SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

ÉRIK LENGLART
DOMINIQUE LÉPINGLE
MAURIZIO PRATELLI

Présentation unifiée de certaines inégalités de la théorie des martingales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 26-48
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__26_0>

PRESENTATION UNIFIEE DE CERTAINES INEGALITES DE LA THEORIE DES MARTINGALES.

E. LENGLART D. LEPINGLE M. PRATELLI

A côté des inégalités qui comme celle de Fefferman concernent simultanément plusieurs martingales, il existe dans la littérature d'abondants exemples d'inégalités du type $E[U^p] \leq c\, E[V^p]$, où U et V désignent deux opérateurs associés à une même martingale ou sous-martingale. Leur démonstration utilise des méthodes très variées : intégration stochastique, décomposition atomique ou inégalité de Fefferman, par exemple. Nous donnons dans la première partie un ensemble de quatre lemmes d'énoncés simples et voisins, qui permettent de vérifier rapidement quel type d'inégalités on peut espérer obtenir entre deux opérateurs donnés. Les autres parties sont consacrées aux principales applications de ces quatre lemmes.

1. QUATRE LEMMES SUR LES PROCESSUS CROISSANTS.

Dans toute la suite, F désigne une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}_+$, nulle en zéro, croissante, continue à droite, telle que

$F(x) > 0$ pour $x > 0$. Nous disons que F est <u>modérée</u> (ou <u>à croissance modérée</u>) s'il existe un scalaire $\alpha > 1$ tel que l'on ait

$$\sup_{x>0} \frac{F(\alpha x)}{F(x)} < +\infty \ ;$$

on voit alors que F vérifie cette relation pour tout $\alpha > 1$. Si la fonction F est concave, elle est modérée ; en effet, pour tout $\alpha > 1$,

$$\sup_{x>0} \frac{F(\alpha x)}{F(x)} \leq \alpha .$$

Si en fait

$$\sup_{x>0} \frac{F(\alpha x)}{F(x)} < \alpha$$

pour un $\alpha > 1$, on dira que F est <u>lente</u> (ou <u>à croissance lente</u>). Par contre, si F est convexe, de dérivée à droite f, pour que F soit modérée il faut et il suffit que le nombre

$$p = \sup_{x>0} \frac{x\, f(x)}{F(x)}$$

(que nous appellerons l'<u>exposant</u> de F) soit fini. En outre, si cette condition est remplie, la fonction $F(x)/x^p$ est décroissante, de sorte que l'on a pour tout $\alpha > 1$

$$\sup_{x>0} \frac{F(\alpha x)}{F(x)} \leq \alpha^p .$$

On remarquera que pour la fonction $F(x)=x^p$ (avec $p \geq 1$), l'exposant est égal à p , ce qui justifie le nom adopté. Si la fonction F modérée convexe vérifie

$$\inf_{x>0} \frac{x\, f(x)}{F(x)} > 1 ,$$

on dira dans ce cas que F est une <u>fonction d'Young</u>. On remarquera encore que la fonction F peut etre modérée (et même lente) sans être continue, ce qui n'est pas vrai si F est convexe ou concave. Dans tous les cas on posera

$$F(+\infty) = \lim_{x \mapsto \infty} F(x) .$$

On peut alors classer en cinq types les inégalités de la forme $E[U^p] \leq c\, E[V^p]$, chaque type s'étendant à une classe de fonctions F modérées :

- le type $0 < p < \infty$ à toutes les fonctions modérées,
- le type $1 < p < \infty$ aux fonctions d'Young,
- le type $1 \leq p < \infty$ aux fonctions convexes modérées,
- le type $0 < p \leq 1$ aux fonctions concaves,
- le type $0 < p < 1$ aux fonctions à croissance lente.

Nous ne parlerons pas du second type, qui concerne essentiellement l'inégalité de Doob des sous-martingales positives [6] , mais nous énoncerons un lemme pour chacun des autres types.

L'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t), \mathbb{P})$ vérifie les conditions habituelles de [11] . Les martingales locales auront leurs trajectoires continues à droite et pourvues de limites à gauche. En revanche, un processus croissant A sera seulement une application mesurable de $\Omega \times \mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, dont les trajectoires seront des fonctions croissantes de t : on posera $A_\infty = \lim_{t \mapsto \infty} A_t$. L'absence de continuité à droite allongera très légèrement les demonstrations mais on évitera ainsi d'avoir recours à deux démonstrations parallèles, une avec les processus prévisibles continus à droite, une autre avec les processus adaptés B continus à droite, où alors c'est B_- qui intervient : en effet, si B est adapté croissant, B_- est croissant prévisible (on posera $B_{0-}=0$ pour tout processus croissant B). Voici d'ailleurs l'outil qui permet de traiter les processus croissants prévisibles non nécessairement continus à droite.

LEMME PRELIMINAIRE 1.0 <u>Soit</u> H <u>une partie prévisible de</u> $\Omega\times\mathbb{R}_+$, <u>de début</u> $D_H(\omega) = \inf\{t : (t,\omega)\in H\}$. <u>Il existe alors une suite croissante</u> (T_n) <u>de temps d'arrêt finis de limite</u> D_H <u>telle que pour tout</u> n, $[\![T_n]\!] \cap H \cap \{\Omega\times\mathbb{R}_+^*\} = \emptyset$. <u>De plus,</u>
$\bigcup_n \{T_n = D_H\} = \{D_H \notin H\} \cap \{D_H < \infty\}$.

DEMONSTRATION Si l'on pose $[\![T]\!] = [\![0,D_H]\!] \cap H$, alors T est un temps d'arrêt prévisible, annonçable par une suite croissante (T_n°) de temps d'arret finis. Posant $T_n = T_n^\circ \wedge T$, on obtient la suite désirée. □

Voici maintenant les quatre lemmes annoncés. Bien que leurs démonstrations ne soient pas vraiment originales, nous en donnons l'essentiel.

LEMME 1.1 <u>Soient</u> A <u>et</u> B <u>deux processus croissants prévisibles. Supposons qu'il existe</u> q>0, a>0, <u>tels que pour tout couple</u> (S,T) <u>de temps d'arret avec</u> $S\leq T$, <u>on ait</u>

$$E\left[(A_T I_{\{T>0\}} - A_S I_{\{S>0\}})^q\right] \leq a\, E\left[B_T^q I_{\{S<T\}}\right].$$

<u>Alors, pour toute fonction</u> F <u>modérée, il existe</u> c = c(a,q,F) <u>pour lequel</u>

$$E[F(A_\infty)] \leq c\, E[F(B_\infty)] .$$

DEMONSTRATION Montrons d'abord que pour tous $\beta>1$, $\delta>0$ et $\lambda>0$, on a l'inégalité de distribution

$$\mathbb{P}\left\{ A_\infty \geq \beta\lambda \ , \ B_\infty < \delta\lambda \right\} \leq a\ \delta^q (\beta-1)^{-q}\, \mathbb{P}\left\{ A_\infty \geqslant \lambda \right\} .$$

Il suffit pour cela, en remplaçant β par $\beta - \frac{1}{n}$, d'obténir l'inegalité

$$\mathbb{P}\left\{ A_\infty > \beta\lambda \ , \ B_\infty \leq \delta\lambda \right\} \leq a\ \delta^q (\beta-1)^{-q}\, \mathbb{P}\left\{ A_\infty > \lambda \right\} .$$

Soit (R_n) une suite croissante de temps d'arrêt finis de limite $R = \inf \{ t : A_t > \lambda \}$, telle que pour tout n, $A_{R_n} \leq \lambda$ sur $\{R_n > 0\}$, et de même (T_m) une suite croissante de temps d'arrêt finis de limite $T = \inf \{ t : B_t > \delta\lambda \}$ vérifiant $B_{T_m} \leq \delta\lambda$ sur l'ensemble $\{T_m > 0\}$ pour tout m. Alors,

$$\mathbb{P}\left\{ A_\infty > \beta\lambda \ , \ B_\infty \leq \delta\lambda \right\} \leq \lim_m \ \mathbb{P}\left\{ A_{T_m} I_{\{T_m > 0\}} > \beta\lambda \right\} .$$

Pour tout m et tout n,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left\{ A_{T_m} I_{\{T_m>0\}} > \beta\lambda \right\} &\leq \mathbb{P}\left\{ A_{T_m} I_{\{T_m>0\}} - A_{R_n\wedge T_m} I_{\{R_n\wedge T_m > 0\}} > (\beta-1)\lambda \right\} \\
&\leq \lambda^{-q} (\beta-1)^{-q}\, \mathbb{E}\left[\left(A_{T_m} I_{\{T_m>0\}} - A_{R_n\wedge T_m} I_{\{R_n\wedge T_m > 0\}}\right)^q \right] \\
&\leq a\ \lambda^{-q} (\beta-1)^{-q}\, \mathbb{E}\left[B^q_{T_m}\ I_{\{R_n < T_m\}} \right] \\
&\leq a\ \delta^q (\beta-1)^{-q}\ \mathbb{P}\left\{ R_n < T_m \right\} .
\end{aligned}$$

Passant à la limite en n, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left\{ A_{T_m} I_{\{T_m>0\}} > \beta\lambda \right\} &\leq a\ \delta^q (\beta-1)^{-q}\ \mathbb{P}\left\{ R \leq T_m \right\} \\
&\leq a\ \delta^q (\beta-1)^{-q}\ \mathbb{P}\left\{ R < \infty \right\} ,
\end{aligned}$$

et il suffit maintenant de faire tendre m vers l'infini pour avoir l'inégalité de distribution cherchée. On termine comme en [1] : soit g une fonction telle que $F(ax) \leq g(a).F(x)$. Le théorème de Fubini nous donne

$$E[F(A_\infty)] \leq g(\beta)\, E[F(A_\infty/\beta)] \leq g(\beta) \int \mathbb{P}\{A_\infty \geq \beta\lambda\}\, dF(\lambda)$$

$$\leq g(\beta) \int \left[\mathbb{P}\{A_\infty \geq \beta\lambda,\ B_\infty < \delta\lambda\} + \mathbb{P}\{B_\infty \geq \delta\lambda\}\right] dF(\lambda)$$

$$\leq a\, g(\beta)\, \delta^q (\beta-1)^{-q}\, E[F(A_\infty)] + g(\beta)\, g(\delta^{-1})\, E[F(B_\infty)] .$$

Si δ est assez petit, on obtient finalement

$$E[F(A_\infty)] \leq g(\delta^{-1}) g(\beta) \left[1 - a g(\beta)\, \delta^q (\beta-1)^{-q}\right]^{-1} E[F(B_\infty)] . \square$$

On déduit immédiatement de ce lemme que lorsque A et B sont deux processus adaptés croissants, pour avoir la même conclusion que dans l'énoncé du lemme, il suffit de vérifier la condition

$$E[(A_{T-} - A_{S-})^q] \leq a\, E[B^q_{T-}\, I_{\{S<T\}}] ;$$

le passage aux processus prévisibles A_- et B_- nous permet en effet de retrouver immédiatement les hypothèses du lemme.

Le second lemme est connu sous le nom de Garsia-Neveu [7,12] . Ses hypothèses ressemblent à celles du lemme 1.1 quand on fixe dans celui-ci $T = +\infty$.

LEMME 1.2 <u>Soient</u> A <u>un processus croissant prévisible et</u> X <u>une variable aléatoire positive intégrable. Si pour tout temps d'arrêt</u> S <u>on a</u>

$$E[A_\infty - A_S\, I_{\{S>0\}}] \leq E[X\, I_{\{S<+\infty\}}],$$

<u>alors pour toute fonction convexe</u> F <u>de dérivée à droite</u> f

a) $E[F(A_\infty)] \leq E[A_\infty f(X)]$,

b) <u>et si de plus</u> $p = \sup_{x>0} x f(x) / F(x) < +\infty$,

$$E[F(A_\infty)] \leq E[F(pX)] \leq p^p\, E[F(X)] .$$

DEMONSTRATION Rappelons qu'il suffit de montrer que pour tout $\lambda > 0$,

$$E\left[(A_\infty - \lambda)\, I_{\{A_\infty \geq \lambda\}}\right] \leq E\left[X\, I_{\{A_\infty \geq \lambda\}}\right];$$

en effet, en intégrant ensuite en λ, on obtient a), puis b) par la méthode de Dellacherie [6] qui donne la constante optimale.

Soit donc (T_m) une suite croissante de temps d'arrêt tendant vers $T = \inf\{t : A_t > \lambda\}$ telle que $A_{T_m} \leq \lambda$ sur $\{T_m > 0\}$ pour tout m ; pour $k \geq 1$ on pose

$$T_m^k = \begin{cases} T_m & \text{sur } \{T_m \leq k\} \\ +\infty & \text{sur } \{T_m > k\}. \end{cases}$$

Alors

$$E\left[(A_\infty - \lambda)\, I_{\{A_\infty \geq \lambda\}}\right] = \lim_k \; E\left[(A_\infty - \lambda)\, I_{\{T \leq k\}}\right]$$

$$E\left[(A_\infty - \lambda)\, I_{\{T \leq k\}}\right] = \lim_m \; E\left[(A_\infty - \lambda)^+\, I_{\{T_m \leq k\}}\right]$$

$$\begin{aligned} E\left[(A_\infty - \lambda)^+\, I_{\{T_m \leq k\}}\right] &\leq E\left[(A_\infty - A_{T_m} I_{\{T_m > 0\}})\, I_{\{T_m \leq k\}}\right] \\ &\leq E\left[A_\infty - A_{T_m^k} I_{\{T_m^k > 0\}}\right] \\ &\leq E\left[X\, I_{\{T_m^k < +\infty\}}\right] \\ &\leq E\left[X\, I_{\{T_m \leq k\}}\right], \end{aligned}$$

d'où le résultat en passant à la limite en m, puis en k. $\square$

Il est clair que les inégalités du b) du lemme 1.2 sont encore valables si X n'est pas intégrable car les deux membres de droite sont alors infinis. Pour un processus A optionnel (avec $A_{0-} = 0$), la condition

$$E[A_\infty - A_{S-}] \leq E[X\, I_{\{S < +\infty\}}]$$

a les mêmes conséquences que celles indiquées dans le lemme.

Le troisième lemme vient de [1] et de [13] . Ses hypothèses sont semblables à celles du lemme 1.1 quand on fixe dans celui-ci S=0 .

LEMME 1.3 <u>Soient</u> X <u>un processus positif mesurable sur</u> $\Omega\times\mathbb{R}_+$, <u>et</u> B <u>un processus croissant prévisible tels que pour tout temps d'arrêt</u> T <u>fini</u>

$$E[X_T\, I_{\{T>0\}}] \leq a\, E[B_T\, I_{\{T>0\}}] \,.$$

<u>Alors, pour toute fonction concave</u> F <u>et tout temps d'arrêt fini</u> R,

$$E[F(X_R)\, I_{\{R>0\}}] \leq (a+1)\, E[F(B_R)\, I_{\{R>0\}}] .$$

DEMONSTRATION D'après [1] , il suffit de montrer que pour tout $\lambda > 0$,

$$E[(X_R \wedge \lambda)\, I_{\{R>0\}}] \leq (a+1)\, E[(B_R \wedge \lambda)\, I_{\{R>0\}}] .$$

Soit (T_n) une suite de temps d'arrêt finis croissants vers $T = \inf\{t : B_t > \lambda\}$ avec $B_{T_n} \leq \lambda$ sur $\{T_n > 0\}$ et $\bigcup_n \{T_n = T\} = \{B_T \leq \lambda\} \cap \{T < +\infty\}$. On a alors

$$(X_R \wedge \lambda)\, I_{\{R>0\}} \leq \underline{\lim_n}\; X_{T_n \wedge R}\, I_{\{T_n \wedge R > 0\}}$$
$$+ \lambda\, I_{\{R>0\} \cap \{B_R > \lambda\}} \,.$$

$$E[X_{T_n \wedge R}\, I_{\{T_n \wedge R>0\}}] \leq a\, E[B_{T_n \wedge R}\, I_{\{T_n \wedge R>0\}}]$$
$$\leq a\, E[(B_R \wedge \lambda)\, I_{\{R>0\}}] \,.$$

$$\lambda \, \mathbb{P}\{R>0,\ B_R>\lambda\} \leq E\left[(B_R \wedge \lambda)\, I_{\{R>0\}}\right] . \ \square$$

Pour le lemme 1.4 et dans toute la suite, nous utiliserons la notation suivante : si X est un processus, le processus X^* est défini par $X_t^* = \sup_{s \leq t} |X_s|$.

LEMME 1.4 <u>Soient</u> X <u>un processus positif adapté continu à droite et</u> B <u>un processus croissant prévisible tels que pour tout temps d'arrêt</u> T <u>fini</u>

$$E[X_T \mid \mathcal{F}_0] \leq E[B_T \mid \mathcal{F}_0] \quad .$$

<u>Si</u> F <u>est une fonction à croissance lente, il existe une constante</u> c <u>ne dépendant que de</u> F <u>telle que</u>

$$E\left[F(X_\infty^*)\right] \leq c\ E\left[F(B_\infty)\right].$$

DEMONSTRATION Il suffit de montrer comme en [8] l'inégalité suivante : pour tout $c>0$ et tout $d>0$,

$$\mathbb{P}\{X^*_\infty > c\} \leq \frac{1}{c} E[B_\infty \wedge d] + \mathbb{P}\{B_\infty > d\},$$

car en posant ensuite d=c et en intégrant en c, on obtient l'inégalité du lemme (voir [14]). Posons

$$T = \inf\left\{t : B_t > d\right\},$$

$$S = \inf\left\{t : X_t > c\right\},$$

et soit (T_n) une suite de temps d'arrêt finis croissant vers T tels que $B_{T_n} \leq d$ sur $\{T_n > 0\}$. Alors

$$\mathbb{P}\{X_\infty^* > c\} \leq \mathbb{P}\{X_\infty^* > c,\ B_\infty \leq d\} + \mathbb{P}\{B_\infty > d\}.$$

$$\mathbb{P}\{X_\infty^* > c,\ B_\infty \leq d\} = \mathbb{P}\{X_\infty^* > c,\ T=\infty\}$$
$$\leq \lim_n \mathbb{P}\{X_{T_n}^* > c,\ T_n > 0\}.$$

$$\mathbb{P}\{X^*_{T_n} > c,\ T_n > 0\} = \mathbb{P}\{S \leq T_n\ ,\ T_n > 0\}$$
$$\leq c^{-1}\ E[X_{S\wedge T_n}\ I_{\{T_n > 0\}}]$$
$$\leq c^{-1}\ E[B_{S\wedge T_n}\ I_{\{T_n > 0\}}]$$
$$\leq c^{-1}\ E[B_\infty \wedge d]\ . \ \square$$

Chacun des lemmes 1.1 , 1.2 et 1.4 entraîne que, sous les mêmes hypothèses, la conclusion est encore valable si l'on remplace la valeur en $+\infty$ des processus croissants par leur valeur en un temps d'arrêt R : il suffit d'arrêter simultanément en R les processus A, B et X.

2. LES INEGALITES DE BURKHOLDER-DAVIS-GUNDY.

Si M est une martingale locale, les processus $[M,M]$ et $<M,M>$ (ce dernier uniquement si M est localement de carré intégrable) ont été definis dans [11] . On pose par convention $M_0 = M_{0-} = [M,M]_{0-} = <M,M>_{0-} = 0$. On dit que M <u>a ses sauts prévisiblement bornés par</u> D s'il existe un processus croissant prévisible localement borné D tel que $|\Delta M| \leq D$; on peut remarquer que dans ce cas M est localement de carré intégrable. Si S et T sont deux temps d'arret, on note ${}^S M^T$ le processus défini par

$${}^S M^T_t = (\ M_{(S+t)\wedge T} - M_{S-}\ )\ I_{\{S < T\}}\ ,$$

qui est une martingale locale par rapport à la filtration $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{S+t}$. On pose aussi ${}^S M = {}^S M^\infty$; on remarquera que ${}^0 M^T$ ne coïncide pas avec le processus arrêté $M^T_t = M_{T\wedge t}$ car

$$ {}^{0}M_t^T = M_t^T \, I_{\{T>0\}} \, . $$

On vérifie aisément les égalités et inégalités suivantes:

a) $M^*_{T-} - M^*_{S-} \leq ({}^{S}M^{T})^*_{\infty} \leq 2\, M^*_T \, I_{\{S<T\}}$

b) $[{}^{S}M^{T}, {}^{S}M^{T}]_{\infty} = ([M,M]_T - [M,M]_{S-}) \, I_{\{S<T\}} \leq [M,M]_T \, I_{\{S<T\}}$

c) $<{}^{S}M^{T}, {}^{S}M^{T}>_{\infty} = (<M,M>_T - <M,M>_S + \Delta M_S^2) \, I_{\{S<T\}}$

d) $\Delta[M,M] \leq D^2$; $\Delta <M,M> \leq D^2$; $\Delta M^* \leq |\Delta M| \leq D$.

Par exemple, l'inégalité $\Delta <M,M> \leq D^2$ s'obtient en écrivant que si T est un temps d'arrêt totalement inaccessible, $\Delta <M,M>_T = 0$, et si T est un temps d'arrêt prévisible,

$$ \Delta <M,M>_T = E\,[\Delta M_T^2 \mid \mathcal{F}_{T-}] \leq E\,[D_T^2 \mid \mathcal{F}_{T-}] = D_T^2 \, . $$

L'inégalité de Doob nous indique que si M est de carré intégrable

$$ E\,[M^{*\,2}_{\infty}] \leq 4\, E\,[\,[M,M]_{\infty}] = 4\, E\,[<M,M>_{\infty}] \leq 4\, E[M^{*\,2}_{\infty}] $$

et c'est encore vrai si M est localement de carré intégrable. En appliquant cette inégalité à ${}^{S}M^{T}$, qui est bien ici localement de carré intégrable, on obtient

$$ E\,[(M^*_{T-} - M^*_{S-})^2] \leq 4\, E\,[\,[M,M]_T \, I_{\{S<T\}}] $$

$$ \leq 4\, E\,[(\,[M,M]_{T-}^{1/2} + D_T\,)^2 \, I_{\{S<T\}}\,] $$

$$ E\,[(M^*_{T-} - M^*_{S-})^2] \leq 4\, E\,[(\,<M,M>_T + \Delta M_S^2)\, I_{\{S<T\}}\,] $$

$$ \leq 8\, E\,[(\,<M,M>_{T-}^{1/2} + D_T)^2 \, I_{\{S<T\}}] $$

et aussi

$$ E\,[\,[M,M]_{T-} - [M,M]_{S-}\,] \leq E\,[({}^{S}M^{T})^{*\,2}_{\infty}] \leq 2\, E\,[(M^*_{T-} + D_T)^2 \, I_{\{S<T\}}] $$

$$E\left[\langle M,M\rangle_{T-} - \langle M,M\rangle_{S-}\right] \leq E\left[({}^S M^T)^{*\,2}_{\infty} + D_S^2\, I_{\{S<T\}}\right]$$

$$\leq 4\, E\left[(M^*_{T-} + D_T)^2\, I_{\{S<T\}}\right].$$

D'après le lemme 1.1, on obtient alors, pour toute fonction modérée F et toute martingale locale M à sauts prévisiblement bornés par D

$$E\left[F(M^*_\infty)\right] \leq c\, E\left[F(\,[M,M]^{1/2}_\infty + D_\infty)\right]$$

$$E\left[F(M^*_\infty)\right] \leq c\, E\left[F(\,\langle M,M\rangle^{1/2}_\infty + D_\infty)\right]$$

$$E\left[F(\,[M,M]^{1/2}_\infty)\right] \leq c\, E\left[F(M^*_\infty + D_\infty)\right]$$

$$E\left[F(\,\langle M,M\rangle^{1/2}_\infty)\right] \leq c\, E\left[F(M^*_\infty + D_\infty)\right]$$

où la constante c est indépendante de la martingale locale M.

Lorsque M est continue, on peut choisir D=0 et on a ainsi obtenu les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy des martingales continues. Lorsque M admet des sauts, il faut utiliser la décomposition de Davis (introduite en [5] et étendue au cas continu en [10]). On pose pour cela

$$S_t = \sup_{s \leq t} |\Delta M_s|$$

et on décompose M en somme d'une martingale K à variation intégrable, dont l'espérance de la variation est majorée par $4\, E\left[S_\infty\right]$, et d'une martingale L dont les sauts sont prévisiblement bornés par le processus $4\, S_-$ (en posant $S_{0-} = 0$). Comme $S \leq 2\, M^*$ et $S \leq [M,M]^{1/2}$, on déduit facilement des inégalités précédentes appliquées à L avec F(x)=x l'<u>inégalité de Da-</u>

vis

$$c^{-1}\, E[M^*_\infty] \leq E\,[[M,M]^{1/2}_\infty] \leq c\, E[M^*_\infty]\,.$$

En appliquant cette inégalité à ${}^SM$, il vient

$$E\,[M^*_\infty - M^*_{S-}] \leq E[{}^SM^*_\infty] \leq c\, E\,[\,[{}^SM,{}^SM]^{1/2}_\infty]$$

$$\leq c\, E\,[\,[M,M]^{1/2}_\infty\, I_{\{S<+\infty\}}]\,,$$

et inversement

$$E\,[[M,M]^{1/2}_\infty - [M,M]^{1/2}_{S-}] \leq E[(\,[M,M]_\infty - [M,M]_{S-})^{1/2}]$$

$$\leq c\, E[({}^SM)^*_\infty] \leq 2c\, E[\,M^*_\infty\, I_{\{S<+\infty\}}]\,.$$

Il suffit alors d'utiliser le lemme 1.2 pour obtenir le résultat suivant (inégalités de Burkholder-Davis-Gundy) :

THEOREME 2.1 <u>Pour toute fonction convexe modérée</u> F, <u>il existe des constantes</u> c <u>et</u> C <u>telles que pour toute martingale locale</u> M

$$c\, E\,[F(M^*_\infty)] \leq E\,[F(\,[M,M]^{1/2}_\infty)] \leq C\, E\,[F(M^*_\infty)]\,.$$

REMARQUE 2.2 Dans le théorème précédent, l'hypothèse de convexité de F est essentielle : il est démontré en [3] que si F est concave, les inégalités précédentes sont fausses. En outre, on ne peut pas en général remplacer $[M,M]$ par $\langle M,M\rangle$. Nous verrons en 4.2 les relations entre $[M,M]$ et $\langle M,M\rangle$.

REMARQUE 2.3 Chevalier a démontré récemment [4] la jolie inégalité suivante : si l'on pose $S(M)_t = \max\,(M^*_t\,,\,[M,M]^{1/2}_t)$ et $I(M)_t = \min\,(M^*_t\,,\,[M,M]^{1/2}_t)$, il existe pour tout $p\geq 1$ une constante c_p telle que pour toute martingale M ,

$$E\left[\,S(M)^p_\infty\,\right] \leq c_p\, E\left[\,I(M)^p_\infty\,\right].$$

On peut parvenir au même résultat avec les méthodes décrites ci-dessous. On part de l'inégalité déjà rencontrée

$$E\left[\,[M,M]^{1/2}_\infty\,\right] \leq c\, E\left[\,M^*_\infty + D_\infty\,\right]$$

où M a ses sauts prévisiblement bornés par D. On en déduit par application du lemme 1.2.a) que

$$E\left[\,[M,M]_\infty\,\right] \leq c\, E\left[\,[M,M]^{1/2}_\infty\,(M^*_\infty + D_\infty)\right],$$

puis, en posant $X = [M,M]^{1/2}_\infty + D_\infty$, $Y = M^*_\infty + D_\infty$,

$$E[X^2] \leq c\, E[XY],$$

ce qui joint à $E[Y^2] \leq c'\, E[X^2]$ entraîne que

$$E\left[\max(X^2,Y^2)\right] \leq E[X^2] + E[Y^2] \leq c(1+c')\, E[XY]$$

$$= c(1+c')\, E\left[\max(X,Y)\,\min(X,Y)\right]$$

$$\leq c(1+c')(E\left[\max(X^2,Y^2)\right])^{1/2}(E\left[\min(X^2,Y^2)\right])^{1/2}$$

d'où finalement, si M est de carré intégrable, donc $E[X^2] + E[Y^2] < \infty$,

$$E\left[S(M)^2_\infty\right] \leq c\, E\left[(\,I(M)_\infty + D_\infty)^2\right],$$

et c'est encore vrai par localisation lorsque M est localement de carré intégrable. Utilisant cette inégalité pour ${}^R M^T$ et les majorations

$$S(M)_{T-} - S(M)_{R-} \leq S({}^R M^T)_\infty$$

$$I({}^R M^T)_\infty \leq 2\,(\,I(M)_{T-} + D_T\,)\, I_{\{R<T\}}$$

on obtient alors grâce au lemme 1.1

$$E\left[F(S(M)_\infty)\right] \leq c\ E\left[F(I(M)_\infty + D_\infty)\right]$$

pour toute fonction F modérée, en particulier pour F(x)=x. Là encore, la décomposition de Davis M=K+L permet d'avoir

$$E\left[S(M)_\infty\right] \leq c\ E\left[I(M)_\infty\right]$$

pour toute martingale M, et pour terminer le lemme 1.2.b) nous donne

$$E\left[F(S(M)_\infty)\right] \leq c\ E\left[F(I(M)_\infty)\right]$$

pour toute fonction F convexe modérée et toute martingale M.

3. APPLICATIONS AUX SURMARTINGALES ET SOUS-MARTINGALES.

Nous dirons que un processus positif Z est une <u>surmartingale positive</u> s'il se décompose sous la forme $Z = M - A$, où M est une martingale locale (positive) et A un processus croissant prévisible nul en zéro. Cette décomposition est unique, M et A convergent p.s. à l'infini dans $\mathbb{R}_+$, et on a le résultat suivant :

THEOREME 3.1 <u>Soit F une fonction modérée. Il existe une constante</u> c <u>telle que pour toute surmartingale positive</u> Z <u>de décomposition</u> $Z = M - A$ <u>et tout temps d'arrêt</u> R, <u>on ait</u>

$$E\left[F(A_R)\right] \leq c\ E\left[F(Z^*_{R-})\right].$$

DEMONSTRATION Comme Z est optionnel, le processus croissant $B_t = \sup_{s<t} Z^R_s$ (avec $B_0=0$) est adapté et continu à gauche, donc prévisible. Si S et T sont deux temps d'arrêt tels que $S\leq T$ et $M^T - M_0$ soit une martingale uniformément intégrable, a-

lors

$$E\left[A_T^R - A_S^R\right] = E\left[M_T^R - M_S^R + Z_S^R - Z_T^R\right]$$

$$= E\left[Z_S^R - Z_T^R\right] \leq E\left[Z_S^R I_{\{S<T\}}\right]$$

$$\leq E\left[B_T I_{\{S<T\}}\right].$$

Cette inégalité est encore valable dans le cas général, car on peut réduire la martingale locale $M - M_0$ par une suite croissante (T_n) tendant vers l'infini et passer à la limite dans chaque membre. Le résultat est finalement une conséquence directe du lemme 1.1 . □

On obtient par exemple l'inégalité du théorème 3.1 lorsque Z est le potentiel droit (resp. gauche) du processus croissant prévisible (resp. optionnel) A .

Voyons maintenant les sous-martingales. Nous dirons que Z est une <u>sous-martingale locale</u> si Z = M + A, où M est une martingale locale et A un processus croissant prévisible nul en zéro, la décomposition étant évidemment unique. On obtient dans ce cas les inégalités suivantes :

THEOREME 3.2 <u>Soit</u> Z <u>une sous-martingale locale de décomposition</u> Z = M + A.

1) <u>Si</u> F <u>est convexe modérée d'exposant</u> p, <u>on a</u>

$$E\left[F(A_\infty)\right] \leq (2p)^p \; E\left[F(Z^*_\infty)\right]$$

2) <u>Si</u> Z <u>est prévisible et</u> F <u>modérée, il existe</u> c <u>telle que</u>

$$E\left[F(A_\infty)\right] \leq c \; E\left[F(Z^*_\infty)\right]$$

3) <u>Si</u> Z <u>est positive</u>, M <u>est une martingale uniformément intégra-</u>

ble et F *est convexe modérée d'exposant* p, *on a*

$$E\left[F(Z_0 + A_\infty)\right] \leq p^p\, E\left[F(Z_\infty)\right]$$

4) *Si* Z *est positive continue à droite et si* F *est à croissance lente, il existe* c *telle que*

$$E\left[F(Z^*_\infty)\right] \leq c\, E\left[F(Z_0 + A_\infty)\right]$$

5) *Si* Z *est positive, converge p.s. à l'infini dans* $\mathbb{R}_+$, *et si* F *est concave*

$$E\left[F(Z_\infty)\right] \leq 2\, E\left[F(Z_0 + A_\infty)\right] .$$

DEMONSTRATION On peut supposer dans chacun de ces cas que $M-M_0$ est une martingale uniformément intégrable. La démonstration de 1) repose sur le lemme 1.2.b) et l'inégalité

$$E\left[A_\infty - A_S\right] = E\left[M_S - M_\infty + Z_\infty - Z_S\right]$$

$$= E\left[Z_\infty - Z_S\right] \leq 2\, E\left[Z^*_\infty \quad I_{\{S<\infty\}}\right].$$

Le même lemme donne la conclusion de 3) avec cette fois l'inégalité

$$E\left[(A_\infty + Z_0) - (A_S+Z_0)I_{\{S>0\}}\right] = E\left[Z_\infty - Z_S + Z_0 I_{\{S=0\}}\right]$$

$$= E\left[Z_\infty - Z_S\, I_{\{S>0\}}\right] \leq E\left[Z_\infty I_{\{S<+\infty\}}\right]$$

Si Z est prévisible, ce qui veut dire que M est continue, alors Z^* est également prévisible, car pour a>0 , l'ensemble $H=\{Z>a\}$ est prévisible et $\{Z^*>a\}=]\!]D_H,+\infty[\![\cup ([\![0,D_H]\!] \cap H)$. On utilise alors le lemme 1.1 et l'inégalité

$$E\left[A_T - A_S\right] = E\left[M_S - M_T + Z_T - Z_S\right] = E\left[Z_T - Z_S\right]$$

$$\leq 2\, E\left[Z^*_T\, I_{\{S<T\}}\right] .$$

On obtient 4) en utilisant le lemme 1.4 avec X=Z et $B=Z_0 + A$, car si T est fini,

$$E[Z_T | \mathcal{F}_0] = E[M_T | \mathcal{F}_0] + E[A_T | \mathcal{F}_0] = E[M_0+A_T | \mathcal{F}_0] .$$

Enfin 5) s'obtient grâce au lemme 1.3 et à l'égalité

$$E\ Z_T\ I_{\{T>0\}} = E\left[(M_0+A_T)\ I_{\{T>0\}}\right] . \quad \square$$

EXEMPLE 3.3 Considérons comme en [14] une martingale locale continue nulle en zéro M, et soit L son temps local en zéro, c'est-à-dire l'unique processus croissant continu nul en zéro tel que $|M| - L$ soit une martingale locale ($M^+ - \frac{1}{2} L$ est alors aussi une martingale locale). On a dans ce cas

1) Si F est modérée

$$E[F(L_\infty)] \leq c\ E[F(\sup_t M_t)]$$

2) Si F est modérée convexe et si M est une martingale uniformément intégrable

$$E[F(L_\infty)] \leq (2p)^p\ E[F(M^+_\infty)]$$

3) Si F est à croissance lente

$$E[F(M^*_\infty)] \leq c\ E[F(L_\infty)]$$

4) Si F est concave et si M converge p.s. à l'infini

$$E[F(|M_\infty|)] \leq 2\ E[F(L_\infty)] .$$

4. AUTRES APPLICATIONS.

Soit B un processus croissant continu à droite localement intégrable : on rappelle que la projection duale optionnelle de B est le processus croissant adapté localement intégrable continu à droite A caracterisé par la propriété suivante: pour tout processus optionnel positif X, on a

$$E\left[\int_0^\infty X_s\, dA_s\right] = E\left[\int_0^\infty X_s\, dB_s\right].$$

De façon analogue, la projection duale prévisible est le processus croissant prévisible localement intégrable continu à droite caracterisé par la meme égalité avec X prévisible positif.

THEOREME 4.1 Soit B un processus croissant continu à droite localement intégrable de projection duale (optionnelle ou prévisible) A.

1) Si F est convexe d'exposant p, on a

$$E\left[F(A_\infty)\right] \leq p^p\left[E\ F(B_\infty)\right]$$

2) Si F est concave, on a

$$E\left[F(B_\infty)\right] \leq 2\, E\left[F(A_\infty)\right].$$

DEMONSTRATION Pour tout temps d'arrêt T, le processus $X = I_{[\![T,+\infty[\![}$ est optionnel tandis que le processus $Y = I_{]\!]T,+\infty[\![\, \cup ([\![0]\!] \cap [\![T]\!])}$ et Z=1-Y sont prévisibles. Si A est la projection duale optionnelle de B, alors (avec $A_{0-}=B_{0-}=0$)

$$E\left[A_\infty - A_{T-}\right] = E\left[\int_0^\infty X_s\, dA_s\right] = E\left[\int_0^\infty X_s\, dB_s\right]$$

$$= E\left[B_\infty - B_{T-}\right] \leq E\left[B_\infty\, I_{\{T<+\infty\}}\right].$$

Si A est la projection duale prévisible de B,

$$E\left[A_\infty - A_T\, I_{\{T>0\}}\right] = E\left[\int_0^\infty Y_s\, dA_s\right] = E\left[\int_0^\infty Y_s\, dB_s\right]$$

$$= E\left[B_\infty - B_T\, I_{\{T>0\}}\right] \leq E\left[B_\infty\, I_{T<+\infty}\right]$$

Inversement, si A est projection duale (optionnelle ou prévisible) de B,

$$E\left[A_T\, I_{\{T>0\}}\right] = E\left[\int_0^\infty Z_s\, dA_s\right] = E\left[\int_0^\infty Z_s\, dB_s\right]$$

$$= E\left[B_T \, I_{\{T>0\}}\right] .$$

Les lemmes 1.2 et 1.3 permettent de conclure. $\square$

REMARQUE 4.2 Lorsque M est une martingale localement de carré intégrable, le processus $\langle M,M\rangle$ est projection duale prévisible de $[M,M]$ et le théorème précédent détermine les inégalités entre $\langle M,M\rangle$ et $[M,M]$. On ne peut obtenir mieux, comme le montre l'exemple suivant, repris de [8] . On prend pour Ω l'ensemble $[0,1]$ muni de la mesure de Lebesgue sur la tribu des ensembles mesurables au sens de Lebesgue $\mathcal{F}$. On prend pour $\mathcal{F}_t$ la tribu dégénérée si $t<1$, la tribu $\mathcal{F}$ pour $t\geq 1$. Pour tout n, soit M^n la martingale ainsi définie

- pour $t<1$, $M^n_t = 0$
- pour $t\geq 1$,

$$M^n_t(\omega) = (n)^{1/2} \qquad \text{si } 0\leq\omega\leq n^{-1}$$
$$= -(n)^{1/2} \qquad \text{si } n^{-1}\leq\omega\leq 2n^{-1}$$
$$= 0 \qquad \text{si } \omega>2n^{-1}$$

On a alors $\langle M^n,M^n\rangle_\infty = 2$, $[M^n,M^n]_\infty = (M^{n*}_\infty)^2 = n\, I_{[0,2/n]}$. Pour toute fonction F

$$E\, F(\langle M^n,M^n\rangle_\infty) = E\left[F((M^{n*}_\infty)^2)\right] = F(2)$$
$$E\left[F([M^n,M^n]_\infty)\right] = 2\, F(n)/n .$$

On ne peut donc avoir

$$E\left[F(\langle M,M\rangle_\infty)\right] \leq c\, E\left[F([M,M]_\infty)\right]$$

si $\lim_{x\mapsto\infty} F(x)/x = 0$, ni l'inégalité inverse si $\lim_{x\mapsto\infty} F(x)/x = +\infty$.

REMARQUE 4.3 Métivier et Pellaumail [9] ont démontré l'inégalité suivante : si M est une martingale localement de carré intégrable, on a pour tout temps d'arret T

$$E\left[(M^*_{T-})^2\right] \leq 4\ E\left[\,[M,M]_{T-} + \langle M,M\rangle_{T-}\right] .$$

Le lemme 1.3 montre alors que pour toute fonction concave F, on a

$$E\left[F((M^*_{T-})^2)\right] \leq 4\ E\left[F(\,[M,M]_{T-} + \langle M,M\rangle_{T-}\,)\right] .$$

Terminos sur une application du lemme 1.4 :

PROPOSITION 4.4 <u>Soit X un processus continu à droite adapté, et supposons qu'il existe une suite</u> (T_n) <u>de temps d'arrêt croissant vers</u> $+\infty$ <u>telle que pour tout temps d'arrêt fini T,</u> $X_{T_n\wedge T}$ <u>soit intégrable et</u> $E\left[X_{T_n\wedge T}\mid \mathcal{F}_0\right] \geq 0$. <u>Soit A un processus croissant continu à droite prévisible vérifiant</u> $X\leq A$. <u>Si F est à croissance lente, il existe c tel que</u>

$$E\left[F(X^*_\infty)\right] \leq c\ E\left[F(A_\infty)\right].$$

DEMONSTRATION L'inégalité

$$E\left[A_{T_n\wedge T} - X_{T_n\wedge T}\mid \mathcal{F}_0\right] \leq E\left[A_{T_n\wedge T}\mid \mathcal{F}_0\right]$$

donne, grâce au lemme de Fatou

$$E\left[A_T - X_T \mid \mathcal{F}_0\right] \leq E\left[A_T \mid \mathcal{F}_0\right].$$

En appliquant le lemme 1.4, on obtient

$$E\left[F((A-X)^*_\infty)\right] \leq c\ E\left[F(A_\infty)\right] ,$$

et comme $F(x+y) \leq c'\ (\ F(x) + F(y)\ )$, il vient

$$E\left[F(X^*_\infty)\right] \leq c'\ E\left[F((A-X)^*_\infty) + F(A_\infty)\right]$$

$$\leq c'(1+c)\ E\left[F(A_\infty)\right] .$$

Par exemple, si Z est une sous-martingale locale prévisible continue à droite, avec $Z_0 \geq 0$, on obtient pour $p<1$

$$E\left[\sup_t |Z_t|^p\right] \leq c_p\ E\left[(\ \sup_t Z_t\ )^p\right] .$$

Cette inégalité a été démontrée pour une martingale locale continue par Burkholder [2] et dans le cas général par Yor [14].

REFERENCES

[1] D. L. BURKHOLDER. Distribution function inequalities for martingales. Ann. Prob. 1 (1973) p. 19-42

[2] D. L. BURKHOLDER. One-sided maximal functions and H^p. J. Funct. Anal. 18 (1975) p. 429-454

[3] D.L. BURKHOLDER, R. F. GUNDY. Extrapolation and interpolation of quasi-linear operators on martingales. Acta Math. 124 (1970) p. 249-304

[4] L. CHEVALIER. Un nouveau type d'inégalités pour les martingales discrètes. A paraitre in Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete

[5] B. J. DAVIS. On the integrability of the martingale square function. Israel J. of Math. 8 (1970) p. 187-190

[6] C. DELLACHERIE. Majorations de martingales et processus croissants. Sém. de Probabilités XIII , Lect. Notes in Math. Springer-Verlag 1979

[7] A. GARSIA. Martingale inequalities. Seminar notes on recent progress. Benjamin, Reading 1973

[8] E. LENGLART. Relation de domination entre deux processus. Ann. I. H. P. 13 (1977) p. 171-179

[9] M. METIVIER, J. PELLAUMAIL. Une formule de majoration pour martingales. C.R.A.S. Paris Série A, t. 275 (1977) p.685-688

[10] P. A. MEYER. Martingales and stochastic integrals I. Lect. Notes in Math. 284. Springer-Verlag 1972.

[11] P. A. MEYER. Un cours sur les intégrales stochastiques . Sém. de Probabilités X Lecture Notes in Math. 511 Springer-Verlag 1976

[12] J. NEVEU. Martingales à temps discret. Masson 1972

[13] M. PRATELLI. Sur certains espaces de martingales localement de carré intégrable. Sém. de Probabilités X. Lect. Notes in Math. 511. Springer-Verlag 1976

[14] M. YOR. Les inégalités de sous-martingales comme conséquence de la relation de domination. Stochastics - Vol 3 - 1979.

E. LENGLART
Dépt. de Mathématique. Université de Rouen.
76130 MONT SAINT AIGNAN. France

D. LEPINGLE
Dépt. de Mathématique. Université d'Orléans
45046 ORLEANS. France

M. PRATELLI
Scuola Normale Superiore
56100 PISA. Italie