SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN JACOD
JEAN MÉMIN

Sur la convergence des semimartingales vers un processus à accroissements indépendants

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 227-248
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__227_0>

SUR LA CONVERGENCE DES SEMIMARTINGALES VERS UN PROCESSUS A ACCROISSEMENTS INDEPENDANTS

J. JACOD et J. MEMIN

1 - INTRODUCTION

Récemment KABANOV, LIPTZER et SHIRIAYEV [4] ont présenté une application remarquable de la formule exponentielle de Doléans-Dade à l'étude des limites de processus ponctuels: pour chaque $n \in \overline{\mathbb{N}}$ on considère un processus ponctuel N^n de compensateur prévisible A^n sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega^n, \underline{\underline{F}}^n, \underline{F}^n, P^n)$. Si A^∞ est <u>déterministe</u> et si

(1.1) $\qquad A_t^n \xrightarrow{\mathcal{L}} A_t^\infty \qquad$ ($\xrightarrow{\mathcal{L}}$ signifie: converge en loi)

(1.2) $\qquad \sum_{s \leq t} (\Delta A_s^n)^2 \xrightarrow{\mathcal{L}} \sum_{s \leq t} (\Delta A_s^\infty)^2$

pour tout $t \geq 0$, alors $(N_{t_1}^n, \ldots, N_{t_m}^n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (N_{t_1}^\infty, \ldots, N_{t_m}^\infty)$ pour tous $t_1 < t_2 < \ldots < t_m$. Lorsqu'en plus le processus A^∞ est <u>continu</u>, la condition (1.1) est suffisante (dans ce cas, le résultat était déjà connu: voir BROWN [1]).

L'article de Kabanov, Liptzer et Shiriayev nous semble intéressant surtout pour deux raisons: d'une part par l'utilisation astucieuse des exponentielles de Doléans-Dade $\mathcal{E}(A^n)$; d'autre part par l'étude de la convergence des $\mathcal{E}(A^n)$ vers $\mathcal{E}(A^\infty)$: contrairement à ce qu'on pourrait penser a-priori, ce dernier point est assez délicat, et il faut travailler un peu pour obtenir que $\mathcal{E}(A^n)_t \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{E}(A^\infty)_t$ à partir de (1.1) et (1.2).

Nous nous proposons d'exposer ici la méthode de [4], dans un cadre plus général, celui de la convergence d'une suite de semimartingales X^n vers un processus à accroissements indépendants X^∞ : noter que ci-dessus, N^∞ est un processus à accroissements indépendants puisque A^∞ est déterministe.

Le théorème "général" de convergence des lois fini-dimensionnelles de X^n vers X^∞ est énoncé au §2 et démontré au §3: ce théorème s'exprime en termes de convergence en loi de certaines exponentielles de Doléans-

Dade de processus à variation finie. Nous indiquons aussi, sans démonstration, comment on peut renforcer légèrement les conditions de façon à obtenir la convergence des lois des X^n vers la loi de X^∞, pour la topologie de Skorokhod.

Dans le §4 nous étudions en détails des conditions assurant que $\mathcal{E}(A^n)$ converge vers $\mathcal{E}(A^\infty)$ lorsque A^n et A^∞ sont des processus à variation finie: il s'agit d'une étude purement déterministe. Nous montrons notamment que l'application

$$a \rightsquigarrow \mathcal{E}(a) \quad \text{définie par} \quad \mathcal{E}(a)_t = e^{a_t} \prod_{0<s\leq t} (1+\Delta a_s) e^{-\Delta a_s}$$

sur l'espace des fonctions croissantes continues à droite positives est continue pour la restriction à cet espace de la topologie de Skorokhod.

Enfin, les conditions assurant la validité du théorème "général" semblant a-priori difficiles à vérifier, nous consacrons le §5 à divers exemples pour lesquels les conditions ont une allure plus "concrète", mais qui néanmoins restent suffisemment généraux pour couvrir de nombreuses applications.

2 - LE THEOREME DE CONVERGENCE

Pour toutes les notions sur les martingales, semimartingales et mesures aléatoires, nous renvoyons à [2] et [7]. Rappelons cependant le concept de caractéristiques locales d'une semimartingale, concept qui occupe une place centrale dans ce qui suit.

Soit $X=(X^i)_{i\leq d}$ une semimartingale d-dimensionnelle sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega,\underline{\underline{F}},\underline{F},P)$, et supposons que $X_0=0$. On associe d'abord à X la mesure aléatoire de ses sauts, définie sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$ par

$$\mu(ds,dx) = \sum_{t>0} I_{\{\Delta X_t \neq 0\}}\, \varepsilon_{(t,\Delta X_t)}(ds,dx), \tag{2.1}$$

où ε_a est la mesure de Dirac au point a. Soit

$$\check{X}_t = \sum_{s\leq t} \Delta X_s\, I_{\{|\Delta X_s|>1\}}. \tag{2.2}$$

Le triplet (B,C,ν) des caractéristiques locales de X est alors défini comme suit:

- $B=(B^i)_{i\leq d}$ est l'unique processus prévisible à variation finie nul en 0 tel que $X-\check{X}-B$ soit une martingale locale d-dimension--nelle;

- $C=(C^{ij})_{i,j\leq d}$, avec $C^{ij} = \langle (X^i)^c,(X^j)^c\rangle$;
- ν est la mesure aléatoire sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$, projection prévisible duale de μ.

Si W est une fonction sur $\Omega\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$, on note $W*\mu$ le processus $W*\mu_t = \int_{[0,t]\times\mathbb{R}^d}\mu(ds,dx)W(s,x)$, quand cette expression a un sens. On définit de même $W*\nu$. Si W est mesurable par rapport à $\underline{\underline{P}}\otimes\underline{\underline{\mathbb{R}}}^d$ ($\underline{\underline{P}}$ = tribu prévisible sur $\Omega\times\mathbb{R}_+$), on note $W*(\mu-\nu)$ l'intégrale stochastique, lorsqu'elle existe, de W par rapport à la mesure aléatoire-martingale $\mu-\nu$: c'est l'unique martingale somme compensée de sauts telle que

$$\Delta[W*(\mu-\nu)]_s = \int\mu(\{s\}\times dx)W(s,x) - \int\nu(\{s\}\times dx)W(s,x) .$$

Avec ces notations, remarquons qu'on a:

$$\check{X} = (xI_{\{|x|>1\}})*\mu \quad \text{(par abus de notation, on note } f(x) \text{ la fonction: } (\omega,t,x)\rightsquigarrow f(x) \text{ sur } \Omega\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d) \tag{2.3}$$

$$X = X^c + (xI_{\{|x|\leq 1\}})*(\mu-\nu) + B + \check{X} \tag{2.4}$$

$$(|x|^2\wedge 1)*\nu \text{ est un processus croissant prévisible fini} \tag{2.5}$$

$$\Delta B_s = \int\nu(\{s\}\times dx)\, x\, I_{\{|x|\leq 1\}}. \tag{2.6}$$

Terminons enfin ces préliminaires en rappelant que l'exponentielle $\mathcal{E}(Y)$ de la semimartingale réelle Y nulle en 0 est définie par

$$\mathcal{E}(Y)_t = \exp(Y_t - \tfrac{1}{2}\langle Y^c,Y^c\rangle_t)\prod_{s\leq t}[(1+\Delta Y_s)e^{-\Delta Y_s}]. \tag{2.7}$$

Après ces rappels, nous pouvons aborder le problème qui nous occupera dans le reste de cet article. Pour chaque $n\in\overline{\mathbb{N}}$ on considère un espace probabilisé filtré $(\Omega^n,\underline{\underline{F}}^n,\underline{F}^n,P^n)$ muni d'une semimartingale d-dimensionnelle $X^n=(X^{n,i})_{i\leq d}$ telle que $X^n_0=0$, et on note (B^n,C^n,ν^n) les caractéristiques locales de X^n. On introduit les processus suivants:

$$F^n = \sum_{i\leq d}[C^{n,ii} + V(B^{n,i})] + (|x|^2\wedge 1)*\nu^n \tag{2.8}$$

$$A^n(\lambda,b) = \frac{1}{2}\sum_{i,j\leq d}\lambda^i\lambda^j C^{n,ij} + \sum_{i\leq d}\lambda^i B^{n,i} + (e^{\lambda x}-1-\lambda x I_{\{|x|\leq 1\}})I_{\{|x|\leq b\}}*\nu^n ; \tag{2.9}$$

dans ces formules, $V(B^{n,i})$ désigne le processus variation de $B^{n,i}$, on a $b\in[1,\infty[$, $\lambda=(\lambda^i)_{i\leq d}\in\mathbb{R}^d$, et $\lambda x = \sum_{i\leq d}\lambda^i x^i$ si $x=(x^i)_{i\leq d}$.

Ces processus sont $\underline{F}^n$-prévisibles réels, F^n est croissant et $A^n(\lambda,b)$ est à variation finie.

On considère aussi une partie <u>dense</u> D de $\mathbb{R}_+$, fixée une fois pour toutes.

(2.10) HYPOTHESE: $(B^\infty,C^\infty,\nu^\infty)$ <u>est déterministe</u>, ce qui équivaut à dire que X^∞ est un processus à accroissements indépendants sur l'espace $(\Omega^\infty,\underline{\underline{F}}^\infty,\underline{F}^\infty,P^\infty)$. Dans ce cas, F^∞ et $A^\infty(\lambda,b)$ sont déterministes.

(2.11) HYPOTHESE: <u>Pour tous</u> $t>0$, $\varepsilon>0$, <u>on a</u>

$$\lim_{b\uparrow\infty} \limsup_{n\uparrow\infty} P^n[I_{\{|x|>b\}}*\nu^n_t \geq \varepsilon] = 0 .$$

(2.12) HYPOTHESE: <u>Pour tout</u> $t>0$ <u>il existe</u> $K\in\mathbb{R}_+$ <u>avec</u>

$$\lim_{n\uparrow\infty} P^n[F^n_t \geq K] = 0 .$$

(2.13) HYPOTHESE: <u>Il existe une suite</u> (b_q) <u>de réels croissant vers</u> $+\infty$, <u>telle que pour tous</u> $q\in\mathbb{N}$, $\lambda\in\mathbb{R}^d$, $t\in D$, <u>on ait</u>:

$$\mathcal{E}(A^n(\lambda,b_q))_t \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{E}(A^\infty(\lambda,b_q))_t .$$

Nous nous proposons de montrer le théorème suivant:

(2.14) THEOREME: <u>Sous les hypothèses (2.10), (2.11), (2.12) et (2.13), pour tous</u> $t_1,..,t_m\in D$ <u>on a</u>: $(X^n_{t_1},\dots,X^n_{t_m}) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X^\infty_{t_1},\dots,X^\infty_{t_m})$.

L'un des avantages des hypothèses précédentes est qu'elles s'expriment entièrement en fonction des caractéristiques locales des X^n. Cependant il est intéressant de donner une condition équivalente à (2.11), dans le lemme suivant qui sera démontré au §3:

(2.15) LEMME: <u>On a (2.11) si et seulement si pour tout</u> $t>0$, <u>on a</u>

$$\lim_{b\uparrow\infty} \limsup_{n\uparrow\infty} P^n[\exists s\leq t \text{ avec } |\Delta X^n_s|>b] = 0 .$$

Si les hypothèses (2.10), (2.11) et (2.12) sont faciles à comprendre et en général à vérifier, il n'en est pas du tout de même de (2.13): nous verrons au §5 diverses conditions impliquant (2.13).

Introduisons enfin une dernière hypothèse.

(2.16) HYPOTHESE: <u>Pour tout</u> $n \in \overline{\mathbb{N}}$ <u>il existe un processus croissant fini</u> $\underline{F}^n$<u>-prévisible</u> G^n <u>sur</u> $(\Omega^n, \underline{\underline{F}}^n, \underline{F}^n, P^n)$ <u>tel que</u>

(i) $G^n - F^n$ <u>est croissant</u>;

(ii) G^∞ <u>est déterministe</u>;

(iii) <u>on a</u>: $t \in D \Longrightarrow G_t^n \xrightarrow{\mathcal{L}} G_t^\infty$;

(iv) <u>ou bien</u> G^∞ <u>est continu, ou bien</u>:

$$t \in D \Longrightarrow \sum_{s \leq t} (\Delta G_s^n)^2 \xrightarrow{\mathcal{L}} \sum_{s \leq t} (\Delta G_s^\infty)^2$$

(on peut montrer d'ailleurs que si on a (iii), la seconde condition de (iv) est impliquée par la première).

Remarquons que (2.16) $\Longrightarrow$ (2.12): prendre $K = G_t^\infty + 1$ par exemple. Dans les divers exemples traités au §5, nous aurons non seulement (2.12), mais aussi (2.16).

On peut alors montrer le théorème suivant:

(2.17) THEOREME: <u>Sous les hypothèses (2.10), (2.11), (2.13) et (2.16), les processus</u> X^n <u>convergent en loi vers le processus</u> X^∞ .

En fait, compte tenu de (2.14), ce théorème découle de ce que (2.11) et (2.16) impliquent la relative compacité de la suite de lois $\mathcal{L}(X^n)$, pour la topologie étroite des mesures associée à la topologie de Skorokhod sur l'espace $D([0,\infty[;\mathbb{R}^d)$: nous renvoyons à [3], où la relative compacité est montrée sous une condition bien plus générale.

<u>3 - DEMONSTRATIONS DE (2.14) et (2.15)</u>

Quitte à prendre le produit tensoriel des espaces filtrés $(\Omega^n, \underline{\underline{F}}^n, \underline{F}^n, P^n)$, on peut supposer que tous les processus $(X^n)_{n \in \overline{\mathbb{N}}}$ sont définis sur le même espace $(\Omega, \underline{\underline{F}}, \underline{F}, P)$, espace sur lequel ils sont indépendants. Dans (2.13), les convergences sont alors des convergences en probabilité, puisque les limites sont déterministes.

<u>§a - Le cas borné</u>. Nous allons d'abord montrer (2.14) lorsque les hypothèses (2.11) et (2.12) sont remplacées par les hypotheses plus fortes suivantes:

(3.1) Il existe $b \in [1,\infty[$ tel que $|\Delta X^n| \leq b$ pour tout $n \in \overline{\mathbb{N}}$, ce qui équivaut à: $I_{\{|x|>b\}} * \nu_\infty^n = 0$ pour tout $n \in \overline{\mathbb{N}}$.

(3.2) Il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que $F^n_\infty \leq K$ pour tout $n \in \overline{\mathbb{N}}$.

Commençons par un calcul préliminaire. Soit X une semimartingale d-dimensionnelle nulle en 0, à sauts bornés, de caractéristiques locales (B,C,ν), la mesure associée à ses sauts par (2.1) étant notée μ. Soit $H=(H^i)_{i\leq d}$ un processus prévisible borné. On notera comme d'habitude $H\cdot X$ ($=\sum_{i\leq d} H^i\cdot X^i$) l'intégrale stochastique de H par rapport à X.

La semimartingale $Y=e^{H\cdot X}$ est localement bornée, donc spéciale. Une application simple de la formule d'Ito et des représentations (2.3) et (2.4) permet d'obtenir la décomposition canonique de Y :

$$(3.3)\qquad Y = 1 + Y_-\cdot M + Y_-\cdot A,$$

avec

$$(3.4)\qquad \begin{cases} M = H\cdot X^c + (e^{Hx}-1)*(\mu-\nu) \\ A = \frac{1}{2}C(H) + H\cdot B + (e^{Hx}-1-Hx\,I_{\{|x|\leq 1\}})*\nu, \end{cases}$$

où $C(H)=\sum_{i,j\leq d}(H^iH^j)\cdot C^{ij}$. On a d'après (3.4) et (2.6):

$$\begin{aligned} \Delta A_s &= \sum_{i\leq d} H^i_s\,\Delta B^i_s + \int \nu(\{s\}\times dx)[e^{Hx}-1-Hx\,I_{\{|x|\leq 1\}}] \\ (3.5)\qquad &= \int \nu(\{s\}\times dx)(e^{Hx}-1). \end{aligned}$$

Comme $\nu(\{s\}\times\mathbb{R}^d)\leq 1$, il est facile d'en déduire que $1+\Delta A>0$ identiquement. La propriété caractéristique de l'exponentielle (2.7), et la relation (3.3), montrent que $Y=\mathcal{E}(M+A)$. Mais alors, comme $1+\Delta A>0$, on sait d'après [6] que

$$(3.6)\qquad e^{H\cdot X} = L\,\mathcal{E}(A), \quad \text{avec } L=\mathcal{E}\left(\frac{1}{1+\Delta A}\cdot M\right) \text{ est une martingale locale.}$$

Voici encore un lemme préliminaire, qui étend un résultat de [6]:

(3.7) LEMME: Soit $\mathcal{N}$ une ensemble de martingales localement de carré intégrable, nulles en 0. Si $\sup_{N\in\mathcal{N}}\langle N,N\rangle_\infty \leq K'$, où $K'\in\mathbb{R}_+$, la famille de variables $(\mathcal{E}(N)_t : t\geq 0,\ N\in\mathcal{N})$ est uniformément intégrable.

Démonstration. Soit $M = 2N+[N,N]-\langle N,N\rangle$. On a, d'après la formule de Yor et la formule de [6] déjà utilisée ci-dessus:

$$\mathcal{E}(N)^2 = \mathcal{E}(2N+[N,N]) = \mathcal{E}(M+\langle N,N\rangle) = \mathcal{E}\left(\frac{1}{1+\Delta\langle N,N\rangle}\cdot M\right)\mathcal{E}(\langle N,N\rangle).$$

Il est facile de vérifier que $\frac{\Delta M}{1+\Delta\langle N,N\rangle} > -1$, donc $Z^N = \mathcal{E}(\frac{1}{1+\Delta\langle N,N\rangle}\bullet M)$ est une martingale locale positive, donc une surmartingale positive. Par ailleurs $|\mathcal{E}(\langle N,N\rangle)| \leq \exp\langle N,N\rangle$, et on obtient la majoration

$$E[\mathcal{E}(N)_t^2] \leq E(Z_t^N e^{K'}) \leq e^{K'},$$

d'où le résultat. ∎

Soit $t_0 = 0$ et $t_1,..,t_m \in D$ avec $0 < t_1 < \ldots < t_m$. Soit $t = t_m$. Soit enfin $\lambda_1,\ldots,\lambda_m \in \mathbb{R}^d$ et

(3.8) $$H = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i I_{]\!]0,t_i]\!]}$$

qui est déterministe et borné par $a = m\sup_{(i)}|\lambda_i|$. On a

(3.9) $$\exp(\sum_{i\leq m} \lambda_i X_{t_i}^n) = e^{H\bullet X_t}.$$

On associe alors aux processus X^n les processus $C^n(H)$, M^n, A^n, L^n, définis par (3.4) et (3.6).

(3.10) LEMME: (i) Il existe une constante K' telle que $|\mathcal{E}(A^n)_s| \leq K'$ pour tous $n \in \overline{\mathbb{N}}$, $s \geq 0$.

(ii) La famille de variables $(L_s^n : s \geq 0, n \in \overline{\mathbb{N}})$ est uniformément intégrable.

Démonstration. (i) Comme $|H| \leq a$ il est facile de trouver $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $|e^{Hx} - 1 - Hx I_{\{|x|\leq 1\}}| \leq c(|x|^2 \wedge 1)$ si $|x| \leq b$. D'après (3.1), (3.2) et (3.4) il existe alors $K' \in \mathbb{R}_+$ tel que $V(A^n)_\infty \leq \operatorname{Log} K'$ et (i) découle de ce que

$$|\mathcal{E}(A^n)_s| \leq \mathcal{E}(V(A^n))_s \leq \exp[V(A^n)_s] \leq K'.$$

(ii) Etant donnée la définition (3.4), on a facilement la majoration

$$\langle M^n,M^n\rangle_\infty \leq C^n(H)_\infty + (e^{Hx}-1)^2 * \nu_\infty^n .$$

Comme en (i), on peut trouver $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $(e^{Hx}-1)^2 \leq c(|x|^2 \wedge 1)$ si $|x| \leq b$, donc en utilisant encore (3.1) et (3.2) on peut trouver $K' \in \mathbb{R}_+$ tel que $\langle M^n,M^n\rangle_\infty \leq K'$. Par ailleurs avec le fait que $|H| \leq a$ et (3.1), ainsi que (3.5), on voit que $1 + \Delta A^n \geq e^{-ab}$. Donc si $N^n = (1+\Delta A^n)^{-1}\bullet M^n$ on a $\langle N^n,N^n\rangle_\infty \leq e^{ab}K'$ et le résultat découle du lemme (3.7). ∎

(3.11) LEMME: Avec les hypothèses précédentes, on a $(X_{t_1}^n,\ldots,X_{t_m}^n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X_{t_1}^\infty,\ldots,X_{t_m}^\infty)$.

Démonstration. D'après (3.6) et (3.10), les variables $\exp(H\cdot X_t^n)$ sont intégrables pour tout H de la forme (3.8). Etant donné (3.9), il nous suffit donc de montrer que pour tout H de la forme (3.8), on a

$$E[\exp(H\cdot X_t^n)] \longrightarrow E[\exp(H\cdot X_t^\infty)].$$

Le lemme (3.10) implique que les processus L^n sont des martingales, donc $E(L_t^n)=1$. D'après (3.6) et le fait que $\mathcal{E}(A^\infty)_t$ est déterministe, il vient alors

$$\begin{aligned} E[\exp(H\cdot X_t^n)] - E[\exp(H\cdot X_t^\infty)] &= E[L_t^n\,\mathcal{E}(A^n)_t] - E(L_t^\infty)\,\mathcal{E}(A^\infty)_t \\ &= E[L_t^n(\mathcal{E}(A^n)_t - \mathcal{E}(A^\infty)_t)]. \end{aligned}$$

Une nouvelle application du lemme (3.10) montre que la suite de variables $(L_t^n(\mathcal{E}(A^n)_t - \mathcal{E}(A^\infty)_t) : n\in\mathbb{N})$ est uniformément intégrable. Pour obtenir le résultat il suffit donc de montrer que $\mathcal{E}(A^n)_t$ converge en probabilité vers $\mathcal{E}(A^\infty)_t$. Mais d'après (2.9) et (3.4), on a

$$A_s^n = \sum_{i=1}^{m} [A^n(\tilde{\lambda}_i,b_q)_{s\wedge t_i} - A^n(\tilde{\lambda}_i,b_q)_{s\wedge t_{i-1}}]$$

dès que $b_q \geq b$, et en posant $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i + \lambda_{i+1} + \dots + \lambda_m$. On en déduit que

$$\mathcal{E}(A^n)_t = \prod_{i=1}^{m} \frac{\mathcal{E}(A^n(\tilde{\lambda}_i,b_q))_{t_i}}{\mathcal{E}(A^n(\tilde{\lambda}_i,b_q))_{t_{i-1}}}$$

et le résultat découle de l'hypothèse (2.13). ∎

§b - Le cas général. Commençons par démontrer le lemme (2.15). Soit $\tau_b^n = \inf(t : |\Delta X_t^n| > b)$. La condition intervenant dans (2.15) s'écrit aussi: $\lim_{b\uparrow\infty} \limsup_{n\uparrow\infty} P(\tau_b^n \leq t) = 0$ pour tout $t>0$. Le lemme (2.15) découle alors immédiatement du

(3.12) LEMME: Pour tous $n\in\mathbb{N}$, $\varepsilon>0$, $t>0$, on a

$$P(\tau_b^n \leq t) \leq \varepsilon + P(I_{\{|x|>b\}}*\nu_t^n \geq \varepsilon)$$
$$P(I_{\{|x|>b\}}*\nu_t^n \geq \varepsilon) \leq (\tfrac{1}{\varepsilon}+1)\, P(\tau_b^n \leq t).$$

Démonstration. On considère les deux processus croissants $Z = I_{\{|x|>b\}}*\mu^n$ (où μ^n est associé à X^n par (2.1)) et $\tilde{Z} = I_{\{|x|>b\}}*\nu^n$. Pour tout temps d'arrêt T on a $E(Z_T) = E(\tilde{Z}_T)$. On a aussi $\{\tau_b^n \leq t\} = \{Z_t \geq 1\}$, et $\tilde{Z}$ est prévisible. D'après le théorème de Lenglart [5] on a alors pour tout $\varepsilon>0$:

$$P(\tau_b^n \leq t) \;=\; P(Z_t \geq 1) \;\leq\; \varepsilon + P(\tilde{Z}_t \geq \varepsilon)$$

$$P(\tilde{Z}_{t\wedge\tau_b^n} \geq \varepsilon) \;\leq\; \frac{1}{\varepsilon}\, E(Z_{t\wedge\tau_b^n}) = \frac{1}{\varepsilon}\, P(\tau_b^n \leq t)\,,$$

d'où le résultat. ∎

Passons maintenant à la preuve de (2.14). Pour tout $b \geq 1$ on pose

$$X^n(b)_t \;=\; X_t^n - \sum_{s\leq t} \Delta X_s^n \, I_{\{|\Delta X_s^n| > b\}}\,,$$

qui est une semimartingale de caractéristiques locales $(B^n, C^n, I_{\{|x|\leq b\}}\cdot\nu^n)$.

Soit $t_1 < t_2 < \ldots < t_m = t$ des points de D. D'après (2.12) il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que $P(F_t^n \leq K) \longrightarrow 0$ et que $F_t^\infty \leq K$. Posons

$$\sigma^n \;=\; \inf(s:\; F_s^n > K+1)$$

$$\overline{X}^n(b)_s \;=\; X^n(b)_{s\wedge t\wedge\sigma^n}\,.$$

Par construction les semimartingales $\overline{X}^n(b)$ vérifient (3.1), et comme $\Delta F^n \leq d+1$ ils vérifient (3.2) avec $K+2+d$ et on a

$$\lim_{n\uparrow\infty} P(\sigma^n \leq t) \;=\; 0\,, \tag{3.13}$$

et $\sigma^\infty > t$ car $F_t^\infty < K$. Remarquons aussi que $\overline{X}^n(b)$ vérifie l'hypothèse (2.10). Enfin si $\overline{A}^{n,b'}(\lambda,b)$ est associé à $\overline{X}^n(b')$ par (2.9), d'après la forme des caractéristiques locales de $X^n(b')$, donc de $\overline{X}^n(b')$, on a pour $1 \leq b' \leq b$:

$$\overline{A}^{n,b'}(\lambda,b)_s \;=\; A^n(\lambda,b')_{s\wedge t\wedge\sigma^n}\,.$$

D'après (3.13) et (2.13), on a alors si $b_q \geq 1$:

$$\lambda \in \mathbb{R}^d,\; b \geq b_q,\; s \in D \;\Longrightarrow\; \mathcal{E}(\overline{A}^{n,b_q}(\lambda,b))_s \xrightarrow{\;\mathcal{L}\;} \mathcal{E}(\overline{A}^{\infty,b_q}(\lambda,b))_s\,.$$

En d'autres termes, les processus $(\overline{X}^n(b_q))_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ vérifient toutes les hypothèses du §a dès que $b_q \geq 1$, et on déduit du lemme (3.11) que

$$(\overline{X}^n(b_q)_{t_1},\ldots,\overline{X}^n(b_q)_{t_m}) \xrightarrow{\;\mathcal{L}\;} (\overline{X}^\infty(b_q)_{t_1},\ldots,\overline{X}^\infty(b_q)_{t_m})\,. \tag{3.14}$$

Enfin d'après (3.12) et (3.13), et l'hypothèse (2.12), pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_o \in \mathbb{N}$ et $q_o \in \mathbb{N}$ tels que

$$n \geq n_o\,,\;\; q \geq q_o \;\Longrightarrow\; P(\sigma^n > t, \tau_{b_q}^n > t) \geq 1-\varepsilon\,. \tag{3.15}$$

Comme $\overline{X}^n(b)_{t_i} = X_{t_i}^n$ pour tout $i \leq m$ sur l'ensemble $\{\sigma^n > t, \tau_b^n > t\}$, on déduit de (3.14) et de (3.15) que

$$(X^n_{t_1},\dots,X^n_{t_m}) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X^\infty_{t_1},\dots,X^\infty_{t_m}) ,$$

ce qui achève de prouver le théorème (2.14).

4 - EXPONENTIELLES DE FONCTIONS CROISSANTES OU A VARIATION FINIE

Dans cette partie, nous abandonnons les probabilités pour ne considérer que des fonctions (déterministes !), que nous noterons cependant toujours A^n, B^n, .. On note $\mathcal{V}$ (resp. $\mathcal{V}^+$) l'ensemble des fonctions: $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ nulles en 0, continues à droite, à variation finie (resp. croissantes). Si $A\in\mathcal{V}$ on note $V(A)$ sa fonction variation. On définit toujours "l'exponentielle" $\mathcal{E}(A)$ par la formule (2.7), qui devient ici:

(4.1) $$\mathcal{E}(A)_t \;=\; e^{A_t}\prod_{s\leq t}\left[(1+\Delta A_s)e^{-\Delta A_s}\right].$$

Si les A^n sont continus, on a bien-sûr $\mathcal{E}(A^n)_t \longrightarrow \mathcal{E}(A^\infty)_t$ si et seulement si $A^n_t \longrightarrow A^\infty_t$. Lorsque les A^n ne sont pas continus, la convergence de $\mathcal{E}(A^n)_t$ vers $\mathcal{E}(A^\infty)_t$ est bien plus difficile à établir. Nous allons en faire une étude relativement systématique.

§a - Un résultat général. On considère d'une part une suite $(A^n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ d'éléments de $\mathcal{V}$, d'autre part une partie dense D de $\mathbb{R}_+$. Introduisons les hypothèses:

(4.2) $\quad t\in D \Longrightarrow A^n_t \longrightarrow A^\infty_t$.

(4.3) Il existe des $B^n\in\mathcal{V}^+$ tels que $B^n - V(A^n)\in\mathcal{V}^+$ et que: $t\in D \Longrightarrow B^n_t \longrightarrow B^\infty_t$.

(4.4) Pour tout $t>0$ il existe une suite $(t(n))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que: $t(n)\longrightarrow t$, $\Delta A^n_{t(n)} \longrightarrow \Delta A^\infty_t$, et $t\in D \Longrightarrow t(n)\leq t$.

(4.5) On a (4.4) et, si $\varepsilon>0$, si $t_1,\dots,t_m,\dots$ sont les instants successifs où $|\Delta A^\infty|>\varepsilon$, et si $(t_m(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite associée à t_m par (4.4), on a pour tout $t\geq 0$:

$$\limsup_{n\uparrow\infty}\ \sup_{s\leq t,\, s\neq t_i(n)} |\Delta A^n_s| \;\leq\; \varepsilon\ .$$

(4.6) LEMME: Si on a (4.2), (4.3), (4.5), alors: $t\in D \Longrightarrow \mathcal{E}(A^n)_t \longrightarrow \mathcal{E}(A^\infty)_t$.

Démonstration. Soit $\varepsilon\in\,]0,1/2[$ et $t\in D$. D'après (4.5) et quitte à négliger les petites valeurs de n, on peut supposer que $|\Delta A^n_s|<1$

pour tous $s \leq t$, $s \neq t_i(n)$, $n \in \mathbb{N}$. On pose (avec les notations de (4.5)):

$$V_t^n = \prod_{i:\ t_i(n) \leq t} [(1 + \Delta A^n_{t_i(n)}) \exp -\Delta A^n_{t_i(n)}]$$

$$W_t^n = \sum_{s \leq t,\ s \neq t_i(n)} [\Delta A^n_s - \mathrm{Log}(1 + \Delta A^n_s)].$$

Soit c une constante telle que $x - \mathrm{Log}(1+x) \leq c\,\varepsilon\,|x|$ si $|x| \leq 3\varepsilon/2$ (on peut choisir c indépendamment de ε, si $\varepsilon < 1/2$). D'après (4.3) et (4.5) il vient

$$\limsup_{n \uparrow \infty} W_t^n \leq c\,\varepsilon\, B_t^\infty ,$$

tandis que $W_t^n \geq 0$. Par ailleurs $\mathcal{E}(A^n)_t = V_t^n \exp(A_t^n - W_t^n)$. D'après (4.4) on a $V_t^n \longrightarrow V_t^\infty$. En utilisant (4.2) et le fait que ε est arbitrairement petit, on en déduit que $\mathcal{E}(A^n)_t \longrightarrow \mathcal{E}(A^\infty)_t$. ∎

(4.7) LEMME: <u>Supposons que les</u> $A^n \in \mathcal{V}^+$ <u>vérifient (4.2). Si</u> $s \in D$, $s' > s$, <u>on a</u>:

$$\limsup_{n \uparrow \infty} \sup_{s < r \leq s'} \Delta A^n_r \leq \sup_{s < r \leq s'} \Delta A^\infty_r .$$

<u>Démonstration</u>. Soit a et b les membres de droite et de gauche de l'inégalité à démontrer. Il existe une sous-suite (n') de $\mathbb{N}$ et une suite $(t_{n'})$ de points de $]s,s']$ convergeant vers une limite $t \in [s,s']$, telle que $\Delta A^{n'}_{t_{n'}} \longrightarrow b$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $u,v \in D$ avec $s \leq u \leq t < v$, et $u < t$ si $s < t$, et

$$A_v^\infty - A_u^\infty - \Delta A_t^\infty I_{\{t > s\}} \leq \varepsilon$$

On a $t_{n'} \in]u,v]$ si n' est assez grand. D'après (4.2) il vient

$$b = \lim_{(n')} \Delta A^{n'}_{t_{n'}} \leq \lim_{(n')} (A_v^{n'} - A_u^{n'}) = A_v^\infty - A_u^\infty \leq \varepsilon + \Delta A_t^\infty I_{\{t > s\}} \leq \varepsilon + a$$

et comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a $b \leq a$. ∎

(4.8) COROLLAIRE: <u>Si les</u> $A^n \in \mathcal{V}^+$ <u>vérifient (4.2) et (4.4), ils vérifient (4.5)</u>.

<u>Démonstration</u>. Soit $\varepsilon > 0$. On utilise les notations de (4.5), et on pose

$$\overline{A}_t^n = A_t^n - \sum_{i:\ t_i(n) \leq t} \Delta A^n_{t_i(n)}$$

D'après (4.4), les $(\overline{A}^n)_{n \in \overline{\mathbb{N}}}$ sont des éléments de $\mathcal{V}^+$ vérifiant (4.2). Comme $\Delta \overline{A}_s^\infty \leq \varepsilon$ par construction, il suffit d'appliquer le lemme (4.7). ∎

Nous allons immédiatement en déduire deux résultats sur la convergence des exponentielles; seul le premier sera utilisé plus loin.

(4.9) PROPOSITION: Supposons que les $A^n \in \mathcal{V}$ vérifient (4.2) et (4.3), et que B^∞ soit continu. Alors: $t \in D \Longrightarrow \mathcal{E}(A^n)_t \longrightarrow \mathcal{E}(A^\infty)_t$ (en fait, on peut montrer que dans ce cas, cette convergence a lieu pour tout $t \geq 0$).

Démonstration. Il est facile de vérifier que les hypothèses entrainent la continuité de A^∞. Comme A^∞ et B^∞ sont continus, les suites (A^n) et (B^n) vérifient trivialement (4.4). De plus (B^n) vérifie (4.5) d'après le corollaire (4.8), de sorte que

$$\lim\sup_{n\uparrow\infty} \sup_{s\leq t} |\Delta A^n_s| \leq \lim\sup_{n\uparrow\infty} \sup_{s\leq t} \Delta B^n_s = 0$$

(en utilisant la continuité de B^∞ : donc $t_i = \infty$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $\varepsilon > 0$ dans (4.5)). Donc la suite (A^n) vérifie (4.5) et le résultat découle du lemme (4.6). ∎

(4.10) PROPOSITION: L'application: $A \rightsquigarrow \mathcal{E}(A)$ de $\mathcal{V}^+$ dans l'espace $\mathcal{V}_1^+$ des fonctions croissantes continues à droite égales à 1 en 0, est continue pour la restriction de la topologie de Skorokhod sur $D([0,\infty[;\mathbb{R})$ à ces espaces.

Démonstration. On sait que la suite de fonctions A^n converge vers A^∞ dans $\mathcal{V}^+$ (resp. $\mathcal{V}_1^+$) pour la topologie de Skorokhod si et seulement si elle vérifie (4.2) et (4.4) pour une partie dense D de $\mathbb{R}_+$ (et dans ce cas, elle vérifie (4.2) et (4.4) avec $D = \{t : \Delta A^\infty_t = 0\}$). Si la suite (A^n) d'éléments de $\mathcal{V}^+$ vérifie (4.2) et (4.4), elle vérifie (4.5) d'après le corollaire (4.8), donc la suite $(\mathcal{E}(A^n))$ vérifie (4.2) d'après le lemme (4.6). Enfin comme $\Delta\mathcal{E}(A^n) = \mathcal{E}(A^n)\,\Delta A^n/(1+\Delta A^n)$ il est facile d'en déduire que la suite $(\mathcal{E}(A^n))$ vérifie aussi (4.4), d'où le résultat. ∎

§b - Le cas des fonctions croissantes. La condition (4.4) est difficile à vérifier a-priori. Nous allons donc donner des conditions équivalentes dans le cas où les A^n sont dans $\mathcal{V}^+$. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ qui sont strictement convexes et vérifient: $f(0) = f'(0) = 0$, $f''(0)$ existe et est fini. Soit la condition:

$$(4.11) \qquad t \in D \Longrightarrow \sum_{s\leq t} f(\Delta A^n_s) \longrightarrow \sum_{s\leq t} f(\Delta A^\infty_s).$$

(4.12) LEMME: Supposons que les $A^n \in \mathcal{V}^+$ vérifient (4.2). La suite (A^n) vérifie (4.4) si et seulement si elle vérifie (4.11) pour une fonction $f \in \mathcal{C}$, et dans ce cas elle vérifie (4.11) pour toute fonction $f \in \mathcal{C}$.

<u>Démonstration</u>. (a) Soit $f \in \mathcal{C}$, et supposons qu'on ait (4.11) pour f. Il est évident qu'on a (4.4) pour tout $t>0$ tel que $\Delta A^{\infty}_t = 0$. Supposons donc que $\Delta A^{\infty}_t > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $u_m, v_m \in D$ avec

$$u_m < t \leq v_m , \quad t \in D \Longrightarrow t = v_m , \quad A^{\infty}_{v_m} - A^{\infty}_{u_m} - \Delta A^{\infty}_t \leq 1/m .$$

Soit $F_m =]u_m, v_m]$. Il existe $r(m,n) \in F_m$ tel que $\Delta A^n_{r(m,n)} = \sup_{s \in F_m} \Delta A^n_s$. Soit $\underline{a}_m = \liminf_{(n)} \Delta A^n_{r(m,n)}$, $\overline{a}_m = \limsup_{(n)} \Delta A^n_{r(m,n)}$, $\underline{a} = \lim_{(m)} \uparrow \underline{a}_m$ et $\overline{a} = \lim_{(m)} \downarrow \overline{a}_m$. D'après (4.7) on a: $\overline{a} \leq \overline{a}_m \leq \Delta A^{\infty}_t$. Soit aussi $K \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x) \leq Kx^2$ si $x \leq A^{\infty}_t$. D'après (4.11) on a

$$f(\Delta A^{\infty}_t) \leq \sum_{r \in F_m} f(\Delta A^{\infty}_r) = \lim_{(n)} \sum_{r \in F_m} f(\Delta A^n_r) ,$$

d'où

$$f(\Delta A^{\infty}_t) \leq K \underline{a}_m \limsup_{(n)} \sum_{r \in F_m} \Delta A^n_r \leq K \underline{a}_m (\Delta A^{\infty}_t + \tfrac{1}{m})$$

$$\begin{aligned} f(\Delta A^{\infty}_t) &\leq \liminf_{(n)} f(\Delta A^n_{r(m,n)}) + \limsup_{(n)} f(\textstyle\sum_{s \in F_m, s \neq r(m,n)} \Delta A^n_s) \\ &\leq f(\underline{a}_m) + \limsup_{(n)} f(A^n_{v_m} - A^n_{u_m} - \Delta A^n_{r(m,n)}) \\ &\leq f(\underline{a}_m) + f(\Delta A^{\infty}_t + \tfrac{1}{m} - \underline{a}_m) \end{aligned}$$

(on applique la convexité, puis la croissance et la continuité de f). En passant à la limite en m, on obtient

$$f(\Delta A^{\infty}_t) \leq K \underline{a} \Delta A^{\infty}_t , \qquad f(\Delta A^{\infty}_t) \leq f(\underline{a}) + f(\Delta A^{\infty}_t - \underline{a}) .$$

Etant donnée la stricte convexité de f, la seconde inégalité n'est possible que si $\underline{a} = 0$ (ce que contredit la première inégalité), ou si $\underline{a} = A^{\infty}_t$. Comme on a vu que $\overline{a} \leq \Delta A^{\infty}_t$ on a donc $\underline{a} = \overline{a} = \Delta A^{\infty}_t$. Par suite pour tout $q \in \mathbb{N}$ il existe $k(q) \geq q$ tel que

$$\Delta A^{\infty}_t - \frac{1}{q} \leq \underline{a}_{k(q)} \leq \overline{a}_{k(q)} \leq \Delta A^{\infty}_t + \frac{1}{q}$$

et il existe $l(q) \geq q$ tel que $|\Delta A^{\infty}_t - \Delta A^n_{r(k(q),n)}| \leq 2/q$ pour tout $n \geq l(q)$. Il reste à poser $m(n) = \sup(q : n \geq l(q))$ et $t(n) = r(k(m(n)),n)$ pour obtenir (4.4).

(b) Supposons inversement qu'on ait (4.4), et soit $f \in \mathcal{C}$. Soit $\varepsilon \in]0,1[$. D'après (4.8) on sait que la suite (A^n) vérifie la condition (4.5), dont on utilise les notations. Il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x) \leq Kx^2$ si $x \leq 1$. D'après (4.5) il vient pour $t \in D$:

$$\limsup_{(n)} \sum_{s\leq t} f(\Delta A_s^n) \leq \lim_{(n)} \sum_{i:\ t_i(n)\leq t} f(\Delta A^n_{t_i(n)}) + K\varepsilon \lim_{(n)} A^n_t$$
$$= \sum_{i\ :\ t_i\leq t} f(\Delta A^{\infty}_{t_i}) + K\varepsilon A^{\infty}_t$$
$$\leq \sum_{s\leq t} f(\Delta A^{\infty}_s) + K\varepsilon A^{\infty}_t$$
$$\liminf_{(n)} \sum_{s\leq t} f(\Delta A_s^n) \geq \lim_{(n)} \sum_{i\ :\ t_i(n)\leq t} f(\Delta A^n_{t_i(n)})$$
$$= \sum_{i\ :\ t_i\leq t} f(\Delta A^{\infty}_{t_i}) \geq \sum_{s\leq t} f(\Delta A^{\infty}_s) - K\varepsilon A^{\infty}_t$$

et comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a (4.11) pour la fonction f. ∎

(4.13) COROLLAIRE: <u>Supposons que les</u> $A^n \in \mathcal{V}^+$ <u>vérifient (4.2) et</u>

(4.14) $$t\in D \Longrightarrow \sum_{s\leq t} (\Delta A^n_s)^2 \longrightarrow \sum_{s\leq t} (\Delta A^{\infty}_s)^2 .$$

<u>On a alors</u>: $t\in D \Longrightarrow \mathcal{E}(A^n)_t \longrightarrow \mathcal{E}(A^{\infty})_t$.

Ce corollaire découle immédiatement de (4.6), (4.8) et (4.12), car $f(x)=x^2$ est dans $\mathcal{C}$. Comme $f(x)=x-\mathrm{Log}(1+x)$ est aussi dans $\mathcal{C}$, c'est aussi une conséquence directe de (4.12) et de la formule (4.1).

(4.15) REMARQUE: Le corollaire (4.13) est démontré par Kabanov, Liptzer et Shiriayev [4], par une méthode un peu différente et un peu plus simple. Cependant la méthode utilisée ici donne quelques informations supplémentaires:

1) En utilisant l'équivalence (4.12), on voit que si les $A^n \in \mathcal{V}^+$ vérifient (4.2), on a $\mathcal{E}(A^n)_t \longrightarrow \mathcal{E}(A^{\infty})_t$ pour tout $t\in D$ <u>si et seulement si</u> (4.14) est vérifié.

2) Le corollaire (4.13) reste valide si on remplace (4.14) par
$$t\in D \Longrightarrow \sum_{s\leq t} (\Delta A^n_s)^{\alpha} \longrightarrow \sum_{s\leq t} (\Delta A^{\infty}_s)^{\alpha}$$
pour un réel $\alpha \geq 2$ quelconque. ∎

<u>§c - Le cas des fonctions à variation finie</u>. Dans ce cas, nous allons nous contenter d'étudier une condition très particulière.

(4.16) PROPOSITION: <u>On suppose que les</u> $A^n \in \mathcal{V}$ <u>vérifient (4.2), (4.3), et (4.11) avec les trois fonctions</u> $f(x)=x^2,\ =x^3,\ =x^4$. <u>Alors on a</u>: $t\in D \Longrightarrow \mathcal{E}(A^n)_t \longrightarrow \mathcal{E}(A^{\infty})_t$.

(ces conditions impliquent aussi qu'on ait (4.11) pour toute fonction $f(x) = |x|^{\alpha}$, avec $\alpha \geq 2$).

<u>Démonstration</u>. Posons $C_t^n = \sum_{s \leq t} (\Delta A_s^n)^2$, $D_t^n = \sum_{s \leq t} (\Delta A_s^n)^3$ et $E_t^n = \sum_{s \leq t} (\Delta A_s^n)^4$. Les C^n sont dans $\mathcal{V}^+$ et vérifient (4.2) et (4.14), donc (4.4) et (4.5). Soit $t > 0$ et $(t(n))$ une suite telle que $t(n) \to t$, $(\Delta A_{t(n)}^n)^2 \longrightarrow (\Delta A_t^{\infty})^2$, et $t(n) \leq t$ si $t \in D$. Si $\Delta A_{t(n)}^n$ ne converge pas vers ΔA_t^{∞}, quitte à prendre une sous-suite on peut supposer que $\Delta A_{t(n)}^n \to -\Delta A_t^{\infty}$.

On pose $\overline{C}_s^n = C_s^n - \Delta C_{t(n)}^n I_{\{t(n) \leq s\}}$, et on définit de même $\overline{D}^n$ et $\overline{E}^n$, avec la convention $t(\infty) = t$. Il est clair que pour tout $s \in D$, on a: $\overline{C}_s^n \longrightarrow \overline{C}_s^{\infty}$, $\overline{D}_s^n \longrightarrow \overline{D}_s^{\infty} + 2(\Delta A_t^{\infty})^3 I_{\{t \leq s\}}$, et $\overline{E}_s^n \longrightarrow \overline{E}_s^{\infty}$. Par ailleurs on a $\overline{C}^n + \overline{E}^n - V(\overline{D}^n) \in \mathcal{V}^+$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (car $|x^3| \leq x^2 + x^4$) et $\Delta \overline{C}_t^{\infty} = \Delta \overline{E}_t^{\infty} = 0$, donc on doit avoir $\Delta \overline{D}_t^{\infty} + 2(\Delta A_t^{\infty})^3 = 0$. Comme on a aussi $\Delta \overline{D}_t^{\infty} = 0$ par construction, on arrive à une contradiction, sauf si $\Delta \overline{A}_t^{\infty} = 0$.

En d'autres termes, on a montré que $\Delta A_{t(n)}^n \longrightarrow \Delta A_t^{\infty}$. Enfin comme la suite (C^n) vérifie (4.5) on en déduit aisément que (A^n) vérifie également (4.5), et le résultat découle du lemme (4.6).∎

Voici maintenant deux résultats un peu différents, qui ne seront pas utilisés dans la suite et sont donc énoncés sans démonstration.

(4.17) PROPOSITION: <u>On suppose que</u> $A^n \in \mathcal{V}$ <u>s'écrit</u> $A^n = B^n - C^n$ <u>avec</u> $B^n, C^n \in \mathcal{V}^+$, <u>et que les suites</u> (A^n), (B^n), (C^n) <u>vérifient (4.2) et (4.14). On a alors</u>: $t \in D \Longrightarrow \mathcal{E}(A^n)_t \longrightarrow \mathcal{E}(A^{\infty})_t$.

(4.18) PROPOSITION: <u>On suppose que les</u> $A^n \in \mathcal{V}$ <u>vérifient (4.2), (4.3), (4.14), et que</u> $\Delta B^{\infty} = |\Delta A^{\infty}|$. <u>Alors</u>: $t \in D \Longrightarrow \mathcal{E}(A^n)_t \longrightarrow \mathcal{E}(A^{\infty})_t$.

<u>§d - Retour aux probabilités</u>. Revenons aux probabilités en considérant pour chaque $n \in \overline{\mathbb{N}}$ un espace probabilisé $(\Omega^n, \underline{\underline{F}}^n, P^n)$ muni d'un processus A^n à trajectoires dans $\mathcal{V}$. Ce qui précède s'applique de la manière suivante aux convergences en loi: soit d'abord les conditions:

(4.19) $\quad t \in D \longrightarrow A_t^n \xrightarrow{\mathcal{L}} A_t^{\infty}$

(4.20) Pour chaque $n \in \overline{\mathbb{N}}$ il existe un processus croissant B^n sur

$(\Omega^n, \underline{\underline{F}}^n, P^n)$ tel que $B^n - V(A^n)$ soit croissant et que $t \in D \Longrightarrow B_t^n \xrightarrow{\mathcal{L}} B_t^{\infty}$.

(4.21) $t \in D \Longrightarrow \sum_{s \leq t} (\Delta A_s^n)^2 \xrightarrow{\mathcal{L}} \sum_{s \leq t} (\Delta A_s^{\infty})^2$

(4.22) $t \in D \Longrightarrow \sum_{s \leq t} (\Delta A_s^n)^3 \xrightarrow{\mathcal{L}} \sum_{s \leq t} (\Delta A_s^{\infty})^3$

(4.23) $t \in D \Longrightarrow \sum_{s \leq t} (\Delta A_s^n)^4 \xrightarrow{\mathcal{L}} \sum_{s \leq t} (\Delta A_s^{\infty})^4$

Le théorème suivant résume alors ce dont nous aurons besoin dans la suite.

(4.24) THEOREME: <u>On a</u>: $t \in D \Longrightarrow \mathcal{E}(A^n)_t \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{E}(A^{\infty})_t$ <u>sous chacune des conditions suivantes</u>:

(i) <u>On a (4.19), (4.20)</u>, A^{∞} <u>et</u> B^{∞} <u>sont déterministes</u>, B^{∞} <u>est continu</u>.

(ii) <u>On a (4.19), (4.21), les</u> A^n <u>sont croissants</u>, A^{∞} <u>est déterministes</u>.

(iii) <u>On a (4.19), (4.20), (4.21), (4.22), (4.23)</u>, A^{∞} <u>et</u> B^{∞} <u>sont déterministes</u>.

<u>Démonstration</u>. Quitte à prendre le produit des espaces $(\Omega^n, \underline{\underline{F}}^n, P^n)$, on peut supposer que tous ces processus sont définis sur le même espace $(\Omega, \underline{\underline{F}}, P)$; les diverses limites étant déterministes, on a donc des convergences en probabilité. Si $t \in D$, pour montrer que $\mathcal{E}(A^n)_t \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{E}(A^{\infty})_t$ il suffit de montrer que de toute sous-suite (n') on peut extraire une sous-sous-suite (n'') pour laquelle il y a convergence presue-sûre. Quitte à restreindre D on peut supposer que D est dénombrable et contient encore t, donc de la sous-suite (n') on extrait une sous-sous-suite (n'') pour laquelle les convergences dans (4.19)-(4.23) sont presque-sûres. Il suffit alors d'appliquer (4.9) (resp. (4.13), resp. (4.16)) quand on a (i) (resp. (ii), resp. (iii)). ∎

<u>5 - QUELQUES EXEMPLES</u>

Dans cette partie nous revenons à la situation du §2, et nous allons donner diverses conditions portant sur les caractéristiques locales des X^n et assurant qu'on a (2.11), (2.12), (2.13) ou (2.16). Pour simplifier, on supposera que les X^n sont des <u>semimartingales réelles</u> $(d=1)$.

On verra intervenir des conditions du type: $K^n(dx) \xrightarrow{\mathcal{L}} K^{\infty}(dx)$, où les $K^n(\omega, dx)$ sont des mesures aléatoires finies sur $\mathbb{R}$. Cela signifie que pour toute fonction continue bornée f sur $\mathbb{R}$ on a $K^n(f) \xrightarrow{\mathcal{L}} K^\infty(f)$. De manière équivalente, cela signifie aussi que les variables aléatoires K^n convergent en loi vers la variable K^∞, ces variables prenant leurs valeurs dans l'espace polonais des mesures bornées sur $\mathbb{R}$ muni de la topologie de la <u>convergence étroite</u>: pour se rappeler ceci, on écrira: $K^n \xrightarrow{\mathcal{L},\text{ét}} K^\infty$.

Signalons à ce propos que dans ce cas, si f est une fonction bornée sur $\mathbb{R}$, continue sauf en un nombre fini de points $x_1,..,x_m$, on a $K^n(f) \xrightarrow{\mathcal{L}} K^\infty(f)$ dès que $P[K^\infty(\{x_i\})>0]=0$ pour tout $i\leq m$.

En particulier, on appliquera les remarques qui précèdent à des mesures K^n construites à partir des ν^n. Or, dans la définition même des caractéristiques locales on voit que les points $x=1$ et $x=-1$ jouent un rôle tout-à-fait particulier. Cela conduit à imposer parfois l'hypothèse suivante; lorsque (2.10) est vérifiée:

(5.1) HYPOTHESE: <u>On a</u> $\nu^\infty(\mathbb{R}_+\times\{-1,1\}) = 0$.

(5.2) REMARQUES: 1) L'hypothèse (5.1) peut sembler restrictive. En fait il n'en est rien car si elle n'est pas vérifiée on peut toujours choisir un $a>1$ tel que $\nu^\infty(\mathbb{R}_+\times\{-a,a\})=0$. On considère les processus $\bar{X}^n = X^n/a$, qui admettent les caractéristiques locales $\bar{B}^n = B^n/a + \frac{x}{a}I_{\{1<|x|\leq a\}}*\nu^n$, $\bar{C}^n = C^n$, et $\bar{\nu}^n([0,t]\times A) = \int\nu^n([0,t]\times dx)I_A(\frac{x}{a})$. De plus $\bar{\nu}^\infty$ vérifie (5.1). Enfin la conclusion du théorème (2.14) (resp. (2.17)) est valable pour les X^n si et seulement si elle est valable pour les $\bar{X}^n$: on peut donc remplacer dans ce qui suit X^n par $\bar{X}^n$.

2) En fait l'introduction de l'hypothèse (5.1) est due à une définition des caractéristiques locales qui n'est pas adaptée à l'étude des convergences. Il serait plus judicieux ici (mais moins habituel) de modifier la définition (2.2) du processus $\check{X}$, donc la seconde caractéristique B, ainsi: on choisirait une fonction f <u>continue</u> telle que $f(x)=x$ si $|x|\geq 1$, $f(x)=0$ si $|x|\leq 1/2$, et $|f(x)|\leq|x|$, et on poserait $\check{X}_t = \sum_{s\leq t} f(\Delta X_s)$. Il n'y aurait alors plus lieu de considérer l'hypothèse (5.1). ∎

Terminons ces préliminaires par une dernière remarque: dans ce qui suit nous énonçons des résultats de convergence en loi, qui s'appuient sur le théorème (2.17), donc sur [3]. Mais rappelons que dans cet article, seule la convergence fini-dimensionnelle au sens du théorème (2.14) est montrée.

§a - Exemples où X^{∞} est quasi-continu à gauche. Dans tout ce qui suit nous nous plaçons dans les conditions du §2, dont nous utilisons les notations. Commençons par un résultat simple.

(5.3) THEOREME: Supposons que chaque X^n soit croissant, que X^{∞} soit quasi-continu à gauche, et qu'on ait (2.10). Les mesures aléatoires suivantes sur $\mathbb{R}_+$ sont finies et positives:

$$U_t^n(dx) = (B_t^n - xI_{\{|x|\leq 1\}}*\nu_t^n)\ \varepsilon_0(dx) + (x\wedge 1)\cdot\nu^n([0,t]\times dx)$$

et si: $t\in D \Longrightarrow U_t^n \xrightarrow{\mathcal{L},\text{ét}} U_t^{\infty}$, les processus X^n convergent en loi vers X^{∞}.

Ce résultat est un cas particulier du théorème suivant:

(5.4) THEOREME: Supposons que $X^n - X^{n,c}$ soit à variation finie pour chaque $n\in\overline{\mathbb{N}}$ et qu'on ait (2.10). Les mesures aléatoires suivantes sur $\mathbb{R}_+$ sont finies (mais pas nécessairement positives):

$$V_t^n(dx) = (B_t^n - xI_{\{|x|\leq 1\}}*\nu_t^n)\ \varepsilon_0(dx) + (x\wedge 1\vee(-1))\cdot\nu^n([0,t]\times dx)$$

et si on a

(i) $t\in D \longrightarrow C_t^n \xrightarrow{\mathcal{L}} C_t^{\infty}$, $V_t^n \xrightarrow{\mathcal{L},\text{ét}} V_t^{\infty}$;

(ii) il existe des processus H^n tels que: $t\in D \Longrightarrow H_t^n \xrightarrow{\mathcal{L}} H_t^{\infty}$, que H^{∞} soit déterministe, et que $H^n - V(B^n - xI_{\{|x|\leq 1\}}*\nu^n) - (|x|\wedge 1)*\nu^n$ soit croissant;

(iii) H^{∞} est continu,

alors les processus X^n convergent en loi vers X^{∞}.

Remarquons que (iii) entraine que $\nu^{\infty}(\{t\}\times\mathbb{R}) = 0$, donc X^{∞} est quasi-continu à gauche. Le fait que $X^n - X^{n,c}$ soit à variation finie entraine de manière classique que $(|x|\wedge 1)*\nu_t^n < \infty$ p.s. pour tout $t<\infty$, donc la mesure V_t^n est finie, et le processus $B^n - xI_{\{|x|\leq 1\}}*\nu^n$ est bien défini, et continu d'après (2.6).

Si X^n est croissant, on a $C^n = 0$, $U^n = V^n$ et $B^n - xI_{\{|x|\leq 1\}}*\nu^n$ est croissant. Donc les hypothèses de (5.3) entrainent (i),(ii) avec $H^n = U^n(1)$, et (iii) car $H^{\infty} = U^{\infty}(1)$ est continu si X^{∞} est quasi-continu à gauche.

Démonstration. On a $x^2\wedge 1 \leq |x|\wedge 1$, et le processus

$$V(B^n - xI_{\{|x|\leq 1\}}*\nu^n) + (|x|\wedge 1)*\nu^n - V(B^n)$$

est croissant. Donc l'hypothèse (2.16) est satisfaite avec $G^n = 2H^n + C^n$.

Soit $\Lambda = \{b>0 : \nu^{\infty}(\mathbb{R}\times\{-b,b\}) = 0\}$, qui est une partie dense de $\mathbb{R}_+$. Si $b\in\Lambda$, (i) implique que

$$I_{\{|x|>b\}}*\nu^n_t = V^n_t(I_{\{x>b\}} - I_{\{x<-b\}}) \xrightarrow{\mathcal{L}} V^{\infty}_t(I_{\{x>b\}} - I_{\{x<-b\}}) = I_{\{|x|>b\}}*\nu^{\infty}_t$$

et comme $\lim_{b\uparrow\infty} I_{\{|x|>b\}}*\nu^{\infty}_t = 0$ il est facile d'en déduire qu'on a (2.11).

Soit $b\in\Lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^{\lambda x}-1}{x\wedge 1 \vee(-1)} I_{\{|x|\leq b\}}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=\lambda$. cette fonction f est bornée et continue sauf en b et en $-b$. Un calcul simple montre que

$$A^n(\lambda,b)_t = \frac{\lambda^2}{2} C^n_t + V^n_t(f),$$

tandis que si $b\geq 1$ et si $c=\sup f(x)$, le processus

$$\frac{\lambda^2}{2} C^n_t + V(B^n - xI_{\{|x|\leq 1\}}*\nu^n) + c(|x|\wedge 1)*\nu^n - V[A^n(\lambda,b)]$$

est croissant. Donc $\lambda^2 C^n/2 + (|\lambda|+c)H^n - V[A^n(\lambda,b)]$ est croissant. D'après (4.24,i) et les hypothèses (i), (ii) et (iii), on en déduit que $\mathcal{E}(A^n(\lambda,b))_t \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{E}(A^{\infty}(\lambda,b))_t$ si $t\in D$, $b\in\Lambda$, $b\geq 1$, $\lambda\in\mathbb{R}$. On a donc (2.13), d'où le résultat. ∎

(5.5) THEOREME: <u>Supposons qu'on ait (2.10) et (5.1) et que X^{∞} soit quasi-continu à gauche. Les mesures aléatoires suivantes sur $\mathbb{R}$ sont finies et positives:</u>

$$W^n_t(dx) = C^n_t\,\varepsilon_0(dx) + (x^2\wedge 1)\cdot\nu^n([0,t]\times dx),$$

<u>et si</u>

(i) $t\in D \Longrightarrow B^n_t \xrightarrow{\mathcal{L}} B^{\infty}_t$, $W^n_t \xrightarrow{\mathcal{L},\text{ét}} W^{\infty}_t$;

(ii) <u>il existe des processus H^n tels que $H^n - V(B^n)$ soient croissants et que</u>: $t\in D \Longrightarrow H^n_t \xrightarrow{\mathcal{L}} H^{\infty}_t$; <u>et que H^{∞} soit déterministe</u>;

(iii) H^{∞} <u>est continu</u>,

<u>alors les processus X^n convergent en loi vers X^{∞}</u>.

<u>Démonstration</u>. L'hypothèse (2.16) est satisfaite avec $G^n = H^n + W^n(1)$ (noter que le processus: $t \rightsquigarrow W^n_t(1)$ est croissant fini). On définit Λ comme dans la preuve de (5.4) et on montre comme dans cette preuve que l'hypothèse (2.11) est satisfaite. (5.1) signifie que $1\in\Lambda$. Soit $b\in\Lambda$ et $\lambda\in\mathbb{R}$; on considère la fonction $f(x) = (e^{\lambda x} - 1 - \lambda x I_{\{|x|\leq 1\}})\times I_{\{|x|\leq b\}}/(x^2\wedge 1)$ pour $x\neq 0$ et $f(x) = \lambda^2/2$. Cette fonction est bornée par une constante c et est continue sauf en $\{-1,1,-b,b\}$. On a

$$A^n(\lambda,b)_t \ = \ B^n_t + W^n_t(f)$$

et le processus

$$V(B^n) \ + \ cW^n(1) \ - \ V[A^n(\lambda,b)]$$

est croissant. D'après (4.24,i), les hypothèses (i), (ii), (iii), et la quasi-continuité à gauche de X^∞ (qui implique la continuité de: $t \rightsquigarrow W^\infty_t(1)$) entrainent que $\mathcal{E}(A^n(\lambda,b))_t \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{E}(A^\infty(\lambda,b))_t$ si $t \in D$, $b \in \Lambda$, $b \geq 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On a donc (2.13), d'où le résultat. ∎

Terminons ce paragraphe par quelques commentaires sur ces divers théorèmes. Le théorème (5.4) implique que la partie martingale continue $X^{n,c}$ convergent en loi vers $X^{\infty,c}$, tandis que pour les processus $X^n - X^{n,c}$ il peut y avoir des "transferts" entre la partie "purement discontinue" et la partie "continue": cela couvre le cas où, par exemple, les processus croissants X^n purement discontinus convergent vers une processus croissant X^∞ continu (donc déterministe sous (2.10)).

Au contraire dans le théorème (5.5) il y a convergence de B^n vers B^∞, mais il peut y avoir des transferts de la partie "purement discontinue" vers la partie martingale continue: cela couvre le cas bien connu où une suite de processus de Poisson converge vers un mouvement brownien.

Mais bien-sûr ces deux théorèmes n'épuisent pas les possibilités: on peut avoir des transferts simultanés entre $X^{n,c}$, B^n, et la partie "martingale purement discontinue". Par contre, le théorème (5.5) couvre le cas où, séparément, C^n (resp. B^n, resp. ν^n) converge vers C^∞ (resp. B^∞, resp. ν^∞): nous laissons le lecteur écrire lui-même ce cas particulier.

Disons encore un mot de l'hypothèse (5.5,ii), qui peut sembler arbitrairement compliquée. On pourrait la remplacer par: $t \in D \Longrightarrow V(B^n)_t \xrightarrow{\mathcal{L}} V(B^\infty)_t$, mais on ne couvrirait pas le cas élémentaire où les X^n sont déterministes continus (donc $C^n = 0$, $\nu^n = 0$, $B^n = X^n$), convergent vers $X^\infty = 0$, mais admettent une variation constante (en n) et non nulle. La même remarque s'applique à l'hypothèse (5.4,ii).

§b - Exemples où X^∞ n'est pas quasi-continu à gauche. Commençons par généraliser le théorème (5.3).

(5.6) THEOREME: Supposons que chaque X^n soit croissant et qu'on ait (2.10). Si, avec les notations de (5.3), on a

(i) $t \in D \Longrightarrow U_t^n \xrightarrow{\mathcal{L},\text{ét}} U_t^\infty$;

(ii) pour toute fonction continue f telle que $f/(x\wedge 1)$ soit bornée, on a: $t \in D \Longrightarrow \sum_{s\leq t}[\nu^n(\{s\},f)]^2 \xrightarrow{\mathcal{L}} \sum_{s\leq t}[\nu^\infty(\{s\},f)]^2$,

alors les processus X^n convergent en loi vers X^∞ .

Démonstration. La seule chose à montrer est l'hypothèse (2.13). Soit toujours Λ l'ensemble introduit dans la preuve de (5.4). Soit $b \in \Lambda$, $b \geq 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{e^{\lambda x}-1}{x\wedge 1} I_{\{|x|\leq b\}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = \lambda$. Cette fonction f est bornée et continue sauf en b et $-b$, et il est facile d'en déduire que la convergence dans (ii) est aussi valable pour $f(x)x\wedge 1$.

On a $A^n(\lambda,b)_t = U_t^n(f)$, donc d'après les hypothèses faites la suite de processus $(A^n(\lambda,b))_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ vérifie les conditions de (4.24,ii). On a donc (2.13), d'où le résultat.■

(5.7) REMARQUE: On retrouve les résultats de Kabanov, Liptzer et Shiriayev [4] comme cas particulier de ce théorème: soit en effet $X^n = N^n$ des processus ponctuels de compensateurs A^n . Il vient $C^n = 0$, $B^n = A^n$, $\nu^n(dt,dx) = dA_t^n\, \varepsilon_1(dx)$, de sorte que $U_t^n(dx) = A_t^n\, \varepsilon_1(dx)$. Il est facile de voir que les hypothèses de (5.6) se réduisent à (1.1) et (1.2) (et dans le cas où A^∞ est continu, celles de (5.3) se réduisent à (1.1)).

(5.8) THEOREME: Supposons que $X^n - X^{n,c}$ soit à variation finie pour chaque $n\in\overline{\mathbb{N}}$ et qu'on ait (2.10). Si on a (5.4,i), (5.4,ii) et

(iii') pour toute fonction f continue telle que $f/(x\wedge 1)$ soit bornée, on a

$$(5.9)\quad t\in D \Longrightarrow \begin{cases} \sum_{s\leq t}\nu^n(\{s\},f)^2 \xrightarrow{\mathcal{L}} \sum_{s\leq t}\nu^\infty(\{s\},f)^2 \\ \sum_{s\leq t}\nu^n(\{s\},f)^3 \xrightarrow{\mathcal{L}} \sum_{s\leq t}\nu^\infty(\{s\},f)^3 \\ \sum_{s\leq t}\nu^n(\{s\},f)^4 \xrightarrow{\mathcal{L}} \sum_{s\leq t}\nu^\infty(\{s\},f)^4 , \end{cases}$$

alors les processus X^n convergent en loi vers X^∞ .

Démonstration. Il suffit de reprendre mot pour mot la preuve de (5.4), en remarquant que si $g(x) = (e^{\lambda x}-1)I_{\{|x|\leq b\}}$ on a

$$A^n(\lambda,b)_t = \nu^n(\{t\},g)$$

et que (5.9) est valable pour la fonction g si $b \in \Lambda$. En utilisant (4.24,iii) au lieu de (4.24,i), on obtient le résultat.■

Enfin, on généralise de la même manière le théorème (5.5):

(5.10) THEOREME: Supposons qu'on ait (2.10) et (5.1). Si on a (5.5,i), (5.5,ii), et

(iii') pour toute fonction f continue telle que $f/(x^2 \wedge 1)$ soit bornée, on a (5.9),

alors les processus X^n convergent en loi vers X^∞.

BIBLIOGRAPHIE

1 T. BROWN: A martingale approach to the Poisson convergence of simple point processes. Ann. Probab. 6, 615-628, 1978.

2 J. JACOD: Calcul stochastique et problèmes de martingales. Lect. Notes in Math. 714, Springer, 1979.

3 J. JACOD, J. MEMIN: Un nouveau critère de compacité relative pour une suite de processus. A paraitre aux Sém. de Proba. De Rennes, 1979.

4 I. KABANOV, R. LIPTZER, A. SHIRIAYEV: Some limit theorems for simple point processes (martingale approach). Preprint, 1979.

5 E. LENGLART: Relations de domination entre deux processus. Ann. Inst. H. Poincaré (B), XIII, 171-179, 1977.

6 D. LEPINGLE, J. MEMIN: Sur l'intégrabilité uniforme des martingales exponentielles. Z. für Wahr. 42, 175-203, 1978.

7 P.A. MEYER: Un cours sur les intégrales stochastiques. Sém. Proba. X, Lact. Notes Math 511, Springer, 1976.