SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

C. COCOZZA
M. YOR

Démonstration d'un théorème de F. Knight à l'aide de martingales exponentielles

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 496-499
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__496_0>

Démonstration d'un théorème de F. Knight à l'aide de martingales exponentielles.

C. Cocozza et M. Yor

En [3], F. Knight démontre le théorème suivant, déjà annoncé, et partiellement démontré en [4]

Théorème 1 :

Soit $[\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P]$ un espace de probabilité filtré usuel, et $(X^1, \dots, X^n)$ une suite finie de $(\mathcal{F}_t)$ martingales locales continues, nulles en 0, deux à deux orthogonales. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, et tout $t \geq 0$, on note $\tau_t^k = \inf\{s \mid \langle X^k \rangle_s > t\}$

Quitte à élargir l'espace de probabilité d'origine, on peut supposer qu'il existe un mouvement brownien $\beta = (\beta^1, \dots, \beta^n)$, à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, issu de 0, et indépendant de $X = (X^1, \dots, X^n)$.

Alors, le processus $B = (B^1, \dots, B^n)$ défini par :

$$(1) \qquad B_t^k(\omega) = \begin{cases} X^k_{\tau_t^k}(\omega), & \text{si } \langle X^k \rangle_\infty(\omega) > t \\ X^k_\infty(\omega) + \beta^k_{(t - \langle X^k \rangle_\infty(\omega))}, & \text{si } \langle X^k \rangle_\infty(\omega) \leq t \end{cases}$$

est un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbf{R}^n$.

Remarques :

1) Soulignons que les processus $B^k (1 \leq k \leq n)$ sont bien définis par la formule (1), grâce à l'égalité : $\left\{X_t^k \xrightarrow[t\to\infty]{} \cdot \right\} = \left\{\langle X^k \rangle_\infty < \infty\right\}$ P p.s.

2) Un théorème, maintenant classique, obtenu simultanément par Dambis [9] d'une part, Dubins et Schwarz [10] d'autre part, affirme que, pour tout k, B^k est un mouvement brownien réel, relatif à la filtration $(\mathcal{F}_{\tau_t^k})$.

Nous utiliserons constamment ce résultat par la suite.

Avant de passer à notre démonstration du théorème de Knight, indiquons que P.A. Meyer a déjà donné une démonstration simplifiée de ce théorème en [5]. La démonstration de Meyer s'appuie sur la représentation des martingales d'un mouvement brownien réel comme intégrales stochastiques par rapport à ce processus (théorème dû à K. Ito), et sur un argument de récurrence.

La démonstration ci-dessous nous semble plus immédiate, pour deux raisons :

- on ne procède pas par récurrence
- la méthode des martingales exponentielles est un outil simple (et efficace !) pour démontrer le théorème d'Ito sur les martingales du mouvement brownien (et, plus généralement, sur les martingales des processus à accroissements indépendants ; voir, par exemple, [8], où ce point de vue est adopté).

Voici (enfin !) notre démonstration (par étapes).

Etape 1. Le théorème sera démontré dès que l'on aura obtenu la formule (2) suivante, pour toute suite $(f^k)_{1 \leq k \leq n}$ de fonctions réelles, bornées, définies sur $[0, \infty[$, et à support compact :

$$(2) \qquad E\left[\prod_{k=1}^{n} \exp\{i \int_0^\infty f^k(s)dB_s^k + \frac{1}{2}\int_0^\infty (f^k(s))^2 ds\}\right] = 1$$

Supposons (2) vérifiée : alors, si l'on fixe $0 = t_0<t_1<t_2<\ldots<t_p < \infty$, et que l'on prend $f^k = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^k 1_{]t_{j-1},t_j]}$, on observe, en faisant varier les coefficients (λ_j^k) dans $\mathbb{R}$, que le vecteur aléatoire $(B_{t_j}^k - B_{t_{j-1}}^k)_{1\leq j\leq p\ ;\ 1\leq k\leq n}$ a la transformée de Fourier, et donc la loi, cherchée.

Etape 2. Décomposons l'intégrale $\int_0^\infty f^k(s)dB_s^k$ en :

$$(3) \qquad \int_0^{<X^k>_\infty} f^k(s)dB_s^k + \int_{<X^k>_\infty}^\infty f^k(s)dB_s^k .$$

(la variable aléatoire $<X^k>_\infty$ est un $\{\mathcal{F}_{\tau_t^k}\}$ temps d'arrêt ; les intégrales qui figurent en (3) sont donc bien des intégrales stochastiques).

A l'aide de la remarque 2, et d'un argument de classe monotone, on peut écrire :

$$(4) \qquad \int_0^{<X^k>_\infty} f^k(s)dB_s^k = \int_0^\infty f^k(<X^k>_s)dX_s^k ,$$

et

$$(5) \qquad \int_{<X^k>_\infty}^\infty f^k(s)dB_s^k = \int_0^\infty f^k(t+<X^k>_\infty)d\beta_t^k .$$

(le mouvement brownien β^k étant indépendant de la tribu $\mathcal{X}$ engendrée par les variables $(X_t^k)_{t\geq 0\ ;\ 1\leq k\leq n}$, l'intégrale stochastique en $d\beta^k$ est bien définie).

Enfin, la formule de changement de variables dans les intégrales de Stieltjes permet d'écrire, en posant $g^k = (f^k)^2$:

$$(6) \qquad \int_0^\infty g^k(s)ds = \int_0^\infty g^k(<X^k>_s)d<X^k>_s + \int_0^\infty g^k(t+<X^k>_\infty)dt .$$

Etape 3. A l'aide des formules (4), (5) et (6), et de l'orthogonalité des martingales locales $(X^1,\ldots,X^n)$, on peut écrire l'intégrand du membre de gauche de (2) comme le produit IJ, où :

$$I = \exp\{i\ X_\infty^F + \frac{1}{2} <X^F>_\infty\}$$

$[X_t^F = \int_0^t (F_s,dX_s)$; $(\cdot,\cdot)$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$, et (F_s) le processus à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, dont la $k^{\text{ième}}$ composante est $F_s^k = f^k(<X^k>_s)]$

et $\qquad J = \exp \{i\, \beta^G_\infty + \frac{1}{2} <\beta^G>_\infty\}$

$\left[\beta^G_t = \int_0^t (G_s, d\beta_s),\ \text{et}\ \ G^k_s = f^k(s+<X^k>_\infty)\right].$

Etape 4. Les processus β et X étant indépendants, la variable aléatoire β^G_∞ est, conditionnellement à $\mathcal{X}$, une variable gaussienne, centrée, de covariance $<\beta^G>_\infty$.
On a donc :

(7) $\qquad E[IJ] = E[I]$.

D'autre part, d'après la formule d'Ito, on a :

$$I = 1 + \int_0^\infty I_s\ (idX^F_s),$$

où $I_s = \exp\left[iX^F_s + \frac{1}{2} <X^F>_s\right]$. I est donc la variable terminale de la martingale bornée (I_t), égale à 1 en $t=0$.

Finalement, on a donc : $E[I] = 1$, d'où le résultat, d'après (7).

Un théorème analogue au théorème de Knight, pour des martingales locales sommes de sauts compensés, a été dégagé, et démontré par P.A. Meyer en [5], toujours à l'aide de la méthode de représentation des martingales comme intégrales stochastiques. Il s'énonce ainsi :

Théorème 2 :

Sur un espace de probabilité filtré usuel, soient $X^1,\dots,X^n$ des martingales locales, sommes de sauts compensés, à sauts totalement inaccessibles, tous égaux à 1, nulles en 0, et deux à deux orthogonales. On suppose que pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$ $<X^k>_\infty = +\infty$ et, pour tout $t \geq 0$ on note $\tau^k_t = \inf\{s \ /\ <X^k>_s > t\}$.
Alors les processus $N^1,\dots,N^n$ définis par

$$N^k_t(\omega) = X^k_{\tau^k_t}(\omega)$$

sont des processus de Poisson compensés, de paramètre 1, indépendants.

Remarque : Il est amusant de noter que Meyer se demande, en [5], si le théorème 2 n'est autre qu'une curiosité mathématique. Celui-ci se trouve jouer, en fait, un rôle important dans l'article [2] qui a été, par ailleurs, à l'origine de cette note.

Ce théorème se généralise au cas où $<X^k>_\infty$ n'est pas égal à $+\infty$, en "complétant" les processus N^k par des processus de Poisson compensés indépendants et indépendants de $(X^1,\dots,X^n)$.

La démonstration du théorème 2, tout à fait semblable à celle du théorème 1, repose sur la formule exponentielle suivante (voir [7], par exemple).

Soit X une martingale locale quasi continue à gauche dont les sauts sont bornés par une constante k, alors

$$\exp\{X_t - \frac{1}{2}\langle X^c, X^c\rangle_t - \int_{]o,t]\times(\mathbb{R}\setminus\{o\})} (e^x-1-x)\,\gamma(dx,ds)\},$$

où γ désigne la mesure de Lévy de X, est une martingale locale.

Remarquons que cette formule exponentielle permet de démontrer à la fois que les processus N^k sont des processus de Poisson compensés (ce théorème est dû à S. Watanabe [6] ; en fait, la méthode utilisée ici pour $n\in\mathbb{N}$ n'est autre que l'extension de celle utilisée par P. Brémaud en [1] pour $n=1$) et qu'ils sont indépendants.

Références :

[1] P. BREMAUD : An extension of Watanabe's theorem of characterization of Poisson processes over the positive real half line. J. App. Prob. 12, 396-399 (1975).

[2] C. COCOZZA & C. KIPNIS : Processus de vie et mort sur $\mathbb{R}$, avec interaction selon les particules les plus proches. (à paraître au Zeitschrift für Wahr).

[3] F.B. KNIGHT : A reduction of continuous square-integrable martingales to Brownian motion. Lect. Notes in Maths 190. Springer (1970).

[4] F.B. KNIGHT : An infinitesimal decomposition for a class of Markov processes. Ann. of Math. Stat. 41, 5, 1970.

[5] P.A. MEYER : Démonstration simplifiée d'un théorème de Knight. Séminaire de Probabilités V. Lect. Notes in Maths 191. Springer (1971).

[6] S. WATANABE : On discontinuous additive functionals and Lévy measures of Markov processes. Japanese J. Maths 34, 53-70 (1964).

[7] M.YOR : Sur les intégrales stochastiques optionnelles, et une suite remarquable de formules exponentielles. Séminaire de Probabilités X. Lect. Notes in Maths 511. Springer (1976).

[8] M. YOR : Remarques sur la représentation des martingales comme intégrales stochastiques. Séminaire de Probabilités XI. Lect. Notes in Maths 581. Springer (1977).

[9] K. DAMBIS : On the decomposition of continuous sub-martingales. Teo. Verojatnost. Vol 10 (1965), pp. 438-448.

[10] L. DUBINS & G. SCHWARZ : On continuous martingales. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. Vol 53 (1965), p. 913-916.