Marc Yor

Remarques sur une formule de Paul Lévy

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 343-346
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__343_0>

REMARQUES SUR UNE FORMULE DE PAUL LEVY

Marc YOR

1. Soit $(X_t, Y_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, issu de 0.

M.R. Berthuet (1) a obtenu une expression explicite de la fonction caractéristique du couple $(\int_0^1 X_u dY_u \; ; \int_0^1 Y_u dX_u)$, qui est :

pour tout $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$,

$$(1) \qquad E[\exp i\{\alpha\int_0^1 X_u dY_u + \beta\int_0^1 Y_u dX_u\}]$$

$$= \begin{cases} [ch^2(\frac{\alpha-\beta}{2}) + (\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta})^2 \, sh^2(\frac{\alpha-\beta}{2})]^{-1/2} & , \text{ si } \alpha \neq \beta \\ (1+\alpha^2)^{-1/2} & , \text{ si } \alpha = \beta \end{cases}$$

Par continuité, il suffit évidemment de prouver la formule pour $\alpha \neq \beta$, ce que l'on suppose dans la suite. Nous remarquons ci-dessous que la formule (1) se déduit, de façon directe, de la formule de Paul Lévy [2] : pour tout $b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$,

$$(2) \qquad E[\exp i\{b\int_0^1 (X_u dY_u - Y_u dX_u)\} \,/\, X_1 = x \; ; Y_1 = y]$$

$$= \frac{b}{(shb)} \exp \frac{x^2+y^2}{2} [1-b \coth b]$$

(Cette formule joue un rôle important dans l'étude de certains groupes nilpotents ; voir, par exemple, l'article de B. Gaveau [1]).

On donne ensuite une démonstration simple de la formule (2).

2. Faisons le changement de paramètres : $\alpha = a+b$; $\beta = a-b$.
Il vient alors, d'après la formule d'Ito :

$$\alpha\int_0^1 X_u dY_u + \beta\int_0^1 Y_u dX_u = a(X_1 Y_1) + b\int_0^1 (X_u dY_u - Y_u dX_u),$$

et donc, d'après (2) :

$$E[\exp i\{\alpha\int_0^1 X_u dY_u + \beta\int_0^1 Y_u dX_u\} \,/\, X_1 = x, \; Y_1 = y]$$

$$= \exp(iaxy) \quad E[\exp\{ib\int_0^1 (X_u dY_u - Y_u dX_u)\} \,/\, X_1 = x \; ; Y_1 = y]$$

$$= \exp(iaxy) \, \frac{b}{shb} \exp(\frac{x^2+y^2}{2}) \, [1-b \coth b] .$$

(1) Un résumé des résultats de M. Berthuet paraîtra dans un prochain volume des Annales de l'Université de Clermont, lequel rassemble les exposés faits à l'Ecole d'Eté de Saint-Flour (1979).

On a donc :

$$E\left[\exp i\{\alpha\int_0^1 X_u dY_u + \beta\int_0^1 Y_u dX_u\}\right]$$

$$= \frac{b}{2\pi(\operatorname{sh} b)}\int_{\mathbf{R}^2} dx\, dy \exp\left[(-\, b \coth b)\, \frac{x^2+y^2}{2} + iaxy\right]$$

$$= \left[\operatorname{ch}^2 b + (\tfrac{a}{b})^2 \operatorname{sh}^2 b\right]^{-1/2} \quad \text{(d'où (1))},$$

à l'aide de la formule élémentaire, valable pour tout $\lambda > 0$, et $\mu \in \mathbf{R}$:

$$(3) \qquad \frac{1}{2\pi}\,(\lambda^2+\mu^2)^{1/2}\int_{\mathbf{R}^2} dx\, dy\, e^{\left[-\lambda(\frac{x^2+y^2}{2})+i\mu xy\right]} = 1$$

3. Pour prouver (2), remarquons tout d'abord que

$$\int_0^1 (X_u dY_u - Y_u dX_u) = \int_0^1 (X'_u dY'_u - Y'_u dX'_u),$$

où $\binom{X'}{Y'} = R\binom{X}{Y}$, et R est une transformation orthogonale de $\mathbf{R}^2$

(on peut, par exemple, utiliser l'égalité : $\int_0^1 (X_u dY_u - Y_u dX_u) = \int_0^1 (A\binom{X_u}{Y_u}\ ;\ d\binom{X_u}{Y_u})$

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $\tilde{R}AR = A$).

D'autre part, la loi du mouvement brownien $\binom{X}{Y}$ est invariante par toute transformation orthogonale R ; on déduit de ces 2 remarques que :

$$E\left[\exp ib\int_0^1 (X_u dY_u - Y_u dX_u) \,/\, X_1 = x,\ Y_1 = y\right]$$

$$= E\left[\exp ib\int_0^1 (X_u dY_u - Y_u dX_u) \,/\, X_1^2 + Y_1^2 = x^2 + y^2\right].$$

Définissons maintenant $\rho_t = \sqrt{X_t^2+Y_t^2}$ $\quad (t \geq 0)$, et notons $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$.

Rappelons que la filtration naturelle du processus (ρ_t) est égale à celle du mouvement brownien réel (voir, par exemple, [4]) :

$$\beta_t = \int_0^t \frac{X_u dX_u + Y_u dY_u}{\rho_u} \qquad (t \geq 0).$$

En conséquence, le processus $(\rho_t)_{t\geq 0}$ est indépendant du second mouvement brownien réel :

$$\gamma_t = \int_0^t \frac{X_u dY_u - Y_u dX_u}{\rho_u} \qquad (t \geq 0),$$

orthogonal à (β_t).

Il découle de ces dernières remarques que :

$$E[\exp ib\int_0^1 (X_u dY_u - Y_u dX_u) \,/\, \rho_1 = \rho]$$

$$= E[\exp ib\int_0^1 \rho_u d\gamma_u \,/\, \rho_1 = \rho] = E[\exp - \frac{b^2}{2}\int_0^1 \rho_u^2 du \,/\, \rho_1 = \rho]$$

Or, D. Williamns ([3], p. 238) a montré très simplement la formule :

$$(4) \qquad E[\exp\{\alpha\rho_1^2 - \frac{b^2}{2}\int_0^1 \rho_u^2 du\}] = b[b \text{ ch } b - 2\alpha \text{sh } b]^{-1},$$

pour tout couple (α,b) vérifiant : $2\alpha < b \coth b$.

On vérifie alors immédiatement, en appliquant la formule élémentaire :

$$(5) \qquad (E[\exp(-\lambda X^2)])^2 = \frac{1}{1+2\lambda} \quad (\lambda > 0),$$

où X est une variable gaussienne, centrée, réduite, que : pour tout $b \in \mathbb{R} \setminus \{o\}$,

$$E[\exp\{-\frac{b^2}{2}\int_0^1 \rho_u^2 du\} \,/\, \rho_1] = \frac{b}{\text{sh } b}\exp[\frac{\rho_1^2}{2}(1 - b \coth b)],$$

ce qui termine la preuve de (2).

4. Pour être complet, indiquons la preuve de (4) -très légèrement modifiée- donnée par D. Williams en [3].

Puisque $\rho^2 = X^2 + Y^2$, on a, pour tout $\alpha > 0$:

$$I_{\alpha,b} \overset{\text{déf}}{=} E[\exp\{-\alpha\rho_1^2 - \frac{b^2}{2}\int_0^1 \rho_u^2 du\}]$$

$$= (E[\exp\{-\alpha X_1^2 - \frac{b^2}{2}\int_0^1 X_u^2 du\}])^2$$

$$= E_Q[\exp(-\alpha X_1^2)\exp(-b\int_0^1 X_u dX_u)]^2,$$

où Q désigne la probabilité : $\exp\{b\int_0^1 X_u dX_u - \frac{b^2}{2}\int_0^1 X_u^2 du\}\cdot P$

(d'après un théorème de Novikov, Q est une probabilité dès que $E_P[\exp \frac{b^2}{2}\int_0^1 X_u^2 du] < \infty$, ce qui est assuré, d'après l'inégalité de Jensen, si $E[\exp(\frac{b^2}{2} X_1^2)] < \infty$; dans la suite, on suppose donc que b vérifie cette condition, ce qui suffit pour établir (4), par un raisonnement d'analyticité).

On a donc :

$$I_{\alpha,b} = E_Q[\exp\{-\alpha X_1^2 - \frac{b}{2}(X_1^2-1)\}]^2$$

$$= \exp(b) \quad (E_Q[\exp - (\alpha + \frac{b}{2})X_1^2])^2.$$

Or, d'après le théorème de Girsanov, (X_t) vérifie, sous Q, l'équation : $X_t = \tilde{X}_t + b\int_0^{t\wedge 1} X_u du$, où $(\tilde{X}_t)$ est un mouvement brownien réel.

Ainsi : $X_t = \int_0^t e^{b(t-s)}\, d\tilde{X}_s$ $(t \leq 1)$, et, en particulier, X_1 est, sous Q, une variable gaussienne, centrée, de variance $\sigma_b^2 = \int_0^1 e^{2b(1-s)} ds = \frac{1}{2b}(e^{2b}-1)$.

Donc, si X désigne une variable gaussienne, centrée, réduite, on a :

$$I_{\alpha,b} = \exp(b) \; (E[\exp - (\alpha + \frac{b}{2})\, \sigma_b^2 \, X^2])^2$$

$$= b[b \operatorname{ch} b + 2\alpha \operatorname{sh} b]^{-1},$$ d'après (5), et la formule (4) est établie.

REFERENCES :

[1] B. GAVEAU : Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimées sous-elliptiques sur certains groupes nilpotents. Acta Mathematica, Vol. 139, 1977.

[2] P. LEVY : Wiener's Random Function, and other Laplacian Random Functions. Second Symposium of Berkeley. Probability and Statistics (1950), 171-186.

[3] D. WILLIAMS : On a stopped Brownian motion formula of H.M. Taylor. Séminaire de Probabilités X, Lect. Notes in Maths 511, Springer (1976).

[4] M. YOR : Les filtrations de certaines martingales du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^n$. Séminaire de Probabilités XIII. Lect. Notes 721. Springer (1979).