ÉRIK LENGLART

Appendice à l'exposé précédent : « Inégalités de semimartingales »

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 49-52
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__49_0>

APPENDICE A L'EXPOSE PRECEDENT: INEGALITES DE SEMI MARTINGALES

E. Lenglart

Nous considérons un espace de probabilité filtré $(\Omega,\underline{\underline{F}},\underline{\underline{F}}_t,P)$ vérifiant les conditions habituelles et F une fonction convexe modérée (croissante, nulle en 0), d'exposant p.
L^F désigne l'espace des v.a. X telles que $\|X\|_F = \inf\{c>0,\ E\,F(|X|/c)\leq 1\}$ soit fini. L^F muni de cette norme est un espace de Banach. F étant modérée, $X\in L^F$ si et seulement si $F(|X|)\in L^1$. Nous appelons $\underline{\underline{M}}^F(P)$ (resp. $\underline{\underline{A}}^F(P)$, $\underline{\underline{V}}^F(P)$) l'espace des P-martingales M telles que $M^*_\infty\in L^F$ (resp. des processus adaptés à variation finie, prévisibles nuls en 0 pour $\underline{\underline{V}}^F(P)$, tels que $\int_0^{+\infty}|dA_s|\in L^F$). $H^F(P)$ désigne l'espace des P-semimartingales égal à $\underline{\underline{M}}^F(P)+\underline{\underline{A}}^F(P)=\underline{\underline{M}}^F(P)\oplus\underline{\underline{V}}^F(P)$; $S^F(P)$ l'espace des semimartingales X telles que $X^*_\infty\in L^F(P)$. Il est clair que $H^F(P)\subset S^F(P)$.

Si X est une semimartingale spéciale, nous notons $\tilde{X}$ son "compensateur prévisible", c'est à dire l'unique processus à variation finie sur tout compact, prévisible et nul en 0, tel que $X-\tilde{X}$ soit une martingale locale. La martingale locale $\overset{c}{X}=X-\tilde{X}$ est la "compensée" de X.

LEMME. <u>Soit</u> X <u>une semimartingale spéciale</u>. <u>Si</u> σ_X <u>est un processus prévisible à valeurs dans</u> $\{-1,+1\}$ <u>tel que</u> $|d\tilde{X}|=\sigma_X.dX$, <u>on a</u>

$$\left\|\int_0^{+\infty}|d\tilde{X}_s|\right\|_F \leq 2p\,\|(\sigma_X.X)^*_\infty\|_F \quad .$$

DEMONSTRATION. C'est en fait l'inégalité 2 du th. 3.2 de l'exposé précédent:

a) <u>Si</u> X <u>est une sous martingale locale</u> (i.e. $\sigma_X=1$). Par arrêt, on peut supposer que X est de la classe (D). On a alors $E[\tilde{X}_\infty-\tilde{X}_T]=E[X_\infty-X_T]\leq E[2X^*_\infty I_{\{T<+\infty\}}]$ et on conclut par le lemme de Garsia-Neveu.

b) <u>Cas général</u>. $\sigma_X.X$ est associée à $\sigma_X.\tilde{X}=\int_0^{\cdot}|d\tilde{X}_s|$ et donc est une sous martingale locale.

De cette inégalité, nous pouvons déduire une généralisation des inégalités de Burkholder-Davis-Gundy (B-D-G) aux semi martingales.
Si X est une semimartingale spéciale, on note $\|X\|_{H^F}=\left\|[\overset{c}{X},\overset{c}{X}]^{\frac{1}{2}}_\infty+\int_0^{+\infty}|d\tilde{X}_s|\right\|_F$
$\|X\|_{S^F}=\|X^*_\infty\|_F$ et $P_{H^F}(X)=\sup\{\|\sigma.X\|_{S^F}$, σ prévisible borné par $1\}$.

THEOREME 1. <u>Il existe deux constantes universelles</u> $0<c_F<C_F<+\infty$ <u>telles que pour toute semimartingale spéciale</u> X <u>on ait</u>

$$c_F\,\|X\|_{H^F}\leq\|\sigma_X.X\|_{S^F}\leq P_{H^F}(X)\leq C_F\,\|X\|_{H^F} \quad .$$

DEMONSTRATION. On peut encore supposer que X est une sous martingale locale (i.e. $\sigma_X = 1$) car: $\|\sigma_X.X\|_{H^F} = \|X\|_{H^F}$ et $P_{H^F}(\sigma_X.X) = P_{H^F}(X)$.

a) $\|X\|_{H^F} \leq \|[\overset{c}{X},\overset{c}{X}]_\infty^{\frac{1}{2}}\|_F + \|\tilde{X}_\infty\|_F \leq a_F\|\overset{c}{X}\|_{S^F} + \|\tilde{X}_\infty\|_F$ (B-D-G)

$\leq a_F\|X\|_{S^F} + (a_F+1)\ \|\tilde{X}_\infty\|_F \leq (a_F + 2p(a_F+1))\ \|X\|_{S^F}$ (Lemme).

b) Si σ est prévisible, borné par 1:

$\|\sigma.X\|_{S^F} \leq \|\sigma.\overset{c}{X}\|_{S^F} + \|\tilde{X}_\infty\|_F \leq b_F\ \|[\sigma.\overset{c}{X},\sigma.\overset{c}{X}]_\infty^{\frac{1}{2}}\|_F + \|\tilde{X}_\infty\|_F$ '(B-D-G)$\leq(b_F+1)\|X\|_{H^F}$

COROLLAIRE 1. <u>Si</u> $Q_{H^F}(X) = \sup\{\|I_A.X\|_{S^F}$, A prévisible$\}$, <u>les normes</u> $\|\ \|_{H^F}$, P_{H^F} et Q_{H^F} <u>sont équivalentes</u>.

COROLLAIRE 2. <u>Si</u> X <u>est une sous martingale locale</u>, <u>on a</u>

$c_F\ \|X\|_{H^F} \leq \|X\|_{S^F} \leq C_F\ \|X\|_{H^F}$

Ce résultat figure dans Yor [3] .

COROLLAIRE 3. <u>Si</u> Q <u>est une probabilité absolument continue par rapport à</u> P, <u>de densité bornée</u>, $H^F(P)$ <u>est inclus dans</u> $H^F(Q)$, <u>avec une norme plus forte</u>.

DEMONSTRATION. C'est évident avec les normes $P_{H^F(P)}$ et $P_{H^F(Q)}$.

REMARQUE. En fait, Yor a prouvé dans [4] , à l'aide du lemme de Kintchine, une inégalité beaucoup plus forte: si $p \geq 1$, soit $N_p(X) = \sup_E\|\sigma.X\|_p$ où E désigne l'ensemble des processus prévisibles élémentaires de la forme $\sum a_i I_{]t_i,t_{i+1}]}$ avec $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ et a_i est $\underline{\underline{F}}_{t_i}$-mesurable bornée par 1.

Pour tout $p \geq 1$ les normes $\|\ \|_{H^p}$ et N_p sont équivalentes.

Nous allons maintenant démontrer par les méthodes générales exposées dans l'article précédent, une inégalité dûe à Stein dans le cas discret et pour $p>1$, Lepingle [1] pour $F(x) = x$, et Yor [5] pour le cas général. Ce théorème est démontré, dans les articles précités, par des techniques de dualité (qui donnent d'ailleurs de meilleures constantes).

THEOREME 2. <u>Il existe une constante</u> $c'_F < +\infty$ <u>telle que pour toute semi-martingale spéciale</u> X <u>on ait</u> $\|[\tilde{X},\tilde{X}]_\infty^{\frac{1}{2}}\|_F \leq c'_F\|[X,X]_\infty^{\frac{1}{2}}\|_F$.

DEMONSTRATION.

a) Si $F(x) = x^2$. C'est alors bien connu et est démontré dans Stricker [2] : Si T est un t.a. prévisible, $\Delta\tilde{X}_T = E[\Delta X_T \mid \underline{\underline{F}}_{T-}]$ et donc $E[\Delta\tilde{X}_T{}^2] \leq E[\Delta X_T{}^2]$. En sommant sur une suite de temps d'arrêt prévisibles à graphes disjoints et épuisant les sauts de X, on obtient $E[[\tilde{X},\tilde{X}]_\infty] \leq E[[X,X]_\infty]$.

b) Si X est à sauts prévisiblement bornés par un processus croissant prévisible D. Pour tout temps d'arrêt T on a $E[[\tilde{X},\tilde{X}]_T I_{\{T>0\}}] \leq E[([X,X]^{\frac{1}{2}}_{T-} + D_T)^2 I_{\{T>0\}}]$. En appliquant le lemme 1.3 sur les fonctions concaves, on obtient alors $E[[\tilde{X},\tilde{X}]^{\frac{1}{2}}_\infty] \leq 2\, E[[X,X]^{\frac{1}{2}}_\infty + D_\infty]$.

c) Si $F(x) = x$. On obtient le résultat à l'aide d'une sorte de décomposition de Davis, mais plus simple: on peut supposer que X est intégrable. Soit $S_t = \sup_{s\leq t}|\Delta X_s|$ et $K_t = \sum_{s\leq t} \Delta X_s\, I_{\{|\Delta X_s| \geq 2 S_{s-}\}}$. K a sa variation totale majorée par $2 S_\infty$ elle même majorée par $2[X,X]^{\frac{1}{2}}_\infty$.
On a alors $X = Y + K$ et $|\Delta Y| \leq 2 S_-$ .On a alors, en omettant l'indice ∞ :
$E[[\tilde{Y},\tilde{Y}]^{\frac{1}{2}}] \leq 2\, E[[Y,Y]^{\frac{1}{2}} + 2 S] \leq 2\, E[[K,K]^{\frac{1}{2}} + 3[X,X]^{\frac{1}{2}}] \leq 10\, E[[X,X]^{\frac{1}{2}}]$.
$E[[\tilde{K},\tilde{K}]^{\frac{1}{2}}] \leq E[\int_0^{+\infty}|d\tilde{K}_s|] \leq E[\int_0^{+\infty}|dK_s|] \leq 2\, E[[X,X]^{\frac{1}{2}}]$.
D'où $E[[\tilde{X},\tilde{X}]^{\frac{1}{2}}] \leq 12\, E[[X,X]^{\frac{1}{2}}]$.

d) Cas général. Considérant la semimartingale par rapport à F_{T+t} , ${}^T X = (X_{T+t} - X_T)\, I_{\{T<+\infty\}}$ (T étant un temps d'arrêt), on obtient
$E[[\tilde{X},\tilde{X}]^{\frac{1}{2}}_\infty - [\tilde{X},\tilde{X}]^{\frac{1}{2}}_T] \leq E[([\tilde{X},\tilde{X}]_\infty - [\tilde{X},\tilde{X}]_T)^{\frac{1}{2}}] \leq 12\, E[[{}^T X,{}^T X]^{\frac{1}{2}}_\infty] \leq 12\, E[[X,X]^{\frac{1}{2}}_\infty I_{\{T<\infty\}}]$
En appliquant le lemme de Garsia-Neveu, on a alors:
$\|[\tilde{X},\tilde{X}]^{\frac{1}{2}}_\infty\|_F \leq 12p\, \|[X,X]^{\frac{1}{2}}_\infty\|_F$.

COROLLAIRE 1. <u>Sous les mêmes hypothèses, on a</u> $\|[\tilde{X},\tilde{X}]^{\frac{1}{2}}_\infty\|_F \leq (c_F' + 1)\|[X,X]^{\frac{1}{2}}_\infty\|_F$

COROLLAIRE 2. <u>Soient</u> $X \in H^F(\underline{\underline{F}}_\cdot, P)$, , Q <u>une probabilité absolument continue par rapport à</u> P <u>et de densité bornée, et</u> $\underline{\underline{G}}_\cdot$ <u>une autre filtration</u>. <u>Si</u> X <u>est une</u> $(\underline{\underline{G}}_\cdot, Q)$ <u>semimartingale, alors la</u> $(\underline{\underline{G}}_\cdot, Q)$ <u>compensée de</u> X <u>appartient à</u> $H^F(\underline{\underline{G}}_\cdot, Q)$ <u>et</u> X <u>appartient à</u> $H^F_{loc}(\underline{\underline{G}}_\cdot, Q)$

DEMONSTRATION. Si X appartient à $H^F(\underline{\underline{F}}_\cdot, P)$, on a $\|[X,X]^{\frac{1}{2}}_\infty\|^P_F \leq \|X\|_{H^F(\underline{\underline{F}}_\cdot, P)} < \infty$, par suite, $\|[X,X]^{\frac{1}{2}}_\infty\|^Q_F < +\infty$, d'où le résultat.
X est alors dans $H^F_{loc}(\underline{\underline{G}}_\cdot, Q)$ car tout processus prévisible à variation finie sur tout compact est localement borné.

REMARQUE. Si $\underline{\underline{G}}_\cdot \subset \underline{\underline{F}}_\cdot$, et X est $\underline{\underline{G}}_\cdot$ - adaptée, X appartient à $H^F(\underline{\underline{G}}_\cdot, Q)$ car il est clair que $P_{H^F}(\underline{\underline{G}}_\cdot, Q) \leq P_{H^F}(\underline{\underline{G}}_\cdot, Q) \leq c\, P_{H^F}(\underline{\underline{F}}_\cdot, P)$.

UNE REMARQUE SUR LES CHANGEMENTS DE PROBABILITE.

Dellacherie a montré que si X est une semimartingale, il existe une probabilité Q équivalente à P et de densité bornée telle que pour tout t $X^t \in \underline{\underline{M}}^2(Q) \oplus \underline{\underline{V}}^1(Q)$. Nous allons voir que les théorèmes 1 et 2 entrainent le résultat plus fort, démontré par Bichteler dans le cas p = 2, et par Dellacherie (communication personnelle) dans le cas général.

THEOREME 3. *Soit $(X^n)_n$ une suite de semimartingales. Il existe une probabilité Q équivalente à P, de densité bornée, telle que pour tout n et t, X^n arrêtée en t appartienne à* $\bigcap_p H^p(Q) \cap H^F(Q)$.

DEMONSTRATION. Nous traitons le cas d'une semimartingale, l'argument étant essentiellement le même pour une suite. Rappelons un lemme du à Dellacherie et qui se déduit immédiatement du lemme de Borel-Cantelli: Si $(Z_n)_n$ est une suite de v.a. p.s. finies, il existe une probabilité Q équivalente à P, de densité bornée, telle que Z_n soit Q-intégrable pour tout n.

Soit Q_1 une probabilité équivalente à P, de densité bornée, telle que pour tout n et t $[X,X]_t^n$ et $F([X,X]_t^{\frac{1}{2}})$ soient Q_1 intégrables. X est alors une Q_1 semimartingale spéciale et, d'après le théorème 2, pour tout t sa Q_1 compensée, M , arrétée en t appartient à $\bigcap_p H^p(Q_1) \cap H^F(Q_1)$. Si A est le Q_1 compensateur prévisible de X, on peut trouver une probabilité Q équivalente à Q_1, de densité bornée, telle que pour tout n et t $(\int_0^t |dA_s|)^n$ et $F(\int_0^t |dA_s|)$ soient Q intégrables; alors pour tout t $A^t \in \bigcap_p H^p(Q) \cap H^F(Q)$ et, d'après le corollaire 3 du th. 1, il en est de même de M^t et donc de X^t.

REFERENCES

1 D. LEPINGLE. Une inégalité de martingale. Séminaire de probabilité XII

2 C. STRICKER. Quasi martingales, martingales locales, semimartingales et filtration naturelle. Z.W. 39, 1977.

3.M. YOR. Les inégalités de sous martingales comme conséquence de la relation de domination. Stochastics, Vol. 3, 1979.

4 M.YOR. Quelques interactions entre mesures vectorielles et intégrales stochastiques. Sém. de Théorie du potentiel IV, lect. notes in M. n° 713, 1979.

5 M. YOR. En cherchant une définition naturelle des intégrales stochastiques optionnelles. Séminaire de proba. XIII. Lect. Notes in Maths 721. Springer (1979).

Erik LENGLART
Université de Rouen
Département de mathématiques
76 130 Mont saint Aignan.