CHANTHA YOEURP

Sur la dérivation des intégrales stochastiques

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 249-253

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__249_0>

SUR LA DERIVATION DES INTEGRALES STOCHASTIQUES

CH. YOEURP

D. Isaacson ([2]) a montré, en 1969, le résultat suivant :

Soient un mouvement brownien (B_t) et un processus continu prévisible (ϕ_t) tel que $\int_0^t \phi_s^2 ds < \infty$, pour tout t. Alors, pour chaque t fixé, le rapport $\dfrac{\int_t^{t+\varepsilon} \phi_s dB_s}{B_{t+\varepsilon}-B_t}$ converge en probabilité vers ϕ_t, quand $\varepsilon \to 0$.

L'objet de cet article est de montrer que l'on ne peut pas, en général, étendre cette propriété à une martingale continue quelconque. Nous remercions ici P.A. Meyer et M. Yor pour leurs discussions fructueuses sur ce travail.

1. Soit $B = (B_t)$ un mouvement brownien par rapport à sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)$, défini sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$, vérifiant les conditions habituelles.

Nous allons construire une martingale continue changée de temps de B, qui ne possède pas la propriété de "dérivation".

Pour chaque $n \geq 1$, définissons :

$$R_n = \mathrm{Inf}\{t > \tfrac{1}{n} \,/\, |B_t| = \tfrac{1}{n}\}$$

$$= \infty \text{ si } \{\cdot\} = \emptyset$$

On a le lemme suivant :

<u>Lemme 1</u> :

(R_n) *est une suite de t.a. tendant vers* 0 *en probabilité.*

<u>Démonstration</u> :

Soit $D_{1/n} = \mathrm{Inf}\{t > \tfrac{1}{n} \,/\, B_t = 0\}$

$$= \infty \text{ si } \{\cdot\} = \emptyset$$

Puisque 0 est un point d'accumulation des zéros de B, $(D_{1/n})$ est une suite de t.a. tendant p.s. vers 0. Comme on a $R_n \leq D_{1/n}$ sur l'ensemble $\{|B_{\frac{1}{n}}| \geq \frac{1}{n}\}$ dont la probabilité tend vers 1, on en conclut que R_n converge vers 0 en probabilité. ◻

Quitte à extraire une sous suite, on peut supposer que (R_n) converge vers 0 p.s.. Rendons cette suite décroissante, en posant :

$$S_n = R_1 \wedge R_2 \wedge \ldots \wedge R_n \wedge 1.$$

La prochaine étape est la construction d'un changement de temps continu (τ_t) tel que $\tau_{\frac{1}{n}} = S_n$. Pour cela, nous avons besoin d'une extension immédiate d'un lemme d'Emery ([1]) :

<u>Lemme 2</u> :

<u>Soient</u> a <u>et</u> b <u>deux réels tels que</u> $a < b$, <u>et</u> S <u>et</u> S' <u>deux t.a. prévisibles tels que</u> $S \leq S'$.

<u>Il existe un processus continu adpaté strictement croissant</u> (A_t) <u>tel que</u> $A_S = a$, et sur $\{S < S'\}$, $A_{S'} = b$.

On applique le lemme 2 à la suite de t.a. prévisibles (car ce sont des t.a. du mouvement brownien) (S_n) construite précédemment :

pour $n \geq 1$, il existe (A^n_t), processus continu adapté strictement croissant vérifiant $A^n_{S_{n+1}} = \frac{1}{n+1}$, et sur $\{S_{n+1} < S_n\}$, $A^n_{S_n} = \frac{1}{n}$.

Posons : $A_t = \sum_{n\geq 1} A^n_t \, I_{[\![S_{n+1},S_n[\![} + I_{[\![S_1,\infty[\![}$

C'est un processus adapté strictement croissant. Son inverse à droite (τ_t) définit donc un changement de temps continu tel que $\tau_{1/n} = S_n$. La formule de changement de variables nous permet d'écrire :

$$\frac{\int_0^{1/n} B_{\tau_s} dB_{\tau_s}}{B_{\tau_{1/n}}} = \frac{\int_0^{\tau_{1/n}} B_s dB_s}{B_{\tau_{1/n}}} = \frac{1}{2}\left(B_{\tau_{1/n}} - \frac{\tau_{1/n}}{B_{\tau_{1/n}}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(B_{S_n} - \frac{S_n}{B_{S_n}}\right)$$

Au second membre de la dernière égalité, B_{S_n} converge vers 0 p.s., mais $\frac{S_n}{B_{S_n}}$ ne converge pas vers 0 en probabilité, d'après les définitions de S_n et de R_n.

On en conclut donc que la martingale continue $(B_{\tau_t})_{t\in[0,1]}$ répond à la question.

Remarque 1 :

Etant donnés un mouvement brownien (B_t) et un processus prévisible continu (ϕ_t) tel que $\int_0^t \phi_s^2 ds < \infty$, pour tout t, est-ce-que $M_t \equiv \int_0^t \phi_s dB_s$ est l'unique martingale, à une constante additive près, telle que la limite en probabilité, quand $\varepsilon \to 0$, de $\frac{M_{t+\varepsilon}-M_t}{B_{t+\varepsilon}-B_t}$ soit égale à ϕ_t, pour tout t ?

La réponse à cette question est affirmative, si on travaille relativement à la filtration naturelle de (B_t). En effet, toute martingale peut s'écrire comme intégrale stochastique par rapport à (B_t), à une constante additive près.

2. On étudie ici les "dérivées partielles" des intégrales stochastiques par rapport à un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^n$. Pour ne pas compliquer les choses, on fait les calculs dans $\mathbb{R}^2$ seulement, mais les résultats s'étendent au cas où n est quelconque.

Soit $Z = (X,Y)$ un $(\mathcal{F}_t)$ mouvement brownien dans $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire : $X = (X_t)$ et $Y = (Y_t)$ sont deux $(\mathcal{F}_t)$ mouvements browniens réels indépendants, et soit $H = (\phi,\psi)$ un processus $(\mathcal{F}_t)$ prévisible continu tel que $\int_0^t (\phi_s^2 + \psi_s^2) ds < \infty$, pour tout t. Notons M l'intégrale stochastique de H par rapport à Z : $M_t = \int_0^t \phi_s dX_s + \int_0^t \psi_s dY_s$. Désignons par R et S deux v.a. gaussiennes, centrées, réduites, indépendantes entre elles, et indépendantes de (ϕ,ψ).

Posons :

$$\Delta_\varepsilon^1 = \frac{M_{t+\varepsilon}-M_t}{X_{t+\varepsilon}-X_t} = \frac{\int_t^{t+\varepsilon} \phi_s dX_s}{X_{t+\varepsilon}-X_t} + \frac{\int_t^{t+\varepsilon} \psi_s dY_s}{X_{t+\varepsilon}-X_t}$$

$$\Delta_\varepsilon^2 = \frac{M_{t+\varepsilon}-M_t}{Y_{t+\varepsilon}-Y_t} = \frac{\int_t^{t+\varepsilon} \phi_s dX_s}{Y_{t+\varepsilon}-Y_t} + \frac{\int_t^{t+\varepsilon} \psi_s dY_s}{Y_{t+\varepsilon}-Y_t}$$

$$D^1 = \phi_t + \psi_t \frac{S}{R}$$

$$D^2 = \phi_t \frac{R}{S} + \psi_t$$

On a le résultat suivant qui avait été aussi obtenu par Yor, mais il ne l'a pas publié.

Proposition 1 :

Le couple $(\Delta_\varepsilon^1,\Delta_\varepsilon^2)$ converge en loi vers (D^1,D^2), quand ε tend vers 0.

Démonstration :

A cette fin, on utilise les transformées de Fourier. On va montrer que :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E(e^{i\lambda\Delta_\varepsilon^1+i\mu\Delta_\varepsilon^2}) = E(e^{i\lambda D^1+i\mu D^2})$$

pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. On peut écrire :

$$\Delta_\varepsilon^1 = \left[\frac{\int_t^{t+\varepsilon}(\phi_s-\phi_t)dX_s}{X_{t+\varepsilon}-X_t} + \frac{\int_t^{t+\varepsilon}(\psi_s-\psi_t)dY_s}{X_{t+\varepsilon}-X_t}\right] + \left[\phi_t+\psi_t\,\frac{Y_{t+\varepsilon}-Y_t}{X_{t+\varepsilon}-X_t}\right] \overset{\text{Déf.}}{=} a_\varepsilon^1 + b_\varepsilon^1$$

$$\Delta_\varepsilon^2 = \left[\frac{\int_t^{t+\varepsilon}(\phi_s-\phi_t)dX_s}{Y_{t+\varepsilon}-Y_t} + \frac{\int_t^{t+\varepsilon}(\psi_s-\psi_t)dY_s}{Y_{t+\varepsilon}-Y_t}\right] + \left[\phi_t\,\frac{X_{t+\varepsilon}-X_t}{Y_{t+\varepsilon}-Y_t} + \psi_t\right] \overset{\text{Déf.}}{=} a_\varepsilon^2 + b_\varepsilon^2$$

Puisque le couple $(X_{t+\varepsilon}-X_t,\ Y_{t+\varepsilon}-Y_t)$ est indépendant de $\mathcal{F}_t$ il est facile de voir que $(b_\varepsilon^1,b_\varepsilon^2)$ et (D^1,D^2) ont même loi. On a donc pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$:

$$E(e^{i\lambda\Delta_\varepsilon^1+i\mu\Delta_\varepsilon^2}) - E(e^{i\lambda D^1+i\mu D^2}) = E(e^{i\lambda a_\varepsilon^1+i\mu a_\varepsilon^2+i\lambda b_\varepsilon^1+i\mu b_\varepsilon^2}) - E(e^{i\lambda b_\varepsilon^1+i\mu b_\varepsilon^2})$$

$$= E(e^{i\lambda b_\varepsilon^1+i\mu b_\varepsilon^2}(e^{i\lambda a_\varepsilon^1+i\mu a_\varepsilon^2} - 1))$$

D'où :

$$|E(e^{i\lambda\Delta_\varepsilon^1+i\mu\Delta_\varepsilon^2}) - E(e^{i\lambda D^1+i\mu D^2})| \le E(|e^{i\lambda a_\varepsilon^1+i\mu a_\varepsilon^2} - 1|)$$

D'autre part, en reprenant le même raisonnement que celui de Isaacson [2], on voit sans difficulté que a_ε^1 et a_ε^2 tendent vers 0 en probabilité, quand $\varepsilon\to 0$. Il en résulte que le second membre de l'inégalité ci-dessus converge vers 0, quand $\varepsilon\to 0$. D'où le résultat désiré. □

Remarque 2 :

Si l'on fait l'hypothèse que, pour t fixé :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}E\left(\int_t^{t+\varepsilon}(\phi_s-\phi_t)^2ds\right) = 0$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}E\left(\int_t^{t+\varepsilon}(\psi_s-\psi_t)^2ds\right) = 0$$

les mêmes calculs que ceux de Żabczyk [3] montrent que a_ε^1 et a_ε^2 convergent vers 0 dans L^p, pour tout $p\in]0,\frac{2}{3}[$. □

On peut se demander si à partir du "vecteur gradient" (D^1,D^2), on peut remonter à (ϕ,ψ), ce qui était évidemment vrai dans le cas uni-dimensionnel. Ici, il se trouve qu'il y a une perte d'information dans les "dérivées partielles" et qu'on ne peut pas obtenir la loi de (ϕ,ψ) à partir de celle de (D^1,D^2). En effet, $D^2 = \frac{R}{S} D^1$ et le système d'équations :

$$\begin{cases} \phi_t + \psi_t \frac{S}{R} = D^1 \\ \phi_t \frac{R}{S} + \psi_t = D^2 \end{cases}$$

est "indéterminé".

BIBLIOGRAPHIE.

[1] M. EMERY : Une propriété des temps prévisibles, dans ce volume.

[2] D. ISAACSON : Stochastic integrals and derivatives, Ann. Math. Statistic, 40 (1969), p. 1610-1616.

[3] J. ŻABCZYK : Remarks on stochastic derivation, Bulletin de l'Académie polonaise des sciences, Série des sciences math., astr. et phys., vol XXI, N° 3, 1973.