MICHEL WEBER

# Sur un théorème de Maruyama

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 14 (1980), p. 475-488
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__475_0>

# SUR UN THEOREME DE MARUYAMA

par Michel WEBER

## 0. DEFINITIONS ET NOTATIONS.

Considérons un processus gaussien centré stationnaire mesurable $\{X(\omega, t) , (\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}\}$ et soit $r(t) = \int_0^\infty \cos \lambda t \, d\mu(\lambda)$ sa covariance. On sait que la mesure spectrale $\mu$ se décompose en la somme suivante :

$$\mu = \mu_a + \mu_c + \mu_{cs} ,$$

où $\mu_a$ est purement atomique, $\mu_c$ absolument continue et $\mu_{cs}$ continue singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. On dit que $\mu$ est continue lorsque $\mu_a \equiv 0$ .

$$\text{Soient } E = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\} , \quad \mathcal{B} = \bigotimes_{t \text{ réel}} \mathcal{B}(\mathbb{R}_t) , \quad P_X = X(P) .$$

Nous notons $\mathcal{S}(X) = (E , \mathcal{B} , P_X)$ l'espace de probabilité canonique du processus $X$ . Notons aussi $\tilde{X}$ le processus canonique défini sur $\mathcal{S}(X) \times \mathbb{R}$ par les applications coordonnées ; $\tilde{X}(f , t) = f(t)$ . Pour tout réel $u$ , nous notons $T^u$ la transformation de $E$ dans $E$ , mesurable définie par $T^u(f) = f \circ \tau_u = f(.+u)$ où $\tau_u$ est la translation par $u$ . L'ensemble $G$ de ces transformations est un groupe multiplicatif. On vérifie que $G$ laisse la mesure $P_X$ invariante de sorte que $(\mathcal{S}(X) , G)$ forme un système dynamique mesuré (définition [1] p. 99). On appelle ensemble invariant tout élément $A$ de $\mathcal{B}$ tel que

$$A \,\Delta\, T(A) \quad \text{où} \quad A \,\Delta\, T^{-1}(A) \quad \text{est } P_X\text{-négligeable.}$$

Lorsque les seuls invariants de $(\mathcal{S}(X) , G)$ sont les éléments de $\mathcal{B}$ de $P_X$-mesure égale à 0 ou 1, le système est dit ergodique. On dira alors que le processus $X$ est ergodique. Lorsque $G$ est engendré par un seul élément ( $T^1$ par exemple), ( $\mathcal{S}(X)$ , $G$) est ergodique si et seulement si la propriété suivante est vérifiée ([1], p. 101),

$$\text{quels que soient } A , B \in \mathcal{B} , \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_X(A \cap T^{-k} B) = P_X(A)\, P_X(B) ,$$

On vérifie de même à l'aide du théorème de Von Neumann (cf. par exemple [1] p. 99) que d'une façon générale $X$ est ergodique si et seulement si

$$\text{pour tous } A , B \in \mathcal{B} , \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T P_X(A \cap T^{-u} B)\, du = P_X(A) . P_X(B) .$$

DEFINITION 0.1. Le système $(\mathcal{S}(X) , G)$ (resp. le processus $X$ ) est faiblement mélangeant si pour tous $A , B$ éléments de $\mathcal{B}$ ,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |P_X (A \cap T^{-u} B) - P_X(A) . P_X(B)|\, du = 0 .$$

On dit de même que le système $(\mathcal{S}(X) , G)$ (resp. le processus $X$ ) est fortement mélangeant lorsque pour tous $A , B$ éléments de $\mathcal{B}$ :

$$\lim_{u\to\infty} P_X(A \cap T^{-u} B) = P_X(A) . P_X(B) .$$

Notons enfin $\mathcal{C}$ la semi-algèbre des cylindres $C$ mesurables définis par

$C = \prod_{t \in \mathbb{R}} C_t$ où $C_t = \mathbb{R}$ sauf pour un ensemble fini d'indices $\varepsilon(C)$ et $\Gamma = \prod_{t \in \varepsilon(C)} C_t = [[a , b[[$ avec

$$a = (a_t , t \in \varepsilon(C)) \leq b = (b_t , t \in \varepsilon(C)) .$$

1. Dans un théorème paru dans [4], Maruyama a caractérisé les propriétés de mélange et d'ergodicité lorsque celles-ci sont définies relativement à la semi-algèbre $\mathcal{C}$ .

Son énoncé est le suivant :

THEOREME A. Soit $X(t)$ , $t$ réel, un processus gaussien stationnaire de covariance $r(t) = \int_0^\infty \cos \lambda t \, d\mu(\lambda)$ . On a les équivalences suivantes :

a) $X$ est fortement mélangeant si et seulement si $\lim_{t \to \infty} r(t) = 0$ ,

b) $X$ est faiblement mélangeant si et seulement si $\mu$ est continue,

c) $X$ est ergodique si et seulement si $\mu$ est continue.

Un argument simple de prolongement sur des classes monotones montre que ce théorème caractérise aussi les mêmes propriétés lorsque celles-ci sont définies relativement à la tribu $\mathcal{B}$ . Il semble cependant que ce résultat soit peu utilisé dans certains champs d'applications pourtant proches ; ainsi dans [6], Qualls, Watanabe et Simmons mettent en évidence une loi de $0-1$ indépendamment du théorème A dont elle se déduit pourtant aisément. Nous l'énonçons.

THEOREME B. Soit $X(t)$ , $t \geq 0$ un processus gaussien stationnaire de covariance $r(t)$ . Supposons l'hypothèse suivante

$$(a-1) \qquad \lim_{t \to \infty} r(t) = 0 .$$

Soit alors $\varphi : R_+ \longrightarrow R_+$ croissante. Dans ces conditions on a aussi

$$P\{X(n) > \varphi(n) \text{ i.o.}\} = 0 \text{ ou } 1 .$$

Ces auteurs affirment aussi sans démonstration que l'hypothèse

$$(a-2) \qquad \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T r(u) \, du = 0$$

suffit pour la même conclusion ; or il est facile de construire un contrexemple si on ne suppose pas $\lim_{t \to \infty} \varphi(t) = \infty$ ; en fait l'hypothèse $(a-2)$ doit être modifiée sous la forme suivante :

$$(a'-2) \qquad \mu \text{ est continue} .$$

2. Nous nous proposons dans ce qui suit de donner une nouvelle démonstration de la partie la plus intéressante du théorème A , à savoir l'implication

(*) ( $\mu$ est continue) $\Longrightarrow$ ( X est faiblement mélangeant) .

Cette démonstration est basée sur un lemme comparant les lois de deux vecteurs gaussiens dont l'un a ses composantes indépendantes par blocs. Elle est aussi analogue dans sa démarche à celle donnée par Grenander ([2] p. 158) caractérisant le mélange fort. Elle est donc plus probabiliste que la démonstration de Maruyama.

3. Nous avons noté dans le lemme qui suit pour toute fonction $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et tout réel h les opérateurs

$$\Delta_h^1 \, g(u,v) = g(u+h,v) - g(u,v) \quad ,$$

$$\Delta_h^2 \, g(u,v) = g(u,v+h) - g(u,v) \quad .$$

Lemme 1. (*)

Soient $n > 0$ , et X un vecteur gaussien centré sur $[1,n]$ ou sur un ensemble fini A de cardinal n , de covariance $r(\alpha,\beta)$ avec $r(\alpha,\alpha) = 1$ pour tout $\alpha$ . Soit de plus $\Theta$ une partition de $[1,n]$ ou A , de terme générique $\sigma$ , et $(x),(y)$ deux suites de réels indexées par A ou $[1,n]$ telles que pour tout $\alpha$ ,

$$-\infty \leq x_\alpha \leq y_\alpha \leq +\infty \quad .$$

Notons aussi , $C_\alpha = ]\bar{\phantom{x}} x_\alpha, y_\alpha ][$ ,

$$V_\sigma = \prod_{\alpha \in \sigma} C_\alpha \quad , \qquad V = \prod_{\sigma \in \Theta} V_\sigma \quad ,$$

$$X_\sigma = (X(\alpha), \alpha \in \sigma) \quad .$$

Dans ces conditions, on a

$$|P\{X \in V\} - \prod_{\sigma \in \Theta} P\{X_\sigma \in V_\sigma\}| \leq \tfrac{1}{2} \sum_{\sigma \neq \sigma'} \sum_{\alpha \in \sigma} \sum_{\beta \in \sigma'} k(\alpha,\beta) |r(\alpha,\beta)| \quad ,$$

(*) Un résultat similaire a été obtenu dans [6] avec $\Theta = \{\sigma_1, \sigma_2\}$ .

<u>où</u> $k(\alpha,\beta) = \int_0^1 \Delta^1_{y_\alpha - x_\alpha} \circ \Delta^2_{y_\beta - x_\beta} \left( \Phi(x_\alpha, x_\beta, \lambda r(\alpha,\beta))\right) d\lambda$ ,

<u>et</u> $\Phi(x,y,\rho) = \dfrac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}} \exp\{ - \dfrac{x^2+y^2-2\rho xy}{2(1-\rho^2)} \}.$

<u>Démonstration</u> :

On la fait pour $A = [1,n]$ . Nous commençons par traiter le cas où

1) $\Gamma_1 = \mathrm{Cov}(X)$ <u>est inversible</u> .

Dans toute la suite nous utiliserons les importantes évaluations développées en [ 3 ] p. 19 , et plus particulièrement le lemme 2.1.4.

Soit pour chaque $\sigma$ appartenant à $\mathfrak{S}$ , $X'_\sigma$ un vecteur gaussien sur $\sigma$ de même loi que $X_\sigma$ , et tel que les $X'_\sigma$ soient mutuellement indépendants, nous notons alors

$$\Lambda = (X'_\sigma \, , \, \sigma \in \mathfrak{S}) \quad .$$

Le lemme que nous établissons compare les lois de $\Lambda$ et $X$ pour des pavés.

Posons pour tout $\lambda$ compris entre 0 et 1 , $\Gamma(\lambda) = \lambda\Gamma_1 + (1-\lambda)\Gamma_0$ .
Il est net que $\Gamma(\lambda)$ est inversible pour tout $\lambda$ dans $[0,1]$ , de plus

$$\Gamma(1) = \Gamma_1 = \mathrm{Cov}(X)$$
$$\Gamma(0) = \Gamma_0 = \mathrm{Cov}(\Lambda)$$

Notons dans ces conditions

$$F(\lambda) = \int_{R^n} I_V(u)\, g_\lambda(u)du$$

$$g_\lambda(u) = K_n \int_{R^n} \exp\{i < u,y >\} \exp\{-\tfrac{1}{2}\, {}^t y\Gamma(\lambda)y\}dy \quad ,$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det \Gamma(\lambda)}} \exp\{ - \tfrac{1}{2}\, {}^t u\, \Gamma^{-1}(\lambda)u\} \quad .$$

On sait (c.f. Lemme 2.1.4 p.19, [ 3 ]) que $F(\lambda)$ est dérivable, et que sa dérivée $F'(\lambda)$ peut être évaluée sous la forme

$$F'(\lambda) = \int_{R^n} I_V(u) \frac{\partial}{\partial\lambda} (g_\lambda(u))du \quad ,$$

où $\frac{\partial}{\partial\lambda} (g_\lambda(u)) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \left[ \frac{d\Gamma(\lambda)}{d\lambda} \cdot \frac{d^2}{du^2} (g_\lambda(u)) \right]$ .

Mais,

$$\left( \frac{d\Gamma(\lambda)}{d\lambda} \right)_{\alpha,\beta} = \begin{cases} r(\alpha,\beta) & \text{si } \alpha \in \sigma \text{ , } \beta \in \sigma' \text{ , } \sigma \neq \sigma' \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases} ,$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} (g_\lambda(u)) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma\neq\sigma'} \sum_{\alpha\in\sigma} \sum_{\beta\in\sigma'} r(\alpha,\beta) \frac{\partial^2}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} (g_\lambda(u)) \quad ,$$

ainsi

$$F'(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma\neq\sigma'} \sum_{\alpha\in\sigma} \sum_{\beta\in\sigma'} r(\alpha,\beta) \int_{R^n} I_V(u) \frac{\partial^2}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} (g_\lambda(u))du \quad .$$

Or,

$$\int_{R^n} I_V(u)\frac{\partial^2}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} (g_\lambda(u))du = \int_{x_1}^{y_1} du_1 \int_{x_2}^{y_2} du_2 \cdots\cdots \int_{x_\alpha}^{y_\alpha} du_\alpha \int_{x_\beta}^{y_\beta} \frac{\partial^2}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} (g_\lambda(u))du_\beta$$

$$= \int_{x_1}^{y_1} du_1 \int_{x_2}^{y_2} du_2 \cdots\cdot \int_{x_\alpha}^{y_\alpha} \left[ \frac{\partial}{\partial u_\alpha}\left( g_\lambda(u_1,u_2,\ldots,y_\beta,\ldots) - g_\lambda(u_1,u_2,\ldots,x_\beta,\ldots)\right)\right] du_\alpha$$

$$= \int_{R^{n-2}} \prod_{\substack{r\neq\alpha \\ r\neq\beta}} C_r \; I(v) \; \square_{\alpha,\beta}(g_\lambda(v))dv \; ,$$ où l'on a noté

$$\square_{\alpha,\beta}(g_\lambda(v)) = g(v_1,v_2,\ldots,\underset{(\alpha^{\text{ième}})}{y_\alpha},\ldots\ldots,\underset{(\beta^{\text{ième}})}{y_\beta},\ldots\ldots) - g(v_1,v_2,\ldots,x_\alpha,\ldots\ldots,y_\beta,\ldots\ldots)$$

$$- g(v_1,v_2,\dots,y_\alpha,\dots\dots,x_\beta,\dots\dots)$$

$$+ g(v_1,v_2,\dots,x_\alpha,\dots\dots,x_\beta,\dots\dots) \ .$$

Il s'en suit

$$\Big| \int_{R^{n-2}} \underset{\substack{r\neq\alpha \\ r\neq\beta}}{I(v)}_{\Pi C_r} \ \square_{\alpha,\beta}(g_\lambda(v)dv \Big|$$

$$\leq \sum_{(s,t)}^{*} \int_{R^{n-2}} \underset{\substack{r\neq\alpha \\ r\neq\beta}}{I(v)}_{\Pi C_r} \ g(v_1,v_2,\dots,s,\dots,t,\dots)dv \ ,$$

$$\leq \sum_{(s,t)}^{*} \int_{R^{n-2}} g(v_1,v_2,\dots,s,\dots,t,\dots)dv \ ,$$

$$= \sum_{(s,t)}^{*} \Phi(s,t,\ \lambda r(\alpha,\beta)) \ ,$$

où la sommation $\Sigma^*$ est indexée sur l'ensemble à quatre éléments

$\{(y_\alpha,y_\beta)\ ,\ (y_\alpha,x_\beta)\ ,\ (x_\alpha,x_\beta)\ ,\ (x_\alpha,y_\beta)\}$ .

Dès lors

$$|P\{X \in V\} - \prod_{\sigma\in\mathfrak{S}} P\{X_\sigma \in V_\sigma\}| = |F(1) - F(0)|$$

$$= \Big| \int_0^1 F'(\lambda)d\lambda \Big| = \tfrac{1}{2} \Big| \sum_{\sigma\neq\sigma'} \sum_{\alpha\in\sigma} \sum_{\beta\in\sigma'} r(\alpha,\beta) \int_0^1 d\lambda \Big( \int_{R^n} I_V(u)\frac{\partial^2}{\partial u_\alpha\, \partial u_\beta} (g_\lambda(u))du\Big) \Big|$$

$$= \Big| \tfrac{1}{2} \sum_{\sigma\neq\sigma'} \sum_{\alpha\in\sigma} \sum_{\beta\in\sigma'} r(\alpha,\beta) \int_0^1 d\lambda \Big( \int_{R^{n-2}} \underset{\substack{r\neq\alpha \\ r\neq\beta}}{I(v)}_{\Pi C_r} \ \square_{\alpha,\beta} (g_\lambda(v))dv\Big)\Big|$$

$$\leq \tfrac{1}{2} \sum_{\sigma\neq\sigma'} \sum_{\alpha\in\sigma} \sum_{\beta\in\sigma'} |r(\alpha,\beta)| \sum_{(s,t)}^{*} \Phi(s,t,\lambda|r(\alpha,\beta|)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\sigma \neq \sigma'} \sum_{\alpha \in \sigma} \sum_{\beta \in \sigma'} |r(\alpha,\beta)| \; k(\alpha,\beta) \quad .$$

2) $\Gamma_1 = \mathrm{Cov}(X)$ <u>n'est pas inversible</u>.

Soit $N$ un vecteur gaussien normal à valeurs dans $R^n$ indépendant de $X$, pour tout réel $u$ posons

$$X_u = X + uN \qquad \Lambda_u = \Lambda + uN \quad .$$

Si $u$ est non nul les covariances $\Gamma_{X_u}$, $\Gamma_{\Lambda_u}$ sont inversibles, la première partie de la démonstration montre que $X_u$ vérifie les conclusions du lemme, de plus

$$\Gamma_{X_u}(\alpha,\beta) = r(\alpha,\beta) + u^2 \quad .$$

On constate alors qu'il suffit de faire tendre $u$ vers zéro pour conclure identiquement sur $X$.

<u>Lemme 2.</u>

<u>Si</u> $\mu = \mu_d$, <u>alors</u> $\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |r(u)| du = 0$ .

<u>Démonstration</u>. Elle est immédiate puisque les coefficients de Fourier de $r(t)$ sont tous nuls.

3. Nous sommes en mesure à présent de démontrer la partie (*) du théorème (A).

<u>1ère Etape</u> : Soient pour tout $B$ élément de $\mathcal{B}$,

$$\mathcal{G}_B = \{A \in \mathcal{B} : \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T | \, P_X(A \cap T^{-u} B) - P_X(A).P_X(B)| \, du = 0\} \quad ,$$

et pour tout $A$ élément de $\mathcal{B}$ ,

$$\mathcal{C}'_A = \{B \in \mathcal{B} : \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T |P_X(A \cap T^{-u}B) - P_X(A).P_X(B)|du = 0\} \quad .$$

Nous montrons que $\mathcal{C}_B$ et $\mathcal{C}'_A$ sont des classes monotones. Il suffit d'établir que $\mathcal{C}_B$ est une classe monotone puisque la transformation $T$ est inversible. Soient $(A_n)$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}_B$ de limite $A$ dans $\mathcal{B}$ . Alors pour tout réel $u$ et tout entier $n$ ,

$$\begin{aligned}(1)\qquad |P_X(A \cap T^{-u}B) - P_X(A).P_X(B)| &\le |P_X(A \cap T^{-u}B) - P_X(A_n \cap T^{-u}B)| \\ &+ |P_X(A_n \cap T^{-u}B) - P_X(A_n).P_X(B)| \\ &+ |P_X(A).P_X(B) - P_X(A_n).P_X(B)| \\ &= P_1 + P_2 + P_3 \quad .\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ , pour tout $n$ assez grand nous avons

$$\begin{aligned}P_1 = |P_X(A \cap T^{-u}B) - P_X(A_n \cap T^{-u}B)| &\le P_X((A \cap T^{-u}B) \,\Delta\, (A_n \cap T^{-u}B)) \quad , \\ &\le P_X(A \,\Delta\, A_n) + P_X(T^{-u}B \,\Delta\, T^{-u}B) \le \frac{\varepsilon}{2} \quad ,\end{aligned}$$

$$P_3 \le P_X(B).P_X\{A \,\Delta\, A_n\} \le \frac{\varepsilon}{2} \quad ,$$

d'où $P_1 + P_3 \le \varepsilon$ .

Intégrant chaque membre de (1) par rapport à $T^{-1}\, I_{[0,T]}(t)dt$ , il vient pour tout $n$ assez grand fixé ,

$$\begin{aligned}\gamma(T) &= \frac{1}{T}\int_0^T |P_X(A \cap T^{-u}B) - P_X(A).P_X(B)|du \\ &\le \varepsilon + \frac{1}{T}\int_0^T |P_X(A_n \cap T^{-u}B) - P_X(A_n).P_X(B)|du \quad ,\end{aligned}$$

d'où puisque $A_n$ appartient $\mathcal{G}_B$ ,

$$0 \leq \overline{\lim_{T\to\infty}} \gamma(T) \leq \varepsilon .$$

Mais $\varepsilon > 0$ est arbitraire, par conséquent $\lim_{T\to\infty} \gamma(T) = 0$ . Donc $A$ appartient à $\mathcal{G}_B$ , et $\mathcal{G}_B$ est une classe monotone, il en est de même pour $\mathcal{G}'_A$ compte tenu de la remarque faite au début.

2ème Etape : $\mathcal{G}_B \supset \mathcal{C}$ , $\mathcal{G}'_A \supset \mathcal{C}$ , où $\mathcal{C}$ est la semi algèbre des cylindres $C$ mesurables définis par

$$C = \prod_{t\in R} C_t \quad , \text{ où } C_t = R \text{ sauf pour un ensemble fini d'indices } \varepsilon(C) \quad ,$$

et $$\Gamma = \prod_{t\in\varepsilon(C)} C_t = [[a,b[[ \quad , \text{ où}$$

$$a = (a_t \, , \, t \in \varepsilon(C)) \leq b = (b_t \, , \, t \in \varepsilon(C)) .$$

Soient $C$ et $D$ deux éléments de $\mathcal{C}$ de bases respectives $\Gamma = [[a,b[[$ , $\Delta = [[c,d[[$ , on supposera dans toute la suite que les nombres $a_t$ , $b_t$ , $c_t$ , $d_t$ sont finis et tous distincts, ce qui puisque $\mathcal{G}'_A$ , (resp. $\mathcal{G}_B$) est une classe monotone suffit pour conclure.

En vertu du lemme 1 , pour tout réel $u$ tel que

$$\tau_u(\varepsilon(D)) \cap \varepsilon(C) = \emptyset \quad ,$$

$$\begin{aligned}
\beta(u) &= |P_X(C \cap T^{-u}D) - P_X(C).P_X(D)| \\
&= |P\{ (X(t), t \in \varepsilon(C)) \in \Gamma , \ (X(s+u) , s \in \varepsilon(D)) \in \Delta \} \\
&\qquad - P\{ (X(t),t \in \varepsilon(C)) \in \Gamma\}.P\{ (X(s),s \in \varepsilon(D)) \in \Delta\} | \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{\substack{s\in\varepsilon(D)\\ t\in\varepsilon(C)}} |r(s-t+u)| \, h(s,t) \quad ,
\end{aligned}$$

où pour tout $s$ et $t$ ,

$$h(s,t) = \int_0^1 \Delta^1_{d_s - c_s} \circ \Delta^2_{b_t - a_t} \left( \Phi \left(c_s, a_t, \lambda r(s-t+u)\right)\right) d\lambda \quad .$$

Mais pour tout réel $x \neq \pm y$ ,

$$0 < f(x,y) = \sup_{-1 \le \rho \le 1} \Phi(x,y,\rho) < \infty \quad .$$

Les nombres $a_t$ , $b_t$ , $c_s$ , $d_s$ sont tous distincts par hypothèse. On déduit de la relation précédente qu'il existe une constante $K = K(\Gamma,\Delta)$ positive finie, telle que pour tout $u$ assez grand $(u > u_0)$ ,

$$(2) \qquad \beta(u) \le K \sum_{\substack{\alpha = s-t \\ s \in \varepsilon(C) \\ t \in \varepsilon(D)}} |r(\alpha+u)| \quad .$$

D'où,

$$(3) \qquad \frac{1}{T}\int_0^T \beta(u)du \le K' \sum_{\substack{\alpha = s-t \\ s \in \varepsilon(C) \\ t \in \varepsilon(D)}} \frac{1}{T}\int_0^T |r(\alpha+u)|du \quad .$$

Finalement, à l'aide du lemme 2,

$$(4) \qquad \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T}\int_0^T |P_X(C \cap T^{-u}D) - P_X(C).P_X(D)|du = 0 \quad .$$

Ainsi pour tous éléments $C$, $D$ de $\mathcal{C}$ ,

$$\mathcal{G}_D \supset \mathcal{C} \quad , \quad \mathcal{G}'_C \supset \mathcal{C} \quad .$$

A l'aide de la proprosition I-4-2 de (*) , on en déduit que

$$(5) \qquad \mathcal{G}_D = \mathcal{G}'_C = \mathcal{B} \quad .$$

Cela entraîne pour tout élément $A$, $B$ de $\mathcal{B}$

---

(*) J. Neveu. Bases Math. du Calcul des Probabilités (Masson, (1964)).

(6) $\quad \mathcal{G}_B = \mathcal{G}'_C = \mathcal{B}$ .

Par conséquent, le processus $X$ est faiblement mélangeant, il est donc ergodique, ce qui achève la démonstration.

Nous déduisons de ce résultat le

COROLLAIRE :

Soit $X(t)$ , $t \in R_+$ (ou $R$) , un processus gaussien stationnaire centré séparable ergodique. Alors pour toutes $g,\varphi : R_+ \to R_+$ croissantes continues telles que $\lim_{t\to\infty} g(t) = \infty$ et tout $S > 0$ ,

1) $\quad P\{ \overline{\lim_{T\to\infty}} \dfrac{\lambda(S \le s \le T : X(\omega,s) > \varphi(s))}{g(T)} = \text{Const.}\} = 1$ ,

2) $\quad P\{ \underline{\lim}_{T\to\infty} \dfrac{\lambda(S \le s \le T : X(\omega,s) > \varphi(s))}{g(T)} = \text{Const.}\} = 1$ ,

3) $\quad P\{ \overline{\lim_{T\to\infty}} \dfrac{\lambda(S \le s \le T : X(\omega,s) \le \varphi(s))}{g(T)} = \text{Const.}\} = 1$ ,

4) $\quad P\{ \underline{\lim}_{T\to\infty} \dfrac{\lambda(S \le s \le T : X(\omega,s) \le \varphi(s))}{g(T)} = \text{Const.}\} = 1$ .

où $\lambda$ est la mesure de Lebesgue.

Démonstration :

Quitte à prolonger en loi $X$ sur $R$ , on suppose que $X$ est défini sur tout $R$ . Soit alors $\mathcal{S}(X) = \{R^R , \bigotimes_{t\in R} \mathcal{B}(R_t) , X(P) = \pi\}$ l'espace de probabilité canonique de $X$ .

Notons aussi pour tout $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ,

- $\theta = T^1$ , $(T^1(f) = f \circ \tau_1)$ ,
- $A_\varphi(f) = \{ t$ réel : $f(t) > \varphi(t)\}$ ,
- $\tau_k$ la translation par $k$ .

Alors pour tout intervalle non vide $I$ , tout $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ,

(1) $\tau_{-1}\,(A_\varphi(f) \cap I) \subset \tau_{-1}(I) \cap A_\varphi(\theta(f))$ ,

d'où pour tout $S < T$ ,

(2) $\lambda(A_\varphi(f) \cap [S,T]) \leq \lambda(A_\varphi(\theta(f)) \cap [S,T]) + 1$ .

Notons pour simplifier

- $L(f,S,T) = \dfrac{\lambda(A_\varphi(f) \cap [S,T])}{g(T)}$

- $\Lambda(f,S,T) = \dfrac{\lambda(A^c_\varphi(f) \cap [S,T])}{g(T)}$ .

Nous avons, à partir de (2)

(3) $\overline{\lim_{T\to\infty}}\ L(f,S,T) \leq \overline{\lim_{T\to\infty}}\ L(\theta(f),S,T)$ ,

$\underline{\lim_{T\to\infty}}\ L(f,S,T) \leq \underline{\lim_{T\to\infty}}\ L(\theta(f),S,T)$ ,

(4) $\overline{\lim_{T\to\infty}}\ \Lambda(f,S,T) \geq \overline{\lim_{T\to\infty}}\ \Lambda(\theta(f),S,T)$ ,

$\underline{\lim_{T\to\infty}}\ \Lambda(f,S,T) \geq \underline{\lim_{T\to\infty}}\ \Lambda(\theta(f),S,T)$ .

Posons maintenant pour tout $\alpha \geq 0$ , $S > 0$ ,

(5) $B_{\alpha,S} = \{ f : \overline{\lim_{T\to\infty}} \; L(f,S,T) > \alpha \}$ ,

$C_{\alpha,S} = \{ f : \underline{\lim_{T\to\infty}} \; L(f,S,T) > \alpha \}$ ,

$D_{\alpha,S} = \{ f : \overline{\lim_{T\to\infty}} \; \Lambda(f,S,T) > \alpha \}$ ,

$E_{\alpha,S} = \{ f : \underline{\lim_{T\to\infty}} \; \Lambda(f,S,T) > \alpha \}$ .

(3) et (4) montrent que, $\theta(B) \subset B$ , $\theta(C) \subset C$ , $\theta^{-1}(D) \subset D$ , $\theta^{-1}(E) \subset E$ , mais puisque

$\pi(B) = \pi(\theta(B))$ , (de même pour $C$ , $D$ et $E$ ) .

Ces ensembles sont invariants. Or $X$ est ergodique. Par conséquent leurs probabilités ne peuvent être que 0 ou 1 , pour tout $\alpha \geq 0$ , ce qui permet de conclure au résultat.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] CONZE J.P., Systèmes topologiques et métriques en théorie ergodique. Ecole d'Eté de Probabilité de St Flour (1974). Lect. Notes Math., 480, (1975), p. 100-187.

[2] CRAMER H., LEADBETTER M.R., Stationary and Related Stochastic Processes (1967). Wiley.

[3] FERNIQUE X. , Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes. Ecole d'Eté de Probabilité de St Flour (1974). Lect. Notes Math., 480, (1975), p. 2-95.

[4] MARUYAMA G. The harmonic analysis of stationary stochastic processes, Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ. A4 (1949), p. 45-46.

[5] QUALLS C., WATANABE H., and SIMMONS G., A note on a 0-1 law for stationary Gaussian processes. Inst. of Statis., (1972), Mimeo Series n° 798.

[6] VISHNU HEBBAR H., A law of the iterated logarithm for Extrem values from gaussian Sequences. Z. Wahrscheinlichkeitsth. verw. Gebiete, (1979), vol. 48, p. 1-16.