Michel Émery

Annonçabilité des temps prévisibles. Deux contre-exemples

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 318-323
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__318_0>

Séminaire de Probabilités
Volume XIV

ANNONÇABILITE DES TEMPS PREVISIBLES : DEUX CONTRE-EXEMPLES

par M. Emery

Il est bien connu (Probabilités et Potentiel, 2° édition, chap. 4) que tout temps prévisible sur un espace filtré $(\Omega,\underline{\underline{F}},P,(\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0})$ est annoncé presque sûrement par une suite de temps prévisibles. Il s'agit là d'un résultat de nature probabiliste, dont la démonstration utilise la théorie de la mesure. Nous allons montrer sur un exemple que ceci devient faux dans un cadre "algébrique" $(\Omega,\underline{\underline{F}},(\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0})$ où, faute de probabilité, on ne dispose pas d'ensembles négligeables où fourrer les ω trop gênants : Il existe des temps annonçables que n'annonce aucune suite de temps prévisibles ; il existe des temps prévisibles non annonçables.

On prend pour Ω le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formé des suites $(t_n)_{n\geq 0}$ strictement croissantes, telles que $t_0 = 0$, et convergentes (dans $\mathbb{R}_+$) ; c'est un borélien de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$; on note $\underline{\underline{F}}$ la tribu borélienne sur Ω . Pour

$$\omega = (t_0, \dots ,t_n, \dots) \in \Omega ,$$

on pose $T_n(\omega) = t_n$ et $T(\omega) = \lim_n T_n(\omega)$. (On peut s'imaginer Ω comme l'espace des trajectoires possibles d'un processus de comptage à temps d'explosion fini ; T_n est le n^e temps de saut et T l'instant d'explosion.) Pour tout ω de Ω , on note $D_n(\omega)$ le vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ $(T_0(\omega), \dots ,T_n(\omega))$; une fonction U sur Ω sera notée indifféremment $U(\omega)$ ou $U(T_0, \dots ,T_n, \dots)$; si U est borélienne, on l'appellera aussi, par abus de language, variable aléatoire.

Pour $t\geq 0$, on appelle $\underline{\underline{F}}^\circ_t$ la sous-tribu de $\underline{\underline{F}}$ engendrée par toutes les fonctions $(T_n \wedge t)$ quand n décrit $\mathbb{N}$. La filtration $(\underline{\underline{F}}_t) = (\underline{\underline{F}}^\circ_{t+})$ est continue à droite, les T_n sont des temps d'arrêt de $(\underline{\underline{F}}_t)$ et $\underline{\underline{F}}^\circ_t = \underline{\underline{F}}_{t-}$.

On se garde bien de définir une probabilité sur Ω .

Voici d'abord une description explicite des filtrations $(\underline{\underline{F}}^\circ_t)$ et $(\underline{\underline{F}}_t)$.

PROPOSITION 1. a) *Soit* S *un temps d'arrêt* >0 *de* $(\mathcal{F}^{\circ}_{t})$. *Une variable aléatoire* U *est* $\mathcal{F}^{\circ}_{S}$*-mesurable si et seulement si pour tout* n, U *ne dépend que de* D_n *sur* $\{ T_n < S \leq T_{n+1} \}$.

b) *Soit* S *un temps d'arrêt de* $(\mathcal{F}_{t})$. *Une variable aléatoire* U *est* $\mathcal{F}_{S}$*-mesurable si et seulement si, pour tout* n, U *ne dépend que de* D_n *sur* $\{ T_n \leq S < T_{n+1} \}$.

c) *En particulier, pour tout* n, *les trois tribus* $\sigma(T_0, \ldots, T_n)$, $\mathcal{F}_{T_n -}$ *et* $\mathcal{F}_{T_n}$ *sont égales*.

La démonstration de cette proposition n'offre guère d'intérêt ; nous la rejettons en appendice.

REMARQUES. 1) Le a) appliqué à $U = S$ entraîne que T_{n+1} est d'une certaine manière inaccessible. En effet, si S est un temps d'arrêt de $(\mathcal{F}^{\circ}_{t})$ — ou a fortiori un temps prévisible de $(\mathcal{F}_{t})$ — sur $\{S = T_{n+1}\}$, S ne dépend que de D_n , et l'égalité $S = T_{n+1}$ a lieu "par hasard".

2) Pour tout temps d'arrêt S de $(\mathcal{F}^{\circ}_{t})$, S ne dépend que de D_n sur $\{ T_n < S \leq T_{n+1} \}$; mais cette propriété ne caractérise pas les temps d'arrêt. Elle est en effet vérifiée par la variable aléatoire S qui vaut $T_n + 1$ si n est le plus grand entier tel que $T_{n+1} \geq T_n + 1$ et qui vaut T s'il n'existe aucun tel entier ; cependant S n'est pas un temps d'arrêt. On pourrait faire une remarque analogue relativement à la filtration $(\mathcal{F}_{t})$.

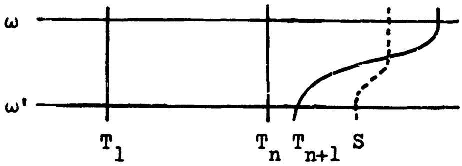
PREMIER CONTRE-EXEMPLE

Nous allons voir que le temps prévisible T, annoncé par la suite (T_n), n'est annoncé par aucune suite de temps prévisibles. Comme les tribus prévisibles associées aux filtrations $(\mathcal{F}^{\circ}_{t})$ et $(\mathcal{F}_{t})$ sont les mêmes (Probabilités et Potentiel, IV 61 b), c'est une conséquence de la proposition suivante:

PROPOSITION 2. *Soit* S *un temps d'arrêt de* $(\mathcal{F}^{\circ}_{t})$ *strictement antérieur à* T . *Alors* $S = 0$.

Démonstration. Elle se fait par l'absurde, en supposant $S \neq 0$ (et donc, $\mathcal{F}^{\circ}_{0}$ étant dégénérée, $S > 0$ partout). Pour tout $\omega \in \Omega$, on peut définir un entier $n(\omega)$ par $T_{n(\omega)}(\omega) < S(\omega) \leq T_{n(\omega)+1}(\omega)$.

Remarquons d'abord que, à chaque $\omega \in \Omega$, on peut associer un $\omega' \in \Omega$ tel que $D_{n(\omega)}(\omega') = D_{n(\omega)}(\omega)$ et que $n(\omega') > n(\omega)$.



En effet, il suffit de choisir ω' tel que, en posant $n = n(\omega)$, l'on ait $D_n(\omega') = D_n(\omega)$ et $T_{n+1}(\omega') < S(\omega)$. On a alors $T_{n+1}(\omega') < S(\omega')$ (d'où $n(\omega') > n$), car sinon ω et ω' seraient dans $\{T_n < S \leq T_{n+1}\}$, et la proposition 1.a) appliquée à $U = S$ donnerait $S(\omega) = S(\omega')$, d'où l'on tirerait

$$S(\omega) = S(\omega') \leq T_{n+1}(\omega') < S(\omega) \quad .$$

On choisit maintenant un ω_0 dans Ω et on itère la construction ci-dessus. Ceci fournit une suite (ω_k) telle que $n(\omega_k) \geq k$ et que

$$D_{n(\omega_k)}(\omega_{k+1}) = D_{n(\omega_k)}(\omega_k) \quad ,$$

donc que $D_k(\omega_k) = D_k(\omega_{k+1})$. Les ω_k se recollent en un $\omega \in \Omega$ tel que, pour tout k, $D_k(\omega) = D_k(\omega_k)$. L'événement $\{S \geq T_k\}$ est dans $\underline{\underline{F}}_{T_k}$, il ne dépend donc que de D_k (proposition 1.c). Réalisé pour ω_k (car $n(\omega_k) \geq k$), il l'est aussi pour ω, d'où, pour tout k, $S(\omega) \geq T_k(\omega)$. On en tire $S(\omega) \geq T(\omega)$, ce qui contredit l'hypothèse. ▬

DEUXIEME CONTRE-EXEMPLE

Maintenant, un exemple de temps prévisible non annonçable. Intuitivement, il n'est pas difficile de se convaincre que $T + I_{\{T \in \mathbb{Q}\}}$ n'est pas annonçable ; toute la pathologie est en fait déjà présente pour $T + I_{\{T \geq 1\}}$. (Il n'y a en réalité dans tout ceci aucune pathologie ; c'est au contraire le théorème d'annonçabilité p.s. qui est surprenant!)

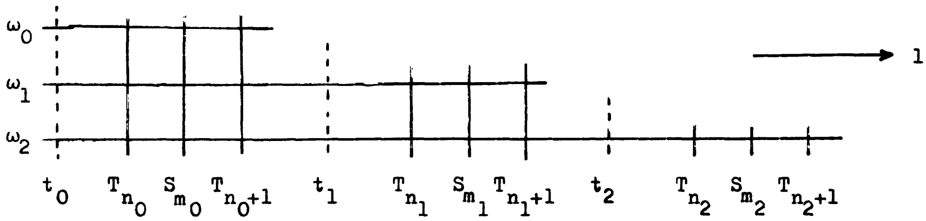
PROPOSITION 3. Le temps prévisible $T + I_{\{T \geq 1\}}$ n'est annoncé par aucune suite de temps d'arrêt de $(\underline{\underline{F}}_t)$.

Démonstration. Il est prévisible car c'est l'infimum des deux temps prévisibles $T + 1$ et $T_{\{T < 1\}}$.

Supposons qu'une suite (S_n) de temps d'arrêt de $(\underline{\underline{F}}_t)$ annonce le temps $T + I_{\{T \geq 1\}}$. Nous allons effectuer une construction fournissant un ω tel que

$\sup_n S_n(\omega) \leq 1$ et $T(\omega) = 1$, ce qui est contradictoire.

Soit $t_0 < t_1 < \dots$ une suite qui croît vers 1.



Il existe $\omega_0 \in \Omega$ tel que $t_0 < T(\omega_0) < 1$. Comme les suites $S_n(\omega_0)$ et $T_n(\omega_0)$ croissent vers $T(\omega_0)$, il existe $n_0 > 0$ et $m_0 \geq 0$ tels que

$$t_0 < T_{n_0}(\omega_0) \leq S_{m_0}(\omega_0) < T_{n_0+1}(\omega_0) < 1 \quad .$$

Puis il existe ω_1 tel que $t_1 < T(\omega_1) < 1$ et que $D_{n_0+1}(\omega_1) = D_{n_0+1}(\omega_0)$. Comme les suites $S_n(\omega_1)$ et $T_n(\omega_1)$ croissent vers $T(\omega_1) > t_1$, il existe $n_1 > n_0$ et $m_1 > m_0$ tels que

$$t_1 < T_{n_1}(\omega_1) \leq S_{m_1}(\omega_1) < T_{n_1+1}(\omega_1) < 1 \quad .$$

Puis on recommence... Il existe ainsi une suite (ω_k) dans Ω et deux suites strictement croissantes (n_k) et (m_k) dans $\mathbb{N}$ telles que

$$D_{n_{k-1}+1}(\omega_k) = D_{n_{k-1}+1}(\omega_{k-1}) \quad ;$$

$$t_k < T_{n_k}(\omega_k) \leq S_{m_k}(\omega_k) < T_{n_k+1}(\omega_k) < 1 \quad .$$

Les ω_k se recollent en un $\omega \in \Omega$ tel que, pour tout k, $D_{n_k+1}(\omega) = D_{n_k+1}(\omega_k)$. En particulier, $T_{n_k}(\omega) = T_{n_k}(\omega_k)$ est compris entre t_k et 1, d'où $T(\omega) = 1$. L'événement $\{S_{m_k} < T_{n_k+1}\}$ est dans $\underline{\underline{F}}_{T_{n_k+1}}$, il ne dépend donc que de D_{n_k+1}. Etant réalisé pour ω_k, il l'est pour ω, d'où $S_{m_k}(\omega) < T_{n_k+1}(\omega) < 1$, et $\lim_m S_m(\omega) \leq 1$. ▬

APPENDICE

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1

1) <u>Pour</u> $t > 0$ <u>et</u> U <u>fonction</u> $\underline{\underline{F}}_t^o$<u>-mesurable</u>, U <u>ne dépend que de</u> D_n <u>sur</u> $\{T_n < t \leq T_{n+1}\}$.

La fonction U peut s'écrire $u(T_0 \wedge t, \ldots, T_k \wedge t, \ldots)$; donc sur l'ensemble $\{T_n < t \leq T_{n+1}\}$ $U = u(T_0, \ldots, T_n, t, t, \ldots)$. ▬

1^{bis}) <u>Pour</u> $t \geq 0$ <u>et</u> U <u>fonction</u> $\underline{\underline{F}}_t$<u>-mesurable</u>, U <u>ne dépend que de</u> D_n <u>sur</u> $A = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}$.

Quand ε décroît vers zéro, $A_\varepsilon = \{T_n < t + \varepsilon \leq T_{n+1}\} \cap A$ croît vers A. Comme U est $\underline{\underline{F}}^o_{t+\varepsilon}$-mesurable, il existe d'après 1) des fonctions u_ε sur $\mathbb{R}^{n+1}$ telles que, sur A_ε , $U = u_\varepsilon \circ D_n$. En posant $u = \lim\sup_k u_{1/k}$, on a alors $U = u \circ D_n$ sur A . ▬

2) <u>Soit</u> S <u>un temps d'arrêt</u> > 0 <u>de</u> $(\underline{\underline{F}}_t^o)$, U <u>une fonction</u> $\underline{\underline{F}}_S^o$<u>-mesurable</u>. <u>Sur</u> $\{T_n < S \leq T_{n+1}\}$, U <u>ne dépend que de</u> D_n .

Soient ω et ω' dans $\{T_n < S \leq T_{n+1}\}$ tels que $D_n(\omega) = D_n(\omega')$. On pose $t = \inf(S(\omega), S(\omega'))$. Sur $\{T_n < t \leq T_{n+1}\}$ (qui contient les deux points ω et ω'), l'événement $\{S \leq t\}$ ne dépend que de D_n (point 1) ci-dessus). Réalisé pour l'un des deux, il l'est pour l'autre ; donc $S(\omega) = S(\omega')$. Puis $UI_{\{S \leq t\}}$, qui est $\underline{\underline{F}}_t^o$-mesurable, prend, toujours grâce à 1), la même valeur en ω et ω', d'où $U(\omega) = U(\omega')$. ▬

2^{bis}) <u>Soient</u> S <u>un temps d'arrêt de</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$, U <u>une fonction</u> $\underline{\underline{F}}_S$<u>-mesurable</u>. <u>Sur</u> $\{T_n \leq S < T_{n+1}\}$, U <u>ne dépend que de</u> D_n .

L'argument est tout-à-fait analogue au précédent.

3) <u>Soient</u> S <u>un temps d'arrêt</u> > 0 <u>de</u> $(\underline{\underline{F}}_t^o)$ <u>et</u> U <u>une variable aléatoire ne dépendant que de</u> D_n <u>sur</u> $\{T_n < S \leq T_{n+1}\}$. <u>Alors</u> U <u>est</u> $\underline{\underline{F}}_S^o$<u>-mesurable</u>.

En effet, l'hypothèse entraîne

$$U = \sum_{n \geq 0} I_{\{T_n \wedge S < S\,,\, T_{n+1} \wedge S = S\}}\, U(T_0 \wedge S, \ldots, T_n \wedge S, S+\tfrac{1}{2}, S+\tfrac{3}{4}, S+\tfrac{7}{8}, \ldots)$$
$$+ \, U \, I_{\{\forall n \;\, T_n \wedge S < S\}} \quad .$$

Donc U est fonction borélienne de S et des $T_n \wedge S$; il reste à vérifier que $T_n \wedge S$ est $\underline{\underline{F}}^\circ_S$-mesurable. Ceci résulte de ce que, pour tout t,

$$(T_n \wedge S)\, I_{\{S \leq t\}} \;=\; ((T_n \wedge t) \wedge (S \wedge t))\, I_{\{S \leq t\}}$$

est $\underline{\underline{F}}^\circ_t$-mesurable. ▬

3^{bis}) <u>Soient</u> S <u>un temps d'arrêt de</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$ <u>et</u> U <u>une variable aléatoire ne dépendant que de</u> D_n <u>sur</u> $\{T_n \leq S < T_{n+1}\}$. <u>Alors</u> U <u>est</u> $\underline{\underline{F}}_S$-<u>mesurable</u>.

L'argument précédent se simplifie un peu car les T_n sont des temps d'arrêt de $(\underline{\underline{F}}_t)$.

4) <u>Pour tout</u> n, <u>les trois tribus</u> $\sigma(T_0, \ldots, T_n)$, $\underline{\underline{F}}_{T_n-}$ <u>et</u> $\underline{\underline{F}}_{T_n}$ <u>sont égales</u>.

Tout temps d'arrêt S est toujours $\underline{\underline{F}}_{S-}$-mesurable ; de là

$$\sigma(T_0, \ldots, T_n) \subset \underline{\underline{F}}_{T_n-} \subset \underline{\underline{F}}_{T_n} \quad .$$

Le point 2^{bis}) appliqué à $S = T_n$ entraîne $\underline{\underline{F}}_{T_n} \subset \sigma(T_0, \ldots, T_n)$. ▬