de $\underline{\underline{A}}$ tel que</u> $S \leq T$.

Soit X une telle $\underline{\underline{A}}$-surmartingale. Posons $M = {}^a(X_\infty)$ et $Y = X - M$. Le processus Y est une $\underline{\underline{A}}$-surmartingale de même type que X, mais est positif et nul à l'infini. Il est clair que $Y - {}^a(Y_+) = X - {}^a(X_+)$ et, pour tout couple (S,T) de t.a. $E[X_{S+}-X_{T+}] = E[Y_{S+}-Y_{T+}]$. Il suffit donc de montrer ce résultat pour Y.

Posons $B_t = \sum_{s\leq t} (Y_s - {}^a(Y_+)_s)$. Il nous faut montrer que B est fini. Soit (S_n) une suite de t.a. de $\underline{\underline{A}}$, à graphes disjoints, tels que l'ensemble $\{Y > {}^a(Y_+)\}$ soit inclus dans $\bigcup_n [\![S_n]\!]$. Le processus B est alors égal à $\sum_n (Y_{S_n} - {}^a(Y_+)_{S_n}) I_{[\![S_n,\infty[\![}$. Posons $B^n = \sum_{k\leq n}(Y_{S_k} - {}^a(Y_+)_{S_k}) I_{[\![S_k,\infty[\![}$

On peut supposer, n étant fixé, que $S_1 \leq S_2 \leq \ldots \leq S_n$ et $S_1 < S_2 < \ldots < S_k$ sur $\{S_k < +\infty\}$. Soit (S,T) un couple de t.a. de $\underline{\underline{A}}$ tel que $S \leq T$. On a alors $B^n_T - B^n_S = \sum_{k\leq n}(Y_{T_k} - {}^a(Y_+)_{T_k})$, où l'on a posé $T_k = S_{k\{S<S_k\leq T\}}$. On vérifie que $E[Y_{T_k}] \leq E[Y_{T_{k-1}+} I_{\{T_k<\infty\}}] \leq E[Y_{T_{k-1}+}]$ (car Y_+ est ≥ 0), et que $E[Y_{T_1}] \leq E[Y_{S+}]$, $E[Y_{T_n+}] \geq E[Y_{T+}]$.

On a donc: $E[B^n_T - B^n_S] = \sum_{k\leq n} E[Y_{T_k}] - E[Y_{T_k+}] \leq E[Y_{S+} - Y_{T+}]$.

faisant tendre n vers l'infini, on obtient $E[B_T - B_S] \leq E[Y_{S+} - Y_{T+}]$, ce qui prouve l'inégalité cherchée et que B est fini (et donc $\underline{\underline{A}}$-mesurable par construction).

d) <u>Cas général</u>. Soit (B^n) le processus croissant associé à X^n (X arrêté en n) construit précédemment. Si $n < m$, B^n et B^m coincident sur $[\![0,n[\![$. Les processus B^n se recollent donc en un processus croissant B, $\underline{\underline{A}}$-mesurable purement discontinu, vérifiant $B = X - {}^a(X_+)$.

Si $S \leq T \leq n$, on a : $E[B_T - B_S] \leq E[(X^{n+1})_{S+} - (X^{n+1})_{T+}] = E[X_{S+} - X_{T+}]$.

THEOREME DE STRUCTURE DES $\underline{\underline{A}}$-SURMARTINGALES 4. <u>Soit X une $\underline{\underline{A}}$-surmartingale. Elle se décompose, de façon unique, en $X = M - A - B_-$, où M est une $\underline{\underline{A}}$-martingale locale, A un processus croissant càdlàg prévisible nul en 0, et B un processus croissant càdlàg $\underline{\underline{A}}$-mesurable et purement discontinu, dont la valeur en 0 est $X_0 - E[X_{0+}|\underline{\underline{F}}^a_0]$.</u>

DEMONSTRATION. On sait que X_+ se décompose en $M' - A'$, où M' est une $\mathbb{F}$-martingale locale et A' un processus croissant càdlàg prévisible nul en 0 (c'est la décomposition de Doob-Meyer de X_+). Soit B le processus purement discontinu $\underline{\underline{A}}$-mesurable càdlàg vérifiant $\Delta B = X - {}^a(X_+)$. Le processus B est localement intégrable ($E[B_n] \leq E[X_{0+} - X_{n+}]$) et admet donc une projection duale prévisible B^p. On a alors: $X = {}^a(X_+) + \Delta B$, égal à ${}^a(M') + (B - B^p) - (A' - B^p) - B_-$. Posons $M = {}^a(M') + (B - B^p)$, c'est une $\underline{\underline{A}}$-martingale locale. Il reste à montrer que le processus càdlàg prévisible à variation finie $A = A' - B^p$ est croissant. Le processus $(X_+)^*_t$ étant localement intégrable, on peut trouver une suite (T_n) de t.a. prévisibles, croissante vers $+\infty$, tels que, pour tout n, $(X_+)^{T_n}$

soit de la classe (D). Si (S,T) est un couple de t.a. bornés de $\underline{\underline{A}}$, vérifiant $S \leq T \leq T_n$, on a $E[B^p_T - B^p_S] = E[B_T - B_S] \leq E[X_{S+} - X_{T+}] = E[A'_T - A'_S]$, et donc par différence, $E[A_S] \leq E[A_T]$. Le processus à variation finie prévisible càdlàg A est une sous martingale locale. Par l'unicité de la décomposition de Doob-Meyer, c'est un processus croissant.
Il reste à montrer l'unicité d'une telle décomposition. Si X s'écrit $M - A - B_-$, avec les notations de l'énoncé, X_+ est égal à $M_+ - A - B$ et, B étant $\underline{\underline{A}}$-mesurable, ${}^a(X_+)$ vaut $M - A - B$. Par suite, ΔB est égal à $X - {}^a(X_+)$, ce qui détermine B (B est purement discontinu). Le processus $X_+ + B$ est alors égal à $M_+ - A$ et donc est une $\mathbb{F}$-semimartingale spéciale dont la décomposition canonique est M_+ et $-A$.

REMARQUE. Si l'on pose $A' = A - B_-$, A' est un processus croissant (làdlàg) tel que A'_+ est $\underline{\underline{A}}$-mesurable. On retrouve A et B à partir de A' car $\Delta B = \Delta_+ A'$ et B est purement discontinu. On peut donc énoncer le théorème de décomposition en disant que X <u>peut s'écrire</u>, <u>de manière unique</u>, <u>sous la forme</u> $X = M - A$, <u>où</u> M <u>est une</u> $\underline{\underline{A}}$-<u>martingale locale et</u> A <u>un processus croissant prévisible</u> (<u>làdlàg</u>), <u>nul en</u> 0, <u>tel que</u> A_+ <u>soit</u> $\underline{\underline{A}}$-<u>mesurable</u>.

Nous avons démontré le théorème de décomposition des $\underline{\underline{A}}$-surmartingales à partir de la décomposition de Doob-Meyer d'une $\mathbb{F}$-surmartingale càdlàg. <u>Une autre voie pour parvenir à ce résultat est d'utiliser le "théorème d'analyse fonctionnelle"</u> (th. 18, II). <u>C'est la voie suivie par Meyer pour les surmartingales fortes optionnelles</u> ($\mathbb{O}$-surmartingales) On trouvera cet argument dans D-M [4] VII.

V <u>THEORIE DES</u> $\underline{\underline{A}}$-<u>SEMIMARTINGALES</u>.

Nos notations et conventions sont celles des chapitres III et IV.

DEFINITION. <u>Un processus</u> X <u>est une</u> $\underline{\underline{A}}$-<u>semimartingale si et seulement si on peut l'écrire</u> $X = M + A$, <u>où</u> M <u>est une</u> $\underline{\underline{A}}$-<u>martingale locale et</u> A <u>un processus</u> $\underline{\underline{A}}$-<u>mesurable à variation finie</u> (làdlàg).

REMARQUE. La théorie usuelle des semimartingales suppose celles-ci <u>c</u>àdlàg. Il existe cependant des "semimartingales làdlàg" naturelles, même dans le cadre des conditions habituelles (exemple les surmartingales fortes optionnelles). Pour nous une semimartingale sera à priori làdlàg, et nous allons voir que tous les théorèmes connus sont encore valides dans notre cadre.

Nous avons vu que <u>toute</u> $\underline{\underline{A}}$-<u>sur-martingale est une</u> $\underline{\underline{A}}$-<u>semimartingale d'un type spécial</u> (A est prévisible et A_+ est $\underline{\underline{A}}$-mesurable). A cette occasion, nous pourrions introduire la notion de $\underline{\underline{A}}$-semimartingale

spéciale, ce que nous ne ferons pas, nous contentant de la suggérer.[1]
Le théorème 8, III , montre que *le produit de deux $\underline{\underline{A}}$-martingales locales est une $\underline{\underline{A}}$-semimartingale*.
Si X est une $\underline{\underline{A}}$-semimartingale, il est clair que X est làdlàg et que X_+ est une semimartingale càdlàg de $\mathbb{O}(\mathbb{F})$; de même X_- est une $\mathbb{P}(\mathbb{F})$-semimartingale. Les réciproques sont fausses.

THEOREME 1. *Si* X *est une* $\underline{\underline{A}}$*-semimartingale et* T *un temps de stabilité de* $\underline{\underline{A}}$, X^T *est encore une* $\underline{\underline{A}}$*-semimartingale*.

DEMONSTRATION. Il suffit de le montrer pour une $\underline{\underline{A}}$-martingale locale M. Soit T un temps de stabilité de $\underline{\underline{A}}$ (i.e. un t.a. de $\mathbb{F}$). Posons $R = {}^a((M_+)^T)$; c'est une $\underline{\underline{A}}$-martingale locale et M^T ne diffère de R que par le processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable à variation finie (càg) $({}^a(M_+)_T - M_{T+})I_{]T,\infty[}$

THEOREME 2. *Le produit de deux* $\underline{\underline{A}}$*-semimartingales est une* $\underline{\underline{A}}$*-semimartingale*.

Nous démontrerons ce résultat après l'introduction de l'intégrale stochastique générale. Il n'y aura pas de cercle vicieux car la définition de l'intégrale stochastique ne reposera pas sur les résultats qui vont suivre.

THEOREME 3. INVARIANCE PAR CHANGEMENT DE PROBABILITE. *Si* Q *est une probabilité équivalente à* P, *toute* $(\underline{\underline{A}},P)$*-semimartingale est une* $(\underline{\underline{A}},Q)$*-semimartingale*.

DEMONSTRATION. Il suffit de montrer que toute $(\underline{\underline{A}},P)$-martingale locale est une $(\underline{\underline{A}},Q)$-semimartingale. Soit M une $(\underline{\underline{A}},P)$-martingale locale. Soit D une version $\underline{\underline{A}}$-martingale forte de $E_P[dQ/dP\,|\,\underline{\underline{F}}^a_T]$ $(D = {}^a_P(dQ/dP))$. D'après le théorème de section, D est strictement positive. Le processus $1/D$ est une $(\underline{\underline{A}},Q)$-martingale égale à ${}^a_Q(dP/dQ)$. D'après le théorème 8 ch. III, le processus $MD - [M,D]$ est une $(\underline{\underline{A}},P)$-martingale locale, et donc, $M - [M,D]\times 1/D$ est une $(\underline{\underline{A}},Q)$-martingale locale (exercice). Le processus $[M,D]\times 1/D$, produit de deux $(\underline{\underline{A}},Q)$-semimartingales est une $(\underline{\underline{A}},Q)$-semimartingale, ce qui prouve que M est une $(\underline{\underline{A}},Q)$-semimartingale.

Caractérisation des $\underline{\underline{A}}$*-semimartingales par des propriétés d'intégrateur*.

Cette partie, inspirée du théorème de Dellacherie-Mokobodzki [8], a été l'occasion de nombreuses discussions avec C. Dellacherie, qu'il nous est agréable de remercier.

Tout d'abord un petit lemme très utile, qui nous servira souvent par la suite (en fait ce sera le "Hint" des :(exercice)). Nous laissons au lecteur le soin de le démontrer (par récurrence).

----

[1] En fait nous l'introduisons au lemme 5 suivant le théorème 5

LEMME. Si $T_1,T_2,\dots,T_n$ sont n t.a. de $\underline{\underline{A}}$, on peut trouver n autres t.a. de $\underline{\underline{A}}$, $S_1,S_2,\dots,S_n$ tels que $S_1 \leq S_2 \leq \dots \leq S_n$ et $\bigcup_i [\![S_i]\!] = \bigcup_i [\![T_i]\!]$.

Nous dirons que $S_1,S_2,\dots,S_n$ est un réordonnement de $T_1,T_2\dots,T_n$.

Nous appelons $\mathbb{D}$ l'espace vectoriel engendré par les processus de la forme $yI_{]\!]S,T]\!]}$ où S et T sont deux t.a. bornés de $\underline{\underline{A}}$ tels que $S \leq T$, et y est une v.a. étagée (à nombre fini de valeurs) $\underline{\underline{F}}^a_S$-mesurable.

On vérifie (exercice) que tout processus Y de $\mathbb{D}$ peut s'écrire sous la forme $Y = \sum_i y_i I_{]\!]T_i,T_{i+1}]\!]}$, avec T_i t.a. borné de $\underline{\underline{A}}$, $T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_n$ et y_i $\underline{\underline{F}}^a_{T_i}$-mesurable étagée.

On note $\mathbb{D}^u$ l'espace $\mathbb{D}$ muni de la topologie de la convergence uniforme (en (t,ω)). L'espace L^0 est l'espace des v.a. muni de la topologie de la convergence en probabilité.

Si X est un processus[1] on note J_X l'application de $\mathbb{D}$ dans L^0 qui, à tout processus Y de $\mathbb{D}$, de la forme précitée, associe la variable aléatoire $J_X(Y) = \sum_i y_i(X_{T_{i+1}} - X_{T_i})$. Cette définition est cohérente car elle ne dépend pas de la décomposition particulière de Y.

Nous dirons que J_X est localement continue si, pour tout entier N, pour toute suite (Y^n) d'éléments de $\mathbb{D}$ convergeant uniformément vers 0, en restant nulle hors de $[0,N]$, $J_X(Y^n)$ converge en probabilité vers 0.

THEOREME 4. Soit X un processus[1]. S'il existe une suite (U_n) de temps aléatoires convergeant p.s. vers $+\infty$, et une suite (Z^n) de processus[1] tels que, pour tout n, J_{Z^n} soit localement continue et que l'on ait $XI_{[\![0,U_n[\![} = Z^nI_{[\![0,U_n[\![}$, alors J_X est localement continue.

DEMONSTRATION. Ceci se déduit immédiatement de l'inégalité:

$P[|J_X(Y)| \geq \varepsilon] \leq P[|J_{Z^k}(Y)| \geq \varepsilon] + P[U_k \leq N]$, pour Y nul hors de $[0,N]$.

Voici le théorème fondamental de ce paragraphe. Il généralise le théorème de Dellacherie-Mokobodzki (exposé par Meyer [8]).

THEOREME 5. Soit X un processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable. X est une $\underline{\underline{A}}$-semimartingale si et seulement si J_X est localement continue.

La démonstration se fera par étapes, en plusieurs lemmes qui, tous ont leur intérét.

LEMME 1. Si X est une $\underline{\underline{A}}$-semimartingale, on peut trouver une suite (T_n) croissante vers $+\infty$, de temps de stabilité de $\underline{\underline{A}}$ tels que, pour tout n X^{T_n} puisse se décomposer en la somme d'une $\underline{\underline{A}}$-martingale bornée et d'un processus à variation finie.

---

[1] mesurable.

DEMONSTRATION. Soit X une $\underline{\underline{A}}$-semimartingale. D'après le théorème 7, III elle peut se décomposer en $M+A$, où M est une $\underline{\underline{A}}$-martingale à sauts gauches et droits bornés, et A est un processus à variation finie.
La $\mathbb{F}$-martingale locale M_+ est alors localement bornée et on peut trouver une suite (T_n), croissante vers $+\infty$, de t.a. bornés de $\mathbb{F}$ tels que, pour tout n, $(M_+)^{T_n}$ soit bornée. Posons $W^n = {}^a((M_+)^{T_n})$, c'est une $\underline{\underline{A}}$-martingale bornée; si l'on pose $V_n = A^{T_n} + ({}^a(M_+)_{T_n} - M_{T_n+})I_{]\!]T_n,\infty[\![}$, un calcul simple montre que X^{T_n} est égal à $W^n + V^n$.

REMARQUE. Les temps T_n ne sont que des temps de stabilité de $\underline{\underline{A}}$. La même démonstration, mais en utilisant le th. 4,III, montre qu'on peut trouver une suite (S_n) de temps d'arrêt prévisibles (donc de $\underline{\underline{A}}$) tels que pour tout n, X^{S_n} se décompose en une $\underline{\underline{A}}$-martingale bornée dans L^2 (ou L^p) et un processus à variation finie.

Montrons maintenant que si X est une $\underline{\underline{A}}$-semimartingale, alors J_X est localement continue.

D'après le th.4 et le lemme précédent, on est ramené au cas d'une $\underline{\underline{A}}$-semimartingale de la forme $X = M+A$, où M est une $\underline{\underline{A}}$-martingale bornée et A est à variation totale finie.
Il est clair que $J_A : \mathbb{D}^u \to L^0$ est continue, car on a, en notant Var(A) la variation totale de A, $|J_A(Y)| \leq \|Y\|_u \mathrm{Var}(A)$.
Un calcul élémentaire (en théorie des martingales) montre que $\|J_M(Y)\|_2$ est majorée par $\|Y\|_u \|M_\infty\|_2$, et donc que $J_M : \mathbb{D}^u \to L^2$ est continue.

Il nous faut maintenant montrer la réciproque. Celle-ci est fort longue et reprend les idées de Dellacherie-Mokobodzki (le lemme 3 est nouveau et simplifie beaucoup leur démonstration).

LEMME 2. Soit (C_n) une suite de convexes de $L^1(P)$ bornés dans L^0. Il existe une probabilité Q équivalente à P, de densité bornée, et telle que, pour tout n, $\sup_{x\in C_n} |E_Q[x]| < +\infty$.

Voir les commentaires de Meyer au théorème de Yan sur les convexes de L^1, dans ce volume.

LEMME 3. Soit X un processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable tel que J_X soit localement continue. Pour tout N, la v.a. $Y_N = \operatorname{ess\,sup}_T |X_T^N|$ est finie p.s., T décrivant l'ensemble des t.a. bornés de $\underline{\underline{A}}$.

DEMONSTRATION. Il suffit de démontrer que si $J_X : \mathbb{D}^u \to L^0$ est continue, $Y = \operatorname{ess\,sup}_T |X_T|$ est finie p.s. . Nous pouvons supposer que $X_0 = 0$. Il faut montrer que pour toute famille dénombrable $\underline{\underline{H}}$ de t.a. bornés de $\underline{\underline{A}}$, $\sup_H |X_T|$ est finie p.s. . Si T est un t.a. borné de $\underline{\underline{A}}$, X_T est égal à $J_X(^=]\!]0,T]\!])$. Par suite, $\{X_T$, T t.a. borné de $\underline{\underline{A}}\}$ est un borné de L^0, car inclus dans $J_X(B)$ (où B désigne la boule unité de $\mathbb{D}^u$). C'est seulement cette condition qui nous est utile. Soit $\underline{\underline{H}}$ une famille dénombrable de t.a. bornés de $\underline{\underline{A}}$. Soit $I = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ une sous famille finie de $\underline{\underline{H}}$. Considérons un réordonnement $S_1 \leq S_2 \leq \ldots \leq S_n$ de cette famille. Soient $\varepsilon > 0$, et $c > 0$ tels que, pour tout t.a. borné T de $\underline{\underline{A}}$, $P[|X_T| > c] \leq \varepsilon$. Posons $T = \inf\{S_i, |X_{S_i}| > c\} \wedge S_n$. T est un t.a. borné de $\underline{\underline{A}}$ (exercice) et on a $P[\sup_I |X_{T_i}| > c] \leq P[|X_T| > c] \leq \varepsilon$. En faisant croitre I vers $\underline{\underline{H}}$, on obtient $P[\sup_{\underline{\underline{H}}} |X_T| > c] \leq \varepsilon$. Ceci démontre le lemme.

DEFINITION. <u>Un processus</u> X <u>est une</u> <u>$\underline{\underline{A}}$-quasimartingale</u> si et seulement si il est $\underline{\underline{A}}$-mesurable et vérifie: pour tout t.a. borné T de $\underline{\underline{A}}$, X_T est intégrable, et, pour tout N, $V_N(X) = \sup_{\underline{\underline{S}}_N} E[\sum_i |E[X_{T_{i+1}} - X_{T_i}]|]$ est fini, $\underline{\underline{S}}_N$ désignant l'ensemble des subdivisions $0 \leq T_1 \leq \ldots \leq T_n \leq N$, formées de temps d'arrêt de $\underline{\underline{A}}$.

REMARQUE. On montre très facilement que, si L_X désigne la forme linéaire $E[J_X(.)]$ sur $\mathbb{D}^u$, $V_N(X)$ <u>est la norme de</u> L_{X^N} .

LEMME 4. <u>Soit</u> X <u>un processus</u> <u>$\underline{\underline{A}}$-mesurable tel que</u> J_X <u>est localement continue</u>. <u>Il existe alors une probabilité équivalente à</u> P, <u>de densité bornée</u>, <u>telle que</u> X <u>soit une</u> $(\underline{\underline{A}}, Q)$-<u>quasimartingale</u>.

DEMONSTRATION. D'après le lemme 3, pour tout N, $Y_N = \text{ess}\sup_T |X_T^N|$ est finie p.s. D'après le lemme de Borel-Cantelli, on peut trouver une probabilité Q^1 équivalente à P, de densité bornée, telle que, pour tout N, Y_N soit Q^1-intégrable. Si $\underline{\underline{B}}$ désigne la boule unité de $\mathbb{D}^u$, pour tout N, $C_N = J_{X^N}(\underline{\underline{B}})$ est un convexe de $L^1(Q)$, borné dans $L^0(Q^1)$ $(=L^0(P))$. D'après le lemme 2, on peut trouver une probabilité Q équivalente à Q^1 de densité bornée, telle que, pour tout N $\sup_{Y \in \underline{\underline{B}}} |E_Q[J_{X^N}(Y)]| < +\infty$, ce qui revient à dire, d'après la remarque précédente, que X est une $(\underline{\underline{A}}, Q)$-quasimartingale.

LEMME 5. <u>Si</u> X <u>est une</u> <u>$\underline{\underline{A}}$-quasimartingale</u>, X <u>est une</u> <u>$\underline{\underline{A}}$-semimartingale</u>.

DEMONSTRATION. On peut montrer que si X est une $\underline{\underline{A}}$-quasimartingale, pour tout N, X^N est différence de deux $\underline{\underline{A}}$-surmartingales. Ce résultat, qui généralise la décomposition de Rao, n'est pas facile et nous renvoyons le lecteur à un article à paraitre, écrit en collaboration avec C. Dellacherie et qui reprend ces questions dans un cadre plus général (on considère des v.a. X(T) indexées par certains t.a. de $\underline{\underline{A}}$) Nous laissons donc le lecteur sur sa faim, attendant(?) [7].

Nous avons vu, au ch. IV, que toute $\underline{\underline{A}}$-surmartingale se décompose de façon unique, en la différence d'une $\underline{\underline{A}}$-martingale locale et d'un processus croissant prévisible A tel que A_+ soit $\underline{\underline{A}}$-mesurable (un Processus $\underline{\underline{A}}$ - Mesurable!).

Nous avons besoin maintenant de parler de <u>$\underline{\underline{A}}$-semimartingale spéciale</u>.

On appelle ainsi toute $\underline{\underline{A}}$-semimartingale X pouvant s'écrire $X = M + A$, où M est une $\underline{\underline{A}}$-martingale locale et A un processus prévisible à variation finie, tel que A_+ est $\underline{\underline{A}}$-mesurable et $A_0 = X_0$. Montrons qu'une telle décomposition est unique. Par différence, il suffit de montrer que si une $\underline{\underline{A}}$-martingale locale M est égale à un processus prévisible A nul en 0, à variation finie et tel que A_+ soit $\underline{\underline{A}}$-mesurable, alors M (et A) est identiquement nulle. La $\underline{\underline{A}}$-martingale M étant prévisible, on a $M = {}^a(M_+) = {}^p(M_+) = M_-$, et donc M est continue à gauche. De même, $M_+ = A_+$ est $\underline{\underline{A}}$-mesurable, et donc $M = {}^a(M_+) = M_+$, ce qui prouve que M est continue; comme elle est de plus nulle en 0 et à variation finie, elle est identiquement nulle.

Reprenons notre démonstration. Le processus X étant une $\underline{\underline{A}}$-quasimartingale, X^N est, pour tout N, une $\underline{\underline{A}}$-semimartingale spéciale. Il est clair, d'après ce qui précéde, que X est une $\underline{\underline{A}}$-semimartingale spéciale.

La réciproque du théorème 5 est alors établie: si X est $\underline{\underline{A}}$-mesurable et tel que J_X soit localement continue, il existe une probabilité Q équivalente à P, de densité bornée, telle que X soit une $(\underline{\underline{A}},Q)$-quasimartingale et donc une $(\underline{\underline{A}},Q)$ semimartingale (spéciale). La probabilité Q étant équivalente a P, on a vu qu'alors X est une $(\underline{\underline{A}},P)$-semimartingale (th. 3).

Conséquences du théorème 5. Propriétés de stabilité.

Nous ne supposerons pas ici que $\underline{\underline{A}}$ est P-complète. Nous dirons qu'un processus X est une $(\underline{\underline{A}},P)$-semimartingale si et seulement X est $\underline{\underline{A}}$-mesurable et indistinguable d'une $(\underline{\underline{A}}^P,P)$-semimartingale.

Il est clair qu'un processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable X est une $(\underline{\underline{A}},P)$-semimartingale si et seulement si $J_X : \mathbb{D}_{\underline{\underline{A}}} \to L^0(P)$ est localement continue, $\mathbb{D}_{\underline{\underline{A}}}$ étant défini comme plus haut, mais sans supposer que $\underline{\underline{A}}$ est P-complète.

THEOREME 6. Si Q est une probabilité absolument continue par rapport à P, toute $(\underline{\underline{A}},P)$-semimartingale est une $(\underline{\underline{A}},Q)$-semimartingale.

DEMONSTRATION. "L'inclusion" $j: L^0(P) \to L^0(Q)$ est continue.

THEOREME 7. Soit X un processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable. L'ensemble $\underline{\underline{S}}(\underline{\underline{A}},X)$ des lois de probabilité P faisant de X une $(\underline{\underline{A}},P)$-semimartingale est dénombrablement convexe.

DEMONSTRATION. Soient (P_n) une suite de probabilités de $\underline{\underline{S}}(\underline{\underline{A}},X)$ et (c_n) une suite de nombres strictement positifs, de somme égale à 1. Montrons que $P = \sum_n c_n P_n$ appartient à $\underline{\underline{S}}(\underline{\underline{A}},X)$. Soient $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$ et $d > 0$; soit n tel que $\sum_{k>n} c_k < d/2$, soit $a > 0$ tel que, pour tout $Y \in \mathbb{D}_{\underline{\underline{A}}}$ nul hors de $[0,N]$ et de norme $\|Y\|_u < a$, on ait $P_k[|J_X(Y)|] \leq d/2nc_k$, pour

$k=1,\dots,n$. On a alors, si Y est nul hors de $[0,N]$ et de norme $\leq a$, $P[|J_X(Y)|\geq\varepsilon]\leq d$, c.q.f.d.

Si A est une partie mesurable de Ω, de probabilité >0 , nous notons P^A la probabilité $P[.\cap A]/P[A]$.

COROLLAIRE. Soit X un processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable. Soit (A_n) une suite de parties mesurables de Ω, de probabilité >0 , et telle que $P[\bigcup_n A_n]=1$. Si, pour tout n, X est une $(\underline{\underline{A}},P^{A_n})$-semimartingale, alors X est une $(\underline{\underline{A}},P)$-semimartingale.

Ceci résulte immédiatement du théorème précédent. En particulier, si pour tout n, il existe une $(\underline{\underline{A}},P)$-semimartingale Z^n telle que Z^n et X coincident sur A_n, alors X est une $(\underline{\underline{A}},P)$-semimartingale (utiliser le th.6).

THEOREME 8. Soit $\underline{\underline{B}}$ une tribu de Meyer incluse dans $\underline{\underline{A}}$. Si X est une $(\underline{\underline{A}},P)$-semimartingale, X est une $(\underline{\underline{B}},P)$-semimartingale.

DEMONSTRATION. C'est immédiat car $\mathbb{D}_{\underline{\underline{B}}}$ est inclus dans $\mathbb{D}_{\underline{\underline{A}}}$, tout t.a. de $\underline{\underline{B}}$ étant un temps de coupe de $\underline{\underline{A}}$, et donc un temps d'arrêt de $\underline{\underline{A}}$.

THEOREME 9. Soit X un processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable. S'il existe une suite (U_n) de temps aléatoires, qui converge p.s. vers $+\infty$, et une suite (Z^n) de $(\underline{\underline{A}},P)$-semimartingales telles que, pour tout n, $XI_{[\![0,U_n[\![}$ soit égale à $Z^nI_{[\![0,U_n[\![}$, alors X est une $(\underline{\underline{A}},P)$-semimartingale.

Ceci résulte immédiatement des théorèmes 4 et 5. En particulier, si, pour tout n, X^{U_n} est une $(\underline{\underline{A}},P)$-semimartingale, X est une $(\underline{\underline{A}},P)$-semimartingale.

Quelques remarques.

Nous supposons de nouveau, pour simplifier, que $\underline{\underline{A}}$ est P-complète.

LEMME Soit X un processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable làdlàg tel que $X_+=0$. Le processus X est une $\underline{\underline{A}}$-semimartingale si, et seulement si, il est à variation finie.

DEMONSTRATION. Si X est une $\underline{\underline{A}}$-semimartingale, X peut se décomposer en L_-+N+A (avec nos notations habituelles). Par hypothése, $L+N+A_+=0$, ce qui prouve que $M=L+N$ est à variation finie. On a alors $L=M-M^a$ et $N=M^a$, ce qui montre que L et N sont à variation finie. Le processus $X=L_-+N+A$ est alors à variation finie.

COROLLAIRE. Soit X une $\underline{\underline{A}}$-semimartingale. Le processus X est une $\mathbb{O}(\mathbb{F})$-semimartingale si et seulement si Δ_+X est à variation finie.

DEMONSTRATION. Si X est une $\mathbb{O}(\mathbb{F})$-semimartingale, par différence, Δ_+X est une $\mathbb{O}(\mathbb{F})$-semimartingale, et donc, d'après le lemme, est à variation finie ($(\Delta_+ X)_+ = (X_+ - X)_+ = 0$). Réciproquement, si $\Delta_+ X$ est à variation finie, $X = X_+ - \Delta_+ X$ est une $\mathbb{O}(\mathbb{F})$-semimartingale.

On voit ainsi qu'il peut exister des $\underline{\underline{A}}$-semimartingales qui ne soient pas des $\mathbb{O}(\mathbb{F})$-semimartingales. En fait, <u>toute $\underline{\underline{A}}$-semimartingale est une $\mathbb{O}(\mathbb{F})$-semimartingale si et seulement si toute co-$\underline{\underline{A}}$-martingale est à variation finie</u>, ou, ce qui revient au même, toute co-$\underline{\underline{A}}$-martingale L vérifie, pour tout t, $\sum_{s \leq t} |\Delta L_s| < +\infty$ (exercice).

De même, si X est un processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable làdlàg tel que X_+ soit une $\mathbb{O}(\mathbb{F})$-semimartingale, X n'est pas nécessairement une $\underline{\underline{A}}$-semimartingale: considérons un processus déterministe X (donc $\underline{\underline{A}}$-mesurable) làdlàg tel que $X_+ = 0$ et, pour au moins un t, $\sum_{s \leq t} |\Delta_+ X_s| = +\infty$. Le processus X_+ est une $\mathbb{O}(\mathbb{F})$-semimartingale et $\Delta_+ X = -X$ n'est pas à variation finie.

Rappelons cependant que si X est une $\underline{\underline{A}}$-semimartingale, X_+ est une $\mathbb{O}(\mathbb{F})$-semimartingale.

VI. <u>L'INTEGRALE STOCHASTIQUE</u> .

Après de longs tâtonnements, nous nous sommes aperçus que l'on pouvait définir <u>trivialement</u> (à partir de l'intégrale stochastique usuelle, qui elle n'est pas triviale!) une très bonne intégrale stochastique d'un processus prévisible, disons localement borné (pour simplifier) par rapport à un processus làdlàg X tel que X_+ soit une $\mathbb{F}$-semimartingale. Cette intégrale posséde les propriétés suivantes: elle satisfait au théorème de convergence dominé; si X est $\underline{\underline{A}}$-mesurable, (resp. une $\underline{\underline{A}}$-semimartingale, une P-$\underline{\underline{A}}$-Martingale locale), le processus $f.X = \int_0^{\cdot} f_s \, dX_s$ conserve cette propriété. Pour bien comprendre cette notion, il faut plutôt concevoir l'intégration comme un procédé qui, à un processus fait correspondre un autre processus.

Etudions d'abord le cas des processus à variation finie (làdlàg).

§ 1. <u>INTEGRATION PAR RAPPORT A UN PROCESSUS A VARIATION FINIE</u>.

Soit A une fonction à variation finie définie sur $\mathbb{R}_+$. Si A est continue à droite, on définit l'intégrale de Lebesgue-Stielges habituelle par rapport à une fonction mesurable localement bornée, sur tout intervalle de temps $[0,t]$. Nous notons $\int_0^t f_s \, dA_s$ cette intégrale et $f.A$ la fonction (à variation finie càd) qui à t associe $\int_0^t f_s \, dA_s$.

Supposons maintenant que A soit seulement à variation finie. On sait alors construire l'intégrale Riemanienne par rapport à A, <u>ce que nous ne ferons pas</u> car celle-ci est seulement continue pour la convergence uniforme et ne satisfait donc pas au théorème de convergence dominée.

La fonction A est làdlàg et A_+ est càdlàg à variation finie. Si f est une fonction mesurable localement bornée, nous posons, par définition, $f.A = f.A_+ - f\,\Delta_+A$, et notons $\int_0^t f_s\,dA_s$ la valeur en t de f.A .

THEOREME 1. Si une suite (f^n) de fonctions mesurables localement bornées converge simplement vers une fonction f, en restant majorées en module par une fonction localement bornée fixe, alors $f^n.A$ converge uniformément sur tout compact vers f.A.

DEMONSTRATION. C'est bien connu pour $f^n.A_+$ et résulte du théorème de Prokhorov. C'est à peu prés immédiat pour $f^n\Delta_+A$ car le nombre de sauts à droite (et à gauche) de A, d'amplitude $\geq \varepsilon$, est fini sur tout intervalle compact.

Pour tout t, l'application qui à f mesurable localement bornée, fait correspondre $\int_0^t f_s\,dA_s$ est une mesure sur $\mathbb{R}_+$. C'est la mesure associée à la fonction à variation finie càd $(A^t)_+$ (qu'il ne faut pas confondre avec $(A_+)^t$!)

On voit ainsi que cette intégrale est non anticipante: pour connaitre $\int_0^t f_s\,dA_s$, il suffit de connaitre A sur [0,t], car on connait alors A_+ sur [0,t[. Le déroulement du temps joue un rôle primordial.

On a les propriétés élémentaires:

$$I_{[0,t]}.A = AI_{[0,t]} + A_{t+}I_{]t,\infty[} \quad (\neq A^t) .$$
$$I_{[0,t[}.A = AI_{[0,t[} + A_{t-}I_{[t,\infty[} \quad = A^{t-} .$$

Signalons que si X est continue à gauche (resp. à droite), f.A est l'intégrale habituellement définie dans ces conditions.

Ceci étant posé, on s'aperçoit que A n'a pas besoin d'être à variation finie, mais seulement làdlàg et tel que A_+ soit à variation finie l'intégrale f.A étant toujours définie par $f.A = f.A_+ - f\,\Delta_+A$. Toutes les propriétés énoncées ci-dessus restent encore valides.

§2 INTEGRALE STOCHASTIQUE PAR RAPPORT A UNE $\underline{\underline{A}}$-SEMIMARTINGALE.

Les notations et conventions restent celles des chapitres précédents. Un processus prévisible f est dit localement borné s'il existe une suite (T_n) de t.a. , croissante vers $+\infty$, et tels que, pour tout n, $f^{T_n}I_{\{T^n>0\}}$ soit borné. On peut montrer que ceci équivaut simplement à ce que, pour tout t, f^*_t soit fini p.s.

Si (X^n) est une suite de processus mesurables et X est un processus mesurable, nous dirons que X^n converge simplement vers X, si, pour presque tout ω et pour tout t, $X^n_t(\omega)$ converge vers $X_t(\omega)$; on notera ceci par $X^n \xrightarrow{s} X$. Nous dirons que X^n converge uniformément en probabilité sur tout compact vers X si, pour tout t, $(X^n - X)^*_t$ converge en probabilité vers 0. Il suffit en fait qu'il existe une suite (T_n) de temps aléatoires convergeant **p.s.** vers $+\infty$ et tels, que pour tout n, $(X^k-X)^*_{T_n}$ converge en probabilité vers 0. On notera ceci par $X^n \xrightarrow{ucp} X$. Par **un** procédé diagonal, on peut alors extraire une sous-suite (n_k) telle que, pour presque tout ω, $X^{n_k}_\bullet(\omega)$ converge uniformément sur tout compact vers $X_\bullet(\omega)$. En particulier, $X^{n_k} \xrightarrow{S} X$.

Nous allons effectuer la même construction que précédemment, mais à partir de l'intégrale stochastique usuelle. On pourrait, bien entendu, construire intrinsèquement cette "nouvelle intégrale", mais la voie la plus courte est évidemment celle consistant à se ramener à l'intégrale existante.

Nous **considérons** un processus làdlàg **X** tel que X_+ soit une $\mathbb{F}$-semimartingale.

DEFINITION. Si **f** est un processus prévisible localement borné, on <u>pose</u> $f.X = f.X_+ - f\Delta_+X$, où $f.X_+$ désigne l'intégrale stochastique habituelle par rapport à la semimartingale continue à droite X_+. <u>On note</u> $\int_0^t f_s \, dX_s$ la valeur en t du processus $f.X$.

Il est clair que cette **définition** ne dépend pas de la probabilité P au sens suivant: si Q est absolument continue par rapport à P, les processus $f_{\dot{P}}X$ et $f_{\dot{Q}}X$ sont Q-indistinguables. On voit aussi que $f.X$ est làdlàg, et que $(f.X)_+ = f.X_+$, qui est encore une $\mathbb{F}$-semimartingale. On vérifie immédiatement que $\Delta_+(f.X) = f\,\Delta_+X$; $\Delta_-(f.X) = f\,\Delta_-X$.

Le théorème de convergence se déduit immédiatement, comme pour le théorème 1, des propriétés de l'intégrale stochastique usuelle. Les processus f^n et f sont des processus prévisibles localement bornés.

THEOREME 2. <u>Si</u> $f^n \xrightarrow{S} f$, <u>en restant majorés en module par un processus prévisible localement borné fixe</u>, <u>alors</u> $f^n.X \xrightarrow{ucP} f.X$.

Considérons un processus prévisible localement borné **f**.

COROLLAIRE. <u>Si</u> X <u>est</u> $\underline{\underline{A}}$-<u>mesurable</u>, f.X <u>est</u> $\underline{\underline{A}}$-<u>mesurable</u>.

DEMONSTRATION. Si f est **prévisible élémentaire** de la forme $I_A I_{]s,t]}$, A $\underline{\underline{F}}_s$-mesurable et $s<t$, on a $f.X = I_A(X - X_{s+})I_{]s,t]} + I_A(X_{t+}-X_{s+})I_{]t,+\infty[}$ ce qui montre que f.X est $\underline{\underline{A}}$-mesurable.
Un argument de classe monotone, utilisant le théorème 2, montre que la propriété est encore vraie si f est un processus prévisible borné. On en déduit le résultat car tout t.a. de $\mathbb{F}$ est un temps de stabilité de $\underline{\underline{A}}$.

Remarquons que, pour ce résultat, $\underline{\underline{A}}$ n'a **pas** besoin d'être une tribu de Meyer située entre $\mathbb{P}$ et $\mathbb{O}$, mais une tribu située entre les prévisibles et les progressivement mesurables de $\mathbb{F}$.

THEOREME 3. <u>Si</u> X <u>est une</u> $\underline{\underline{A}}$<u>-semimartingale</u> (resp. $\underline{\underline{A}}$<u>-martingale locale</u>) f.X <u>est une</u> $\underline{\underline{A}}$<u>-semimartingale</u> (resp. $\underline{\underline{A}}$<u>-martingale locale</u>).

DEMONSTRATION. Si X est une $\underline{\underline{A}}$-martingale locale, on peut décomposer X en $L_- + N$ (avec nos notations habituelles). On voit alors que f.X est égal à $(f.L)_- + (f.N)$ (car $f\,\Delta_+ X = f\,\Delta L$). le processus f.N est une $\mathbb{F}$-martingale locale $\underline{\underline{A}}$-mesurable, donc une $\underline{\underline{A}}$-martingale locale. Le processus f.L est encore une co-$\underline{\underline{A}}$-martingale locale car c'est une $\mathbb{F}$-martingale locale purement discontinue et on a ${}^a(\Delta(f.L)) = f\,{}^a(\Delta L) = 0$. le processus $(f.L)_-$ est donc une $\underline{\underline{A}}$-martingale locale.
Remarquons que $f.X = {}^a(f.X_+)$.
Si X est une $\underline{\underline{A}}$-semimartingale, X peut se décomposer en $X = M + A$, où M est une $\underline{\underline{A}}$-martingale locale et A est à variation finie, $\underline{\underline{A}}$-mesurable. Nous venons de voir que f.M est une $\underline{\underline{A}}$-martingale locale. Quant à f.A, c'est l'intégrale, trajectoire par trajectoire, définie précédemment, de f par le processus à variation fini A. C'est donc un processus à variation finie, $\underline{\underline{A}}$-mesurable d'après le corollaire du th. 2.

§3. <u>REGLES DU CALCUL STOCHASTIQUE</u>.

Le processus X est toujours un processus làdlàg tel que X_+ est une $\mathbb{F}$-semimartingale. Nous appellerons X^c la partie martingale continue de X_+, nulle en 0, et posons $X_{0-} = X_0$.

<u>Formule d'ITO</u>.

De la formule d'Ito usuelle, on déduit trivialement la formule générale: si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2, on a

$$\begin{aligned} f(X_t) = f(X_0) &+ \int_0^t f'(X_{s-})\,dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_{s-})\,d\langle X^c,X^c\rangle_s \\ &+ \textstyle\sum_{0\le s<t} f(X_{s+}) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-})(X_{s+}-X_{s-}) \\ &+ f(X_t) - f(X_{t-}) - f'(X_{t-})(X_t - X_{t-}) \quad . \end{aligned}$$

Bien que déduite trivialement de la formule usuelle, cette formule a des implications très intéressantes, grâce au théorème 3.

<u>Crochet droit</u>.

DEFINITION. <u>Le processus</u> $X_0^2 + \langle X^c,X^c\rangle_t + \sum_{0\le s<t}(X_{s+}-X_{s-})^2 + (X_t - X_{t-})^2$ <u>est appelé le crochet droit de</u> X, <u>et on le note</u> [X,X] .
On polarise cette notion de manière évidente: si Y est du même type que X, on note [X,Y] le processus $\frac{1}{4}([X+Y,X+Y]-[X-Y,X-Y])$.
On obtient la <u>formule d'intégration par partie</u>: $XY = X_-.Y + Y_-.X + [X,Y]$
Le lecteur pourra vérifier que l'<u>on a</u> $[f.X,Y] = f.[X,Y]$ (avec nos nouvelles intégrales).
Il faut bien prendre garde que le processus [X,X] n'est pas, en général, croissant, ni même à variation finie. Il est clair que $[X,X]_+$

est égal à $[X_+,X_+]$ qui est croissant, donc à variation finie. Il en résulte que $[X,X]$ est à variation finie si et seulement si , pour tout t, la somme $\sum_{s\leq t}(X_s - X_{s-})^2$ est finie p.s.

LEMME. Si X est une $\underline{\underline{A}}$-semimartingale, $[X,X]$ est à variation finie.

DEMONSTRATION. Décomposons X en $L_- + N + A$ (notations évidentes). On a alors $(\Delta_- X)^2 = (\Delta N + \Delta_- A)^2 \leq 2((\Delta N)^2 + (\Delta_- A)^2)$, ce qui implique le résultat.

On en déduit immédiatement le théorème suivant, à l'aide de la formule d'Ito:

THEOREME 4. La classe des $\underline{\underline{A}}$-semimartingales est une algèbre sur laquelle opèrent les fonctions de classe C^2.

On pourrait également introduire les règles de calcul pour les fonctions convexes. Nous ne citerons que la formule du temps local, car elle aura un corollaire intéressant pour les $\underline{\underline{A}}$-semimartingales. Nous notons $X^+ = \sup(X,0)$ et $X^- = -\inf(X,0)$, et $L(X)$ le processus croissant continu, temps local de X_+ en 0.

On a alors (trivialement à partir de la formule usuelle)

$$X_t^+ = X_0^+ + \int_0^t I_{\{X_{s-}>0\}}dX_s + \frac{1}{2}L_t(X) + \sum_{0\leq s<t} X_{s+}^+ I_{\{X_{s-}\leq 0\}} + X_{s-}^- I_{\{X_{s-}>0\}}$$
$$+ X_t^+ I_{\{X_{t-}\leq 0\}} + X_t^- I_{\{X_{t-}>0\}}$$

Si X est une $\underline{\underline{A}}$-semimartingale, on peut montrer (de façon un peu compliquée) que X^+ est encore une $\underline{\underline{A}}$-semimartingale. De ce résultat et de la formule précédente, il résulte que le processus $X_t^+ I_{\{X_{t-}\leq 0\}} + \dots$ est à variation finie, d'où

THEOREME 5. Si X est une $\underline{\underline{A}}$-semimartingale, pour tout t, la somme $\sum_{s\leq t} X_s^+ I_{\{X_{s-}\leq 0\}} + X_s^- I_{\{X_{s-}>0\}}$ est finie p.s. .

§ 3. EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES.

Pour être complet, nous énonçons le théorème principal d'existence et d'unicité des équations différentielles stochastiques. Celui-ci se déduit trivialement du théorème établi sous les conditions habituelles. Nous l'énonçons dans $\mathbb{R}^n$, avec des notations matricielles.

Soit X un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, tel que X_+ soit une $\mathbb{F}$-semimartingale (i.e. ses coordonnées le sont). Soit $f(t,\omega,x)$ une application de $\mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^n$ dans $\underline{\underline{L}}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^n)$ (espace des applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$), vérifiant

a) Pour ω et x, $t \to f(t,\omega,x)$ est continue à gauche.

b) Pour tout t et x, $f(t,.,x)$ est $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable.

c) Il existe une application $c:\mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}_+$ telle que, pour tout ω,

l'application $t \to c(t,\omega)$ est bornée sur tout compact et, pour tout t,ω,x,y, $\|f(t,\omega,x)-f(t,\omega,y)\| \leq c(t,\omega)\|x-y\|$.
Soit de plus H un processus làdlàg, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, tel que H_+ soit $\mathbb{F}$-adapté.

THEOREME 6. Sous les hypothèses précédentes, il existe un processus Y làdlàg, tel que Y_+ est $\mathbb{F}$-adapté, unique à l'indistinguabilité près, vérifiant

$$Y_t = H_t + \int_0^t f(s,.,Y_{s-})\,dX_s$$

Si H et X sont $\underline{\underline{A}}$-mesurables (resp. des $\underline{\underline{A}}$-martingales locales, des $\underline{\underline{A}}$-semimartingales), Y possède cette propriété.

DEMONSTRATION. Soit Z l'unique solution de l'équation "usuelle" $Z_t = H_{t+} + \int_0^t f(s,.,Z_{s-})\,dX_{s+}$. Si nous posons $Y_t = Z_t - \Delta_+ H_t - f(t,.,Z_{t-})\Delta_+ X_t$ Y est làdlàg, vérifie $Y_+ = Z$ et $Y_- = Z_-$. On voit ainsi que Y est solution de l'équation intégrale posée dans le théorème. Si Y' est une solution de cette équation, on doit avoir $Y'_+ = Z$, et donc $Y' = Y$.

EXEMPLE. L'équation $Y_t = 1 + \int_0^t Y_{s-}\,dX_s$ admet pour solution $Y_t = \exp(X_t - \frac{1}{2}\langle X^c,X^c\rangle_t)\prod_{s<t}(1+X_{s+}-X_{s-})e^{-(X_{s+}-X_{s-})}x(1+X_t-X_{t-})e^{-(X_t-X_{t-})}$ qui est une $\underline{\underline{A}}$-martingale locale si X en est une.

APPENDICE.

I Une confusion à éviter.

Si $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$ sont deux tribus de Meyer ayant même filtration, $\mathbb{F}^a = \mathbb{F}^b$, il faut bien prendre garde que ceci signifie seulement $\underline{\underline{F}}_t^a = \underline{\underline{F}}_t^b$, pour tout t élément de $\mathbb{R}_+$. Il ne faut surtout pas croire que l'on a nécessairement $\underline{\underline{F}}_T^a = \underline{\underline{F}}_T^b$ pour d'autres temps T.
Ceci s'applique notamment à la situation suivante, qui risque de prêter à confusion: soit $\underline{\underline{A}}$ une tribu de Meyer de filtration $\mathbb{F}^a$, et soit $\mathbb{O}(\mathbb{F}^a)$ la tribu optionnelle de $\mathbb{F}^a$, notée $\mathbb{O}$. On a bien $\mathbb{F}^o = \mathbb{F}^a$, cependant si T est un temps, on a $\underline{\underline{F}}_T^a \subset \underline{\underline{F}}_T^o$, l'inclusion pouvant être stricte en général. La convention habituelle, consistant à noter $\underline{\underline{F}}_T$ la tribu $\underline{\underline{F}}_T^o$, si $\mathbb{O}$ est la tribu optionnelle de $\mathbb{F} = (\underline{\underline{F}}_t)$ est ici malheureuse, car alors on ne peut plus faire la différence entre $\underline{\underline{F}}_T^a$ et $\underline{\underline{F}}_T^{o(\mathbb{F}^a)}$!

II. SI $\underline{\underline{A}}$ N'EST PAS ENGENDREE PAR DES PROCESSUS CADLAG.

Nous allons sortir de notre cadre, et considérer dans la suite, une tribu $\underline{\underline{A}}$ sur $\mathbb{R}_+ x\Omega$, vérifiant seulement les conditions 2°) et 3°) de la définition d'une tribu de Meyer, soit: "les temps constants sont des temps d'arrêt de $\underline{\underline{A}}$". Rappelons que cela signifie que $\underline{\underline{A}}$ contient la tribu déterministe et est stable par arrêt en $t\in\mathbb{R}_+$; ou encore, si X est un processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable et $t\in\mathbb{R}_+$, $X_t I_{[t,+\infty[}$ est $\underline{\underline{A}}$-mesurable.

On associe encore à $\underline{\underline{A}}$ sa filtration. La tribu $\underline{\underline{F}}_t^a$ est la tribu engendrée par les applications X_t, lorsque X décrit l'ensemble des processus $\underline{\underline{A}}$-mesurables. La tribu $\underline{\underline{F}}_\infty^a$ est la tribu $\bigvee_t \underline{\underline{F}}_t^a$ et, si T est un temps, $\underline{\underline{F}}_T^a$ est la tribu engendrée par les applications X_T, X décrivant l'ensemble des processus $\underline{\underline{A}}$-mesurables définis à l'infini et tels que X_∞ soit $\underline{\underline{F}}_\infty^a$-mesurable. Si T est un temps d'arrêt de $\underline{\underline{A}}$ (cf. déf.1,I), on vérifie aisément que $\underline{\underline{F}}_T^a = \{A \in \underline{\underline{F}}_\infty^a : T_A$ est un temps d'arrêt de $\underline{\underline{A}}\}$, qui est alors égale à $\{A \in \underline{\underline{F}}_\infty^a : T_A$ est un temps de coupe de $\underline{\underline{A}}\}$.

1. Si $\underline{\underline{A}}$ est engendrée par des processus continus à gauche.

THEOREME. La tribu $\underline{\underline{A}}$ est engendrée par des processus continus à gauche si et seulement si elle est la tribu prévisible d'une filtration. Elle est alors égale à la tribu prévisible de sa filtration; en particulier, $\underline{\underline{A}}$ est alors une tribu de Meyer.

DEMONSTRATION. Il est clair que si $\underline{\underline{A}}$ est engendrée par des processus continus à gauche, alors $\underline{\underline{A}}$ est incluse dans la tribu prévisible de sa filtration. Montrons qu'alors elle est, en fait, égale à cette tribu prévisible; celle-ci est engendrée par les processus $Y = yI_{[\![t,+\infty[\![}$, où y est $\underline{\underline{F}}_s^a$-mesurable et s<t (sauf pour t=0, auquel cas s=t=0). Si Y est un tel processus, y est en particulier $\underline{\underline{F}}_t^a$-mesurable et donc égale à X_t, pour un processus X $\underline{\underline{A}}$-mesurable. Les temps constants étant des temps d'arrêt de $\underline{\underline{A}}$, le processus $Y = X_t I_{[\![t,+\infty[\![}$ est $\underline{\underline{A}}$-mesurable. Par suite $\underline{\underline{A}}$ est égale à $\mathbb{P}(\mathbb{F}^a)$, et le résultat s'ensuit.

REMARQUE. On voit ainsi que si $\underline{\underline{A}}$ est engendrée par des processus càdlàg ou (inclusif) càg, $\underline{\underline{A}}$ est une tribu de Meyer.

2. Tribus stables.

DEFINITION. On dit que $\underline{\underline{A}}$ est stable si tout temps de coupe de $\underline{\underline{A}}$ est un temps de stabilité de $\underline{\underline{A}}$ (donc un temps d'arrêt de $\underline{\underline{A}}$)

On a vu que toute tribu de Meyer est stable. Cette notion est très importante et nous allons voir que si $\underline{\underline{A}}$ est stable, $\underline{\underline{A}}$ est "proche" d'une tribu de Meyer.

EXEMPLES. Soit $\mathbb{F}$ une filtration sur Ω et supposons que $\underline{\underline{A}}$ est une tribu située entre la tribu prévisible de $\mathbb{F}$ (égale à celle de $\mathbb{F}^+$) et la tribu des progressivement mesurables de $\mathbb{F}^+$.
La tribu $\underline{\underline{A}}$ admet alors les temps constants pour temps d'arrêt et est stable.

DEMONSTRATION. Il est clair que tout temps de coupe est un temps d'arrêt de $\mathbb{F}^+$. Montrons que l'ensemble des t.a. de $\mathbb{F}^+$ est l'ensemble des temps de stabilité de $\underline{\underline{A}}$. Si T est un temps de stabilité de $\underline{\underline{A}}$, en considérant le processus $(t,\omega)\to t$, qui est prévisible, on voit que, pour tout t, $T\wedge t$ est $\underline{\underline{F}}^a_t$-mesurable, donc $\underline{\underline{F}}_{t+}$-mesurable, ce qui prouve que T est un t.a. de $\mathbb{F}^+$. Réciproquement, si T est un t.a. de $\mathbb{F}^+$ et X un processus $\underline{\underline{A}}$-mesurable, on a $X^T = XI_{[\![0,T]\!]} + X_T I_{]\!]T,+\infty[\![}$; le processus $I_{[\![0,T]\!]}$ est prévisible et donc $XI_{[\![0,T]\!]}$ est $\underline{\underline{A}}$-mesurable, quant au processus $X_T I_{]\!]T,+\infty[\![}$, c'est un processus $\mathbb{F}^+$-adapté et continu à gauche donc prévisible, donc $\underline{\underline{A}}$-mesurable. Le processus X^T est donc $\underline{\underline{A}}$-mesurable. Si T est un temps de coupe de $\underline{\underline{A}}$, on voit que T est un t.a. de $\mathbb{F}^+$ et donc un temps de stabilité de $\underline{\underline{A}}$ (et donc un t.a. de $\underline{\underline{A}}$).

Soit Ω un espace polonais[1](ou analytique) et $\mathbb{F}$ une filtration constituée de sous tribus de la tribu borélienne de Ω, $\underline{\underline{B}}_\Omega$. Soit $\underline{\underline{A}}$ la tribu engendrée par les processus adaptés à $\mathbb{F}$. Il est clair que $\underline{\underline{A}}$ admet les temps constants pour temps d'arrêt.
<u>La tribu $\underline{\underline{A}}$ n'est pas stable</u>: l'ensemble de ses temps de coupe est l'ensemble des temps d'arrêt de $\mathbb{F}$, l'ensemble de ses temps de stabilité est l'ensemble des temps d'arrêt étagés (i.e. à valeurs dénombrables) de $\mathbb{F}^+$, et l'ensemble de ses temps d'arrêt est l'ensemble des temps d'arrêt étagés de $\mathbb{F}$.

DEMONSTRATION. Il suffit de montrer que l'ensemble des temps des temps de stabilité de $\underline{\underline{A}}$ est l'ensemble des temps d'arrêt étagés de $\mathbb{F}^+$. Il est clair que tout t.a. étagé de $\mathbb{F}^+$ est un temps de stabilité de $\underline{\underline{A}}$ (exercice) et que tout temps de stabilité de $\underline{\underline{A}}$ est un t.a. de $\mathbb{F}^+$. Soit T un t.a. de $\mathbb{F}^+$ non étagé (i.e. non à valeurs dénombrables). L'ensemble $T(\Omega)$ est alors non dénombrable et on peut trouver $t_o \in \mathbb{R}_+$ tel que $A = T(\Omega)\cap[0,t_o[$ est non dénombrable. Cet ensemble, égal à $T(T^{-1}([0,t_o[))$ est analytique dans $\mathbb{R}$ et a donc la puissance du continu. Puisque $\underline{\underline{B}}_\Omega$ a la puissance du continu, on peut trouver $B\subset A$ tel que $T^{-1}(B)$ n'appartienne pas à $\underline{\underline{B}}_\Omega$. Posons alors $C = \bigcup_{t\in B}\{t\}\times\{T\geq t\}$ et $X = I_C$. le processus X est adapté car $X_t = 0$ si $t\notin B$ et $X_t = I_{\{T\geq t\}}$ si $t\in B$. Le processus X^T n'est pas adapté car $X^T_{t_o} = X_{T\wedge t_o} = I_{T^{-1}(B)}$ n'est même pas $\underline{\underline{B}}_\Omega$-mesurable.

3 <u>Régularisée de $\underline{\underline{A}}$</u>.

DEFINITION. <u>On appelle $\hat{\underline{\underline{A}}}$ la tribu engendrée par les processus càdlàg $\underline{\underline{A}}$-mesurables, et on dit que c'est la régularisée de $\underline{\underline{A}}$</u>.

Rappelons que $\underline{\underline{A}}$ est supposée admettre les temps constants pour temps d'arrêt. Il est clair que $\hat{\underline{\underline{A}}}$ est une tribu de Meyer, et que c'est la plus grande tribu de Meyer incluse dans $\underline{\underline{A}}$. Si $\underline{\underline{A}}$ est une tribu située entre la tribu optionnelle d'une filtration $\mathbb{F}$ et la tribu engendrée par les processus $\mathbb{F}$-adaptés, la régularisée de $\underline{\underline{A}}$ est la tribu optionnelle

---

[1] non dénombrable

On voit alors que <u>l'ensemble des tribus de Meyer sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ est un treillis complet</u>: si $(\underline{\underline{A}}^i)_{i\in I}$ est une famille de tribus de Meyer sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, sa borne supérieure est la tribu engendrée par les $\underline{\underline{A}}^i$, $\bigvee_I \underline{\underline{A}}^i$, qui est clairement une tribu de Meyer. Sa borne inférieure, dans l'ensemble des tribus de Meyer, est la régularisée de $\bigcap_I \underline{\underline{A}}^i$ (qui est une tribu stable), que l'on notera $\bigwedge_I \underline{\underline{A}}^i$. La plus grande tribu de Meyer est la tribu $\underline{\underline{B}}_{\mathbb{R}_+} \times \underline{\underline{P}}(\Omega)$, la plus petite est la tribu déterministe $\underline{\underline{B}}_{\mathbb{R}_+} \times \{\emptyset,\Omega\}$.
Si $\mathbb{F}$ est une filtration sur Ω, et $\mathbb{F}^\varepsilon$ est la filtration $(\underline{\underline{F}}_{t+\varepsilon})$, la tribu progressive de $\mathbb{F}^+$ est la tribu égale à $\bigcap_{\varepsilon>0}\mathbb{O}(\mathbb{F}^\varepsilon)$ (démontré par C.Stricker dans ce volume) et donc $\bigwedge_{\varepsilon>0}\mathbb{O}(\mathbb{F}^\varepsilon)$ est égale à $\mathbb{O}(\mathbb{F}^+)$; c'est aussi la tribu $\bigwedge_{\varepsilon>0}\mathbb{P}(\mathbb{F}^\varepsilon)$. Il est clair que $\bigvee_{\varepsilon>0}\mathbb{O}(\mathbb{F}^\varepsilon)$ est égale à $\underline{\underline{B}}_{\mathbb{R}_+} \times \underline{\underline{F}}_\infty$.
Pour tout temps d'arrêt T de $\underline{\underline{A}}$, on a $\underline{\underline{F}}_T^{a} = \underline{\underline{F}}_T^{\hat{a}}$. En particulier, si $\underline{\underline{A}}$ est stable, $\underline{\underline{A}}$ et $\hat{\underline{\underline{A}}}$ ont mêmes temps d'arrêt et $\underline{\underline{F}}_T^{a} = \underline{\underline{F}}_T^{\hat{a}}$ pour tout temps d'arrêt T de $\hat{\underline{\underline{A}}}$.

<u>Modification</u>.

Si P est une probabilité sur $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ et si $\underline{\underline{A}}$ est incluse dans la tribu mesurable $\underline{\underline{B}}_{\mathbb{R}_+} \times \underline{\underline{F}}$, il résulte du théorème de modification relatif à $\hat{\underline{\underline{A}}}$ (II, th. 12, paragraphe 3) que <u>si X est $\underline{\underline{A}}$-mesurable, il existe un processus Y $\hat{\underline{\underline{A}}}$-mesurable tel que, pour tout temps d'arrêt T de $\underline{\underline{A}}$, on ait $X_T = Y_T$ p.s. sur</u> $\{T<+\infty\}$.
En particulier, <u>si $\underline{\underline{A}}$ est stable</u>, $\underline{\underline{A}}$ est à $\hat{\underline{\underline{A}}}$ ce qu'est la tribu progressive d'une filtration $\mathbb{F}$ à sa tribu optionnelle: <u>si X est $\underline{\underline{A}}$-mesurable, il existe un unique</u> (à l'indistinguabilité près) <u>processus Y $\hat{\underline{\underline{A}}}$-mesurable tel que, pour tout t.a. T de $\hat{\underline{\underline{A}}}$, $X_T = Y_T$ p.s. sur</u> $\{T<+\infty\}$.

III. <u>TRIBU DE MEYER ENGENDREE PAR UN PROCESSUS CADLAG OU CAG</u>.

DEFINITION. Soit X un processus càdlàg ou càg. <u>La plus petite tribu de Meyer rendant X mesurable est la tribu, notée $\underline{\underline{A}}^X$, engendrée par les processus arrêtés X^t et $(s,\omega) \to s\wedge t$, où $t \in \mathbb{R}_+$</u>. Nous dirons que c'est la <u>tribu de Meyer engendrée par</u> X.
La filtration associée à $\underline{\underline{A}}^X$ est la filtration naturelle de X: $\underline{\underline{F}}_t^{a^X}$ est égale à la tribu $\sigma(X_s, s\leq t)$, habituellement notée $\underline{\underline{F}}_t^X$. Nous noterons $\mathbb{O}^X$ et $\mathbb{P}^X$ les tribus optionnelle et prévisible de $\mathbb{F}^X$. Si T est un temps nous notons $\underline{\underline{F}}_T^X$ la tribu $\underline{\underline{F}}_T^{o^X}$ et $\underline{\underline{F}}_{T-}^X$ la tribu $\underline{\underline{F}}_T^{p^X}$. Il est clair que l'on a $\underline{\underline{F}}_{T-}^X \subset \underline{\underline{F}}_T^{a^X} \subset \underline{\underline{F}}_T^X$.
Il est clair, compte tenu du système de générateurs de $\underline{\underline{A}}^X$, que si T est un temps, on a $\underline{\underline{F}}_T^{a^X} = \sigma(T\wedge t, X_{T\wedge t}\ ;\ t \in \mathbb{R}_+) = \sigma(T) \vee \sigma(X_{T\wedge t}\ ;\ t\in\mathbb{R}_+)$ ce qui n'est pas vrai pour $\underline{\underline{F}}_T^X$, en général.

PROPOSITION. <u>La tribu prévisible</u> $\mathbb{P}^X$ <u>est la tribu de Meyer engendrée par</u> X_- $(X_{0-} = X_0)$.

DEMONSTRATION. Il est clair, d'après ce qui précède, que $\underline{\underline{A}}^{X_-} = \mathbb{P}^{X_-}$ et que $\mathbb{P}^{X_-}$ est incluse dans $\mathbb{P}^X$. Montrons l'inclusion réciproque. La tribu $\mathbb{P}^X$ est engendrée par les processus $I_{[\![t,+\infty[\![}$ et $X_s I_{[\![t,+\infty[\![}$ avec $s<t$ (ou $s=t=0$). On voit alors qu'elle est également engendrée par les processus $I_{[\![t,+\infty[\![}$ et $X_{s-}I_{[\![t,+\infty[\![}$ avec $s<t$ (ou $s=t=0$), ce qui prouve le résultat.

COROLLAIRE. <u>Si</u> T <u>est un temps, on a</u> $\underline{\underline{F}}^X_{T-} = \sigma(T)\vee\sigma(X_{(T\wedge t)-}\ ;\ t\in\mathbb{R}_+)$

Considérons maintenant une famille $\mathbb{L}$ de processus càdlàg ou càg. La plus petite tribu de Meyer rendant mesurable ces processus est la tribu, notée $\underline{\underline{A}}^{\mathbb{L}}$, engendrée par les processus X^t et $(s,\omega)\to s\wedge t$ où $X\in\mathbb{L}$ et $t\in\mathbb{R}_+$. On note $\mathbb{P}^{\mathbb{L}}$ et $\mathbb{O}^{\mathbb{L}}$ les tribu prévisible et optionnelle de la filtration $\mathbb{F}^{a\mathbb{L}}$, et, si T est un temps, $\underline{\underline{F}}^{\mathbb{L}}_{T-}$ et $\underline{\underline{F}}^{\mathbb{L}}_T$ les tribus associées.
Il est clair que $\underline{\underline{A}}^{\mathbb{L}}$ est égale à $\bigvee_{X\in\mathbb{L}}\underline{\underline{A}}^X$ et $\underline{\underline{F}}^{a\mathbb{L}}_T = \bigvee_{X\in\mathbb{L}}\underline{\underline{F}}^{aX}_T$.
On voit aussi que $\mathbb{P}^{\mathbb{L}}$ est la tribu de Meyer engendrée par les processus $X_-, X\in\mathbb{L}$. On en déduit les points suivants
Si T est un temps, on a $\underline{\underline{F}}^{a\mathbb{L}}_T = \sigma(T)\vee\sigma(X_{T\wedge t}\ ;\ t\in\mathbb{R}_+$ et $X\in\mathbb{L})$; on a également $\underline{\underline{F}}^{\mathbb{L}}_{T-} = \sigma(T)\vee\sigma(X_{(T\wedge t)-}\ ;\ t\in\mathbb{R}_+$ et $X\in\mathbb{L})$.

IV <u>UNE REMARQUE SUR L'INTEGRALE OPTIONNELLE</u>.

Soit $\mathbb{F}$ une filtration sur $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ vérifiant les conditions habituelles. Considérons une tribu $\underline{\underline{A}}$ engendrée par des processus càdlàg et située entre $\mathbb{P}$ $(=\mathbb{P}(\mathbb{F}))$ et $\mathbb{O}$ $(=\mathbb{O}(\mathbb{F}))$. Appelons $\underline{\underline{M}}^{(a)}$ l'espace des martingales M de $\underline{\underline{M}}$ (espace des martingales càdlàg bornées dans L^2) telles que ${}^aM = M_-$. On a $\underline{\underline{M}}^{(a)} = \underline{\underline{M}}^c \oplus \underline{\underline{M}}^a$, où $\underline{\underline{M}}^c$ est l'espace des martingales bornées dans L^2 continues et $\underline{\underline{M}}^a$ est l'espace des co-$\underline{\underline{A}}$-martingales bornées dans L^2.
Avec ces notations, on a $\underline{\underline{M}}^{(p)} = \underline{\underline{M}}$; $\underline{\underline{M}}^{(o)} = \underline{\underline{M}}^c$ et, si $\underline{\underline{A}}$ est la tribu des accessibles, $\underline{\underline{M}}^{(a)} = \underline{\underline{M}}^{qcg}$, espace des martingales bornées dans L^2 et quasi-continues à gauche.

LEMME. <u>Si</u> M <u>est une martingale de</u> $\underline{\underline{M}}^{(a)}$ <u>et</u> T <u>est un temps d'arrêt de</u> $\underline{\underline{A}}$, <u>alors</u> M^{T-} <u>est encore une martingale de</u> $\underline{\underline{M}}^{(a)}$ $(M_{0-} = E[M_0|\underline{\underline{F}}_{0-}])$.[1]

DEMONSTRATION. L'espace $\underline{\underline{M}}^{(a)}$ étant stable, il suffit de montrer que si M appartient à $\underline{\underline{M}}^{(a)}$ et T est un t.a. de $\underline{\underline{A}}$, alors $M_T I_{[\![T,+\infty[\![}$ est encore une martingale de $\underline{\underline{M}}^{(a)}$; appelons L ce processus. Il est clair que L est une martingale bornée dans L^2 car M_T appartient à $L^2(\underline{\underline{F}}_T)\ominus L^2(\underline{\underline{F}}^a_T)$

---

1 $M^{T-} = M\, I_{[\![0,T[\![} + M_{T-} I_{[\![T,+\infty[\![}$

inclus dans $L^2(\underline{\underline{F}}_T) \ominus L^2(\underline{\underline{F}}_{T-})$. Si S est un temps d'arrêt de $\underline{\underline{A}}$, on a $E[\Delta L_S | \underline{\underline{F}}^a_S] = E[\Delta M_T I_{\{S=T\}} | \underline{\underline{F}}^a_S] = E[\Delta M_S | \underline{\underline{F}}^a_S] I_{\{S=T\}} = 0$, ce qui prouve que L est une co-$\underline{\underline{A}}$-martingale.

Si M appartient à $\underline{\underline{M}}$, nous appelons $L^2(\underline{\underline{A}},M)$ l'espace $L^2(\underline{\underline{A}},dP\otimes d[M,M])$ La classe des intervalles stochastiques $[\![0,T[\![$, T décrivant l'ensemble des temps d'arrêt de $\underline{\underline{A}}$, forme un système total dans $L^2(\underline{\underline{A}},M)$.
Nous allons voir que l'intégrale stochastique optionnelle (dite compensée) est une intégrale de Lebesgue quand on intégre des processus de $L^2(\underline{\underline{A}},M)$ par rapport à M appartenant à $\underline{\underline{M}}^{(a)}$. C'est alors le prolongement " Lebesguien" naturel de l'intégrale stochastique prévisible.

THEOREME. <u>Soit</u> M <u>une martingale de</u> $\underline{\underline{M}}^{(a)}$. <u>Soit</u> Φ <u>l'application intégrale stochastique optionnelle par rapport à</u> M <u>de</u> $L^2(\mathbb{O},M)$ <u>dans</u> $\underline{\underline{M}}$. <u>L'application</u> Φ <u>restreinte à</u> $L^2(\underline{\underline{A}},M)$ <u>est l'unique isométrie</u> Ψ <u>de</u> $L^2(\underline{\underline{A}},M)$ <u>dans</u> $\underline{\underline{M}}$ <u>vérifiant</u> $\Psi(I_{[\![0,T[\![}) = M^{T-}$, <u>pour tout t.a.</u> T <u>de</u> $\underline{\underline{A}}$. <u>Elle prend ses valeurs dans</u> $\underline{\underline{M}}^{(a)}$.

DEMONSTRATION. L'unicité vient du fait que $\{[\![0,T[\![\ ; T\in \underline{\underline{T}}(\underline{\underline{A}})\}$ est total dans $L^2(\underline{\underline{A}},M)$. Appelons Ψ la restriction de Φ à $L^2(\underline{\underline{A}},M)$. Montrons d'abord que Ψ est une isométrie de $L^2(\underline{\underline{A}},M)$ dans $\underline{\underline{M}}$. Nous renvoyons le lecteur à Meyer [6], p. 274-276, pour la démonstration qui suit.
Si T est un temps d'arrêt prévisible, et f appartient à $L^2(\underline{\underline{A}},M)$, on a $E[f_T\Delta M_T | \underline{\underline{F}}_{T-}] = E[f_T E[\Delta M_T | \underline{\underline{F}}^a_T] | \underline{\underline{F}}_{T-}] = 0$. Meyer montre alors que l'on a $E[\Phi^2(f)_\infty] = E[\int f_s^2 d[M,M]_s]$, ce qui prouve que Ψ est une isométrie. Il reste à voir que $\Psi([\![0,T[\![) = M^{T-}$, pour tout t.a. T de $\underline{\underline{A}}$. Il suffit de montrer que $\Psi([\![T]\!]) = \Delta M_T I_{[\![T,+\infty[\![}$ si T est un t.a. de $\underline{\underline{A}}$. Ces deux martingales sont purement discontinues; il suffit donc de montrer qu'elles ont mêmes sauts. Meyer montre que la condition $E[f_T\Delta M_T | \underline{\underline{F}}_{T-}]$ égal 0[1] implique que $\Delta\Phi(f) = f\Delta M$, ce qui prouve le résultat.
Remarquons que, d'après le lemme précédent, si T est un t.a. de $\underline{\underline{A}}$, la martingale M^{T-} appartient à $\underline{\underline{M}}^{(a)}$ et donc, cet espace étant fermé, Ψ prend ses valeurs dans $\underline{\underline{M}}^{(a)}$.

Cette intégrale mérite donc d'être notée $\int f\,dM$. Elle possède les propriétés suivantes: $\Delta\int f\,dM = f\Delta M$; pour tout $N\in\underline{\underline{M}}$, on a la relation $[\int f\,dM,N] = \int f\,d[M,N]$. Si M est à variation finie, $\int f\,dM$ coincide avec l'intégrale de Lebesgue-Stielges de f par M.

---

[1] pour tout t.a. T prévisible.

REFERENCES.

0. C. DELLACHERIE. Capacités et processus stochastiques. Ergeb. der Math. n°67 Springer, 1972.
1. C. DELLACHERIE. Sur les théorèmes fondamentaux de la théorie générale des processus. Sém. de Proba. VII, lect. notes in M. n°321

2 C. DELLACHERIE. Sur la régularisation des surmartingales. Sém. de Proba. XI, lect. notes in M. n°581, Springer-Verlag. 1977

3 C. DELLACHERIE, P.A. MEYER. Probabilités et Potentiels, chap. I-IV Actualités scientifiques et industrielles, n° 1372, Hermann. 1975

4 C. DELLACHERIE, P.A. MEYER. Probabilités et Potentiels, Vol. 2, théorie des martingales. A paraître chez Hermann.

5 Y. LEJAN. Temps d'arrêt stricts et martingales de sauts. Z.f.W. n° 44 , 213-225, 1978.

6 P.A. MEYER. Un cours sur les intégrales stochastiques. Sém. de Proba. X, lect. notes in M. n°511, Springer-Verlag. 1976

7 C. DELLACHERIE, E. LENGLART. Sur des problèmes de modification, de recollement et d'interpolation en théorie des martingales. A paraître.

8 P.A. MEYER. Une caractérisation des semimartingales, d'après Dellacherie. Séminaire de Proba. XIII, lect notes in M. n° 721, Springer Verlag 1979

9 P.A. MEYER. Probabilités et Potentiels. 1ère édition. Actualités scientifiques et industrielles n°1318; Hermann 1966.

10 J.F. MERTENS. Théorie des processus stochastiques généraux. Application aux surmartingales. Z. Wahr. verw. geb. 22,45-68; 1972.

11 C. STRICKER. Semimartingales et valeur absolue. Sém. de Proba XIII lect. notes in M. n° 721, Springer-Verlag, 1979.

12 H. DOSS, E. LENGLART. Sur l'existence, l'unicité et le comportement asymptotique des solutions d'équations différentielles stochastiques Ann. Inst. Henri Poincaré. Vol XIV, n°2, 189-214 , 1978.

13 C. DOLEANS-DADE, P.A. MEYER . Equations différentielles stochastiques Sém. de Proba. XI, Lect. notes in M. n°581, Springer-Verlag, 1977.

Erik Lenglart.
Université de Rouen.
Département de mathématiques
Laboratoire de mathématiques
76 130 Mont Saint Aignan
France.