

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN JACOD

BERNARD MAISONNEUVE

Remarque sur les fonctionnelles additives non adaptées des processus de Markov

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 410-417

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__410_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

REMARQUES SUR LES FONCTIONNELLES ADDITIVES NON ADAPTEES
DES PROCESSUS DE MARKOV

J. JACOD et B. MAISONNEUVE

1 - INTRODUCTION. Considérons un processus de Markov $(\Omega, \underline{M}, \underline{M}_t, \theta_t, X_t, P^X)$ avec des tribus \underline{M}_t et \underline{M} qui sont strictement plus grosses que les complétées usuelles \underline{F}_t et \underline{F} des tribus naturelles $\underline{F}_t^0 = \sigma(X_s : s \leq t)$ et $\underline{F}^0 = \bigvee_{(t)} \underline{F}_t^0$. Il arrive fréquemment que la propriété de Markov soit vraie relativement aux tribus \underline{M}_t et \underline{M} , ces grosses tribus étant utilisées pour décrire à la fois le passé et le futur; c'est-à-dire que pour tous $x, t \geq 0, f \in b\underline{M}$ on a

$$(1) \quad E^X(f \circ \theta_t | \underline{M}_t) = E^{X_t}(f)$$

(noter la différence avec l'hypothèse usuelle, qui ne requiert (1) que pour $f \in b\underline{F}$). Cette situation se présente naturellement pour les processus additifs markoviens (Çinlar [1]), ou pour certains processus dérivés des ensembles et systèmes régénératifs [4]; les changements de temps dans les processus de Markov fournissent également des exemples d'une telle situation.

Nous nous proposons d'établir que les fonctionnelles additives croissantes prévisibles relativement à la grosse filtration (\underline{M}_t) sont en fait prévisibles relativement à la filtration naturelle (\underline{F}_t) . Ceci généralise un résultat de Çinlar [1] qui avait montré cette propriété pour des fonctionnelles continues (nous utilisons d'ailleurs la même méthode, simplifiée et étendue).

2 - DEFINITIONS ET HYPOTHESES. Précisons nos hypothèses, quant au processus de Markov $(\Omega, \underline{M}, \underline{M}_t, \theta_t, X_t, P^X)$.

a) L'espace d'état (E, \underline{E}) du processus est un espace mesurable quelconque.

b) L'espace Ω est quelconque (il peut être "plus gros" que l'espace canonique).

c) (\underline{M}_t) et \underline{M} sont les complétées usuelles d'une filtration (\underline{M}_t^0) et d'une tribu \underline{M}^0 . On a $\underline{F}_t^0 \subset \underline{M}_t$. On n'impose pas à (\underline{M}_t) d'être continue à droite.

d) On exige la propriété de Markov renforcée (1), mais pas la propriété forte de Markov.

En outre, nous ferons parfois l'hypothèse suivante

Hypothèse (R): (i) les tribus \underline{M}_t^0 sont séparables;

(ii) pour toute mesure P^X il existe une probabilité de transition $(\omega, A) \rightsquigarrow Q_{\omega}^X(A)$ de (Ω, \underline{F}) dans $(\Omega, \underline{M}^0)$ qui soit une version régulière de la probabilité conditionnelle $P^X(\cdot | \underline{F})$ sur \underline{M}^0 .

Noter que (ii) est vérifiée si $(\Omega, \underline{M}^0)$ est un U-espace [2].

3 - FONCTIONNELLES ADDITIVES (\underline{M}_t) -PRÉVISIBLES. Un processus croissant fini $A = (A_t)$ continu à droite, mesurable, tel que $A_0 = 0$ p.s., sera appelé fonctionnelle additive (f.a.) si pour tous $s, t \geq 0$ on a

$$A_{t+s} = A_t + A_s \circ \theta_t \quad \text{p.s.}$$

Une f.a. A est dite faiblement (\underline{M}_t) -prévisible si pour tout x elle est P^X -indistinguable d'un processus A^x qui est (\underline{M}_t) -prévisible. Dans ce cas, A est (\underline{M}_t) -adaptée.

Remarquons d'abord le fait très simple suivant, qui fait comprendre les résultats qui vont suivre.

PROPOSITION 1: Soit A une f.a., non nécessairement adaptée à (\underline{M}_t) , de caractéristique finie (i.e., $E^X(A_t) < \infty$ pour tous x, t). Supposons que A admette une projection prévisible duale B relativement à (\underline{F}_t) qui ne dépende pas de P^X et qui soit additive. Alors A admet aussi B comme (\underline{M}_t) -projection prévisible duale pour toute loi P^X .

Dire que B est la (\underline{F}_t) -projection prévisible duale de A n'implique pas que B soit (\underline{F}_t) -prévisible, mais seulement faiblement (\underline{F}_t) -prévisible. L'existence de B est assurée, par exemple, dès que \underline{E} est séparable et que le processus de Markov est normal.

Démonstration. Pour tous $x \in E$, $t \geq s \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} E^x(A_t - A_s | \underline{M}_s) &= E^x(A_{t-s} | \underline{F}_s) = E^x(A_t - A_s | \underline{F}_s) \\ E^x(B_t - B_s | \underline{M}_s) &= E^x(B_{t-s} | \underline{F}_s) = E^x(B_t - B_s | \underline{F}_s). \end{aligned}$$

Les membres de droite sont égaux, donc aussi les membres de gauche. Comme B est P^x -indistinguable d'un processus (\underline{F}_t) -prévisible, donc (\underline{M}_t) -prévisible, la propriété en résulte. ■

Il résulte de cette proposition qu'une f.a. A faiblement (\underline{M}_t) -prévisible est faiblement (\underline{F}_t) -prévisible (donc (\underline{F}_t) -adaptée) dès qu'elle est de caractéristique finie et qu'elle admet une (\underline{F}_t) -projection prévisible duale B indépendante de la loi P^x et additive. On a évidemment $B = A$. Comme on le voit dans la démonstration précédente, l'additivité joue un rôle essentiel.

Avant de passer à des résultats plus généraux, notons immédiatement la conséquence suivante de cette proposition.

COROLLAIRE 2 : Si le processus X est de Hunt relativement à (\underline{F}_t) , il est quasi-continu à gauche relativement à (\underline{M}_t) .

Dire que le processus est de Hunt signifie que E est borélien d'un compact métrisable, que X est continu à droite, pourvu de limites à gauche, fortement markovien relativement à (\underline{F}_t) , et enfin quasi-continu à gauche relativement à (\underline{F}_t) .

Démonstration. Il est classique qu'il existe une fonction h sur $E \times E$, telle que $h(x,x) = 0$ et $h(x,y) > 0$ si $x \neq y$, et que la f.a. $A_t = \sum_{0 < s \leq t} h(X_{s-}, X_s)$ admette un 1-potentiel fini. De plus A admet une (\underline{F}_t) -projection prévisible duale B qui est additive. La fonctionnelle B est continue à cause de la (\underline{F}_t) -quasi-continuité à gauche de X , donc de A . D'après la proposition 1, B est aussi la (\underline{M}_t) -projection prévisible duale de A , donc A est (\underline{M}_t) -quasi-continu à gauche, donc X également. ■

Remarque. Sous les hypothèses du corollaire, le processus X n'est pas nécessairement fortement markovien pour (\underline{M}_t) . ■

THEOREME 3: (a) Toute f.a. (\underline{M}_t) -adaptée et continue A est (\underline{F}_t) -adaptée.

(b) Sous l'hypothèse (R), toute f.a. faiblement (\underline{M}_t) -prévisible A est faiblement (\underline{F}_t) -prévisible (donc (\underline{F}_t) -adaptée).

L'assertion (a) est due à Çinlar [1]. Le lemme suivant nous a été suggéré par P. Protter.

LEMME 4: Une f.a. A (ou plus généralement, un processus croissant fini) faiblement (\underline{M}_t) -prévisible et (\underline{F}_t) -adaptée est faiblement (\underline{F}_t) -prévisible.

Démonstration. Soit $A^n = A \wedge n$, qui est un processus croissant borné. Soit $B^{n,x}$ la (\underline{F}_t) -projection prévisible duale de A^n pour la loi P^X . Comme A^n est (\underline{F}_t) -adapté, le processus $A^n - B^{n,x}$ est une martingale uniformément intégrable relativement à la filtration (\underline{F}_t) et pour la loi P^X . Mais on a $E^X(Z|\underline{F}_t) = E^X(Z|\underline{M}_t)$ pour toute variable intégrable \underline{F} -mesurable Z (c'est évident d'après (1) pour Z de la forme $Z = F_t \cdot F \circ \theta_t$ où $F_t \in \underline{F}_t$ et $F \in \underline{F}$, et on obtient le cas général par un argument de classe monotone). Cette propriété implique que $A^n - B^{n,x}$ soit également une martingale relativement à la filtration (\underline{M}_t) . Comme $B^{n,x}$ et A^n sont P^X -indistinguables de processus (\underline{M}_t) -prévisibles, il s'ensuit que $A^n = B^{n,x}$ P^X -p.s. Donc chaque A^n est faiblement (\underline{F}_t) -prévisible et la propriété cherchée en résulte en faisant tendre n vers l'infini. ■

Pour obtenir le théorème, il reste à montrer dans (b) comme dans (a) que A est (\underline{F}_t) -adapté. De façon à traiter de manière unique, autant que possible, les deux cas, nous effectuons le changement de notations suivant: dans le cas (a) nous désignons maintenant par \underline{M}_t^0 et \underline{M}^0 les tribus $\underline{M}_t^0 = \sigma(A_s : s \leq t)$ et $\underline{M}^0 = \bigvee_{(t)} \underline{M}_t^0$ (attention: \underline{M}_t et \underline{M} ne sont plus les complétées de \underline{M}_t^0 et \underline{M}^0); dans le cas (b) on augmente \underline{M}_t^0 et \underline{M}^0 de manière à ce que A soit (\underline{M}_t^0) -adapté. Avec ce changement de notations, l'hypothèse (R) est vérifiée pour (a) comme pour (b), et A est (\underline{M}_t^0) -adapté. Notons Q_ω^X les probabilités associées par l'hypothèse (R). La démonstration repose sur les trois lemmes suivants.

LEMME 5: Soit $M_t \in b\underline{M}_t^0$. On a $E^X(M_t|\underline{F}) = E^X(M_t|\underline{F}_t)$.

Démonstration. Si $F_t \in b\underline{F}_t^0$ et $F \in b\underline{F}^0$, on a

$$E^X(F_t F \circ \theta_t E^X(M_t|\underline{F})) = E^X(F_t F \circ \theta_t M_t) = E^X(F_t E^{X_t}(F) M_t)$$

$$= E^X(F_t E^{X_t}(F) E^X(M_t | \underline{F}_t)) = E^X(F_t F \circ \theta_t E^X(M_t | \underline{F}_t)).$$

Le lemme résulte alors de ce que les variables $F_t \cdot F \circ \theta_t$ engendrent \underline{F}^0 . ■

LEMME 6 : Pour P^X -presque tout ω , le processus $(\Omega, \underline{M}_t^0, \underline{M}_{t+}^0, A_t, Q_\omega^X)$ est un processus à accroissements indépendants (non stationnaires): ce qui signifie que pour tous $s, t \geq 0$, $A_{t+s} - A_t$ est une variable indépendante de la tribu \underline{M}_{t+}^0 pour la loi Q_ω^X .

Démonstration. Commençons par montrer que pour tous $s, t \geq 0$, $M_t \in b\underline{M}_t^0$, $f \in b\underline{\mathbb{R}}_+$ fixés, on a

$$(2) \quad Q_\omega^X(M_t f(A_{t+s} - A_t)) = Q_\omega^X(M_t) Q_\omega^X(f(A_{t+s} - A_t))$$

pour P^X -presque tout ω . Soit $F_t \in b\underline{F}_t^0$ et $F \in b\underline{F}^0$. Il vient

$$\begin{aligned} & E^X\{F_t F \circ \theta_t Q_\omega^X(M_t f(A_{t+s} - A_t))\} \\ &= E^X(F_t F \circ \theta_t M_t f(A_s) \circ \theta_t) \quad (\text{définition de } Q_\omega^X) \\ &= E^X\{F_t M_t E^{X_t}(F f(A_s))\} \quad (\text{d'après (1)}) \\ &= E^X\{F_t Q_\omega^X(M_t) E^{X_t}(F f(A_s))\} \quad (\text{définition de } Q_\omega^X) \\ &= E^X(F_t Q_\omega^X(M_t) F \circ \theta_t f(A_s) \circ \theta_t) \quad (\text{lemme 6 et (1)}) \\ &= E^X\{F_t F \circ \theta_t Q_\omega^X(M_t) Q_\omega^X(f(A_{t+s} - A_t))\} \quad (\text{définition de } Q_\omega^X). \end{aligned}$$

Comme les variables $F_t \cdot F \circ \theta_t$ engendrent \underline{F}^0 , on en déduit l'égalité (2). Les tribus \underline{M}_t^0 et $\underline{\mathbb{R}}_+$ étant séparables, on peut trouver un ensemble P^X -négligeable N tel que, pour $\omega \in N^c$, l'égalité (2) soit valable pour tout choix possible de $s, t \in \mathbb{Q}_+$, $M_t \in b\underline{M}_t^0$, $f \in b\underline{\mathbb{R}}_+$. Soit maintenant $s, t \geq 0$ et $M_t \in \underline{M}_{t+}^0$. Si f est continue bornée et si $(s_n), (t_n)$ sont des suites de rationnels décroissant strictement vers s, t , respectivement, on a pour tous $\omega \in N^c$, $n \in \mathbb{N}$:

$$Q_\omega^X(M_t f(A_{t_n+s_n} - A_{t_n})) = Q_\omega^X(M_t) Q_\omega^X(f(A_{t_n+s_n} - A_{t_n})),$$

ce qui entraîne (2) par passage à la limite. Le lemme est donc démontré. ■

LEMME 7 : Supposons que pour tout $x \in E$ et pour P^X -presque tout ω , le processus A soit Q_ω^X -p.s. déterministe. Alors A est (\underline{F}_t) -adapté.

Démonstration. Comme A_t est \underline{M}_t^0 -mesurable et que $Q_\cdot^X(A_t)$ est \underline{F} -mesurable, on a pour P^X -presque tout ω :

$$P^X(A_t \neq Q_\cdot^X(A_t) | \underline{F})(\omega) = Q_\omega^X[A_t \neq Q_\omega^X(A_t)].$$

Par hypothèse le second membre est nul pour P^X -presque tout ω . Par suite $A_t = Q_\cdot^X(A_t) = E^X(A_t | \underline{F})$ P^X -p.s., et comme A_t est \underline{M}_t^0 -mesurable, le lemme 5 implique alors que A_t soit \underline{F}_t -mesurable. ■

Passons à la preuve du théorème, en distinguant maintenant les deux cas.

Cas (a). D'après le lemme 6, pour $x \in E$ et pour P^X -presque tout ω , A est un processus à accroissements indépendants pour la loi Q_ω^X . Comme A est croissant et continu, il est donc déterministe pour ces lois Q_ω^X , et il suffit d'appliquer le lemme 7.

Cas (b). Par hypothèse, A est P^X -indistinguable d'un processus croissant (\underline{M}_t) -prévisible, ce dernier étant de manière classique P^X -indistinguable d'un processus croissant B^X qui est (\underline{M}_t^0) -prévisible. A et B^X étant \underline{M}_t^0 -mesurables, il existe un ensemble P^X -négligeable N_1^X tel que A et B^X soient Q_ω^X -indistinguables pour tout $\omega \notin N_1^X$. Par suite, si N_2^X désigne l'ensemble P^X -négligeable intervenant dans le lemme 6, le processus $(\Omega, \underline{M}_t^0, \underline{M}_t^0, B_t^X, Q_\omega^X)$ est à accroissements indépendants et prévisible pour $\omega \notin N_1^X \cup N_2^X$ (attention: il est prévisible relativement à (\underline{M}_t^0) , mais pas nécessairement relativement à sa filtration naturelle; c'est là la différence d'avec le cas (a), différence qui nous impose l'introduction de l'hypothèse (R)). Il nous reste à montrer que B^X , donc A , est Q_ω^X -p.s. déterministe pour $\omega \notin N_1^X \cup N_2^X$, ce qui permettra d'appliquer le lemme 7.

D'après un résultat classique sur les processus à accroissements indépendants, on peut écrire Q_ω^X -p.s.:

$$(3) \quad B_t^X = b(t) + \sum_{(n)} U^n I_{\{t \geq t_n\}} + \sum_{(n)} V^n I_{\{t \geq T_n\}}$$

où b est une fonction croissante (déterministe), où les t_n sont des réels strictement positifs distincts, où les T_n sont des (\underline{M}_{t+}^0) -temps d'arrêt totalement inaccessibles pour Q_ω^X , et où les U^n et les V^n sont des variables aléatoires positives ou nulles (pour une telle décomposition avec une filtration plus grosse que la filtration naturelle de

B^X , on peut consulter [3], ch. III). Utilisons la prévisibilité de B^X : d'une part B^X n'a pas de sauts totalement inaccessibles, donc le troisième terme à droite de (3) est Q_ω^X -p.s. nul. D'autre part $U^n = Q_\omega^X(U^n | \underline{M}_n^0(t_n)_-)$; mais $U^n = \Delta B_{t_n} - \Delta b(t_n)$ est indépendant de $\underline{M}_n^0(t_n)_- = \bigvee_{(m)} \underline{M}_n^0(t_n - 1/m)$, donc $U^n = Q_\omega^X(U^n)$ Q_ω^X -p.s. et le second terme à droite de (3) est Q_ω^X -p.s. déterministe, d'où le résultat.

4 - UN EXEMPLE LIÉ AUX SYSTÈMES RÉGÉNÉRATIFS. Nous allons donner ici un exemple de processus possédant la propriété de Markov renforcée (1), et associée à un système régénératif $(\Omega, \underline{F}, \underline{F}_t, \theta_t, X_t, P^X; M)$ au sens de [4] ou de [5]: le lecteur ne connaissant pas la théorie des systèmes régénératifs pourra supposer que $(\Omega, \underline{F}, \underline{F}_t, \theta_t, X_t, P^X)$ est un processus fortement markovien canonique muni d'un fermé aléatoire homogène progressivement mesurable M . La propriété qui nous importe pour la suite est que, pour $t \geq 0$, $f \in b\underline{F}_t^0$ et avec la notation $D_t = \inf\{s > t : s \in M\}$,

$$(4) \quad E^X(f \circ \theta_{D_t} | \underline{F}_{D_t}) = E^{X_{D_t}}(f).$$

X_ω et θ_ω sont supposés définis. Notons aussi $R_t = D_t - t$.

D'après [4] le processus (R_t, X_{D_t}) est, pour chaque P^X , un processus de Markov relativement à la famille (\underline{F}_{D_t}) , à valeurs dans $\hat{E} = \overline{\mathbb{R}}_+ \times E$. Pour obtenir une réalisation de son semi-groupe, plaçons-nous sur l'espace $\hat{\Omega} = \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ muni de la tribu produit $\hat{\underline{M}}_t^0 = \overline{\mathbb{R}}_+ \otimes \underline{F}_t^0$ et des mesures $\hat{P}^{r, X} = \xi_r \otimes P^X$. Soit

$$\hat{X}_t(r, \omega) = \begin{cases} (r-t, X_0(\omega)) & \text{si } t < r \\ (R_{t-r}(\omega), X_{D_{t-r}}(\omega)) & \text{si } t \geq r \end{cases}$$

$$\hat{\theta}_t(r, \omega) = \begin{cases} (r-t, \omega) & \text{si } t < r \\ (R_{t-r}(\omega), \theta_{D_{t-r}}(\omega)) & \text{si } t \geq r. \end{cases}$$

Enfin $(\hat{\underline{M}}_t)$ désigne la filtration complétée usuelle de la filtration $(\hat{\underline{M}}_t^0)$, où $\hat{\underline{M}}_t^0$ est la tribu des $A \in \hat{\underline{M}}_t^0$ tels que pour tout r on ait $A \cap (\{r\} \times \Omega) = \{r\} \times A_r$, avec $A_r \in \underline{F}_0$ si $r > t$, et $A_r \in \underline{F}_{D_{t-r}}$ si $r \leq t$.

Le système $(\hat{\Omega}, \hat{\underline{M}}, \hat{\underline{M}}_t, \hat{\theta}_t, \hat{X}_t, \hat{P}^{r, X})$ constitue alors un processus markovien au sens de (1): la vérification de ce que $(\hat{\theta}_t)$ est un semi-groupe est facile et analogue à des calculs faits dans [4]; la propriété (1) découle de ce que, si $f \in b\hat{\underline{M}}_t^0$, on a

$$(5) \quad E^x(f(R_t, \theta_{D_t}) | \underline{F}_{D_t}) = \hat{E}^{(R_t, X_{D_t})}(f),$$

formule qui résulte immédiatement de (4). On notera que l'information contenue dans \hat{M}^0 est en général plus grande que celle fournie par le processus \hat{X} .

BIBLIOGRAPHIE

- 1 ÇINLAR E.: Markov additive processes I, Z. für Wahr. 24, 85-93, 1972.
- 2 GETTOOR R.K.: On the construction of kernels, Sémin. Proba IX, Lect. Notes in Math. 465, 1975.
- 3 JACOD J.: Calcul stochastique et problèmes de martingales. Lect. Notes in Math. 714, 1979.
- 4 MAISONNEUVE B.: Systèmes régénératifs. Astérisque 15, 1974.
- 5 MAISONNEUVE B., MEYER P.A.: Ensembles aléatoires markoviens homogènes, Sémin. Proba. VIII, Lect. Notes in Math. 381, 1974.