Jia-An Yan

Caractérisation d'une classe d'ensembles convexes de L^1 ou H^1

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 220-222
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__220_0>

CARACTERISATION D'UNE CLASSE D'ENSEMBLES CONVEXES DE L^1 OU H^1

par YAN Jia-An[1]

Le théorème de Dellacherie et Mokobodzki sur la caractérisation des semimartingales repose sur le seul résultat suivant (voir Meyer [1] ou Jacod [2])

<u>Théorème 1</u>. Soit K un sous-ensemble convexe de $L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$. Si pour tout $\varepsilon>0$ il existe un réel $c>0$ tel que $P\{\xi>c\}\leq\varepsilon$ pour tout $\xi\in K$, il existe une variable aléatoire bornée Z, telle que $Z>0$ p.s. et que $\sup_{\xi\in K} E[Z\xi]<\infty$.

Le but de cette note est de préciser le théorème 1, et d'établir un résultat analogue dans l'espace H^1 de martingales.

Soit $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un espace probabilisé. Nous désignerons par L^1 l'espace $L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$, par B_+ l'ensemble des v.a. bornées ≥ 0 sur Ω. Pour $G\subset L^1$, $\overline{G}$ désigne l'adhérence de G dans L^1. Nous mettons alors le théorème 1 sous forme de condition nécessaire et suffisante.

<u>Théorème 2.</u> Soit K un sous-ensemble convexe de L^1 tel que $0\in K$. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

a) Pour tout $\eta\in L^1_+$, $\eta\neq 0$, il existe $c>0$ tel que $c\eta\notin\overline{K-B_+}$.

b) Pour tout $A\in\mathcal{F}$ tel que $P(A)>0$, il existe $c>0$ tel que $cI_A\notin\overline{K-B_+}$.

c) Il existe une v.a. bornée Z telle que $Z>0$ p.s. et $\sup_{\xi\in K} E[Z\xi]<+\infty$.

Démonstration. Il est clair que a) => b). Nous allons montrer que b)=>c), en nous inspirant beaucoup de Meyer [1]. Supposons que la condition b) soit vérifiée. Soit $A\in\mathcal{F}$ tel que $P(A)>0$. Par hypothèse il existe un réel $c>0$ tel que $cI_A\notin\overline{K-B_+}$. Comme le dual de L^1 est L^∞ et $K-B_+$ est convexe, d'après le théorème de Hahn-Banach (plus précisément, le théorème d'Ascoli-Mazur) il existe une v.a. bornée Y telle que

$$(1)\qquad \sup_{\xi\in K,\ \eta\in B_+} E[Y(\xi-\eta)] < cE[YI_A] .$$

Remplaçant η par $a\eta$ ($a\in\mathbb{R}_+$) et faisant tendre a vers $+\infty$, on voit que $Y\geq 0$ p.s.. Appliquant (1) avec $\eta=0$, on trouve alors

$$\sup_{\xi\in K} E[Y\xi] \leq cE[YI_A] < +\infty .$$

Soit $H = \{ Y\in B_+ : \sup_{\xi\in K} E[Y\xi] < +\infty \}$; d'après ce qui précède H n'est pas vide. Notons $\underline{C} = \{ \{Z=0\},\ Z\in H \}$, montrons que $\underline{C}$ est stable par intersection dénombrable. Soit (Z_n) une suite d'éléments de H . Notons

1. Institut de Recherche Mathématique, Academia Sinica, Pékin, Chine.

$c_n = \sup_{\xi\in K} E[Z_n\xi]$, $d_n=\|Z_n\|_{L^\infty}$, et posons $Z=\Sigma_n b_n Z_n$, où les $b_n>0$ sont tels que $\Sigma_n b_n c_n <+\infty$, $\Sigma_n b_n d_n <+\infty$; il est évident que $Z\in H$ et que $\{Z=0\}= \cap_n \{Z_n=0\}$. Il existe donc $Z\in H$ tel que $P\{Z=0\}=\inf_{C\in \underline{C}} P(C)$, nous allons montrer que $Z>0$ p.s.. Supposons que $P\{Z=0\}>0$. Soit $Y\in H$ vérifiant (1) avec $A=\{Z=0\}$. Comme $0\in K$, on a $0<E[YI_A]=E[YI_{\{Z=0\}}]$, et alors la v.a. $Y+Z$ appartient à H, avec $P\{Y+Z=0\}=P\{Z=0\}-P\{Z=0,Y>0\}<P\{Z=0\}$, ce qui est absurde puisque $P\{Z=0\}$ est minimale. Donc $Z>0$ p.s. et on a démontré que b) => c).

Il nous reste à démontrer que c)=>a). Supposons que la condition a) ne soit pas satisfaite. Il existe alors $\eta\in L^1_+$, $\eta\neq 0$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on ait $n\eta\in\overline{K-B_+}$, de sorte qu'il existe $\xi_n\in K$, $\zeta_n\in B_+$ et $\delta_n\in L^1$ tels que $n\eta = \xi_n-\zeta_n-\delta_n$, $\|\delta_n\|_{L^1} \leqq 1/n$. Si Z est une v.a. bornée par 1 telle que $Z>0$ p.s. on a alors $E[Z\xi_n] \geqq nE[Z\eta] - 1/n$, donc $\sup_{\xi\in K} E[Z\xi] = +\infty$, et la condition c) n'est pas satisfaite. CQFD.

Pour voir que le théorème 2 entraîne le théorème 1, on peut se ramener par translation au cas où $0\in K$. Vérifions alors que l'hypothèse du théorème 1 entraîne la condition b) du théorème 2. Soit $A\in\mathcal{F}$ tel que $P(A)>0$. Par hypothèse il existe un réel $c>0$ tel que $P\{\xi>c\}\leq P(A)/2$ pour tout $\xi\in K$. On voit aisément que $2cI_A\notin \overline{K-B_+}$, donc la condition b) est satisfaite.

Passons au cas de H^1. Nous nous plaçons sur un espace probabilisé filtré $(\Omega,\mathcal{F},P, (\mathcal{F}_t))$ satisfaisant aux conditions habituelles. Nous ne restreignons pas la généralité en supposant que $\mathcal{F}=\mathcal{F}_{\infty-}$, ce qui nous permet d'<u>identifier</u> une martingale uniformément intégrable (M_t) à sa v.a. terminale M_∞ (ainsi I_A désigne ci-dessous la martingale $P(A|\mathcal{F}_t)$, pour $A\in\mathcal{F}$). Dans l'énoncé suivant, B_+ désigne l'ensemble des martingales positives bornées, et les adhérences sont prises dans H^1.

<u>Théorème 3</u>. Soit K un sous-ensemble convexe de H^1 contenant 0. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

a) Pour tout $N\in H^1_+$, $N\neq 0$, il existe un réel $c>0$ tel que $cN \notin \overline{K-B_+}$.

b) Pour tout $A\in\mathcal{F}$ tel que $P(A)>0$, il existe $c>0$ tel que $cI_A\notin \overline{K-B_+}$.

c) Il existe une martingale $Z\in BMO$, telle que $Z>0$ p.s. et que l'on ait $\sup_{\xi\in K} E[[Z,\xi]_\infty] < +\infty$.

Démonstration. Le raisonnement est tout à fait analogue à celui du théorème 2 : on applique le théorème de Hahn-Banach en utilisant le fait que le dual de H^1 est BMO, la dualité étant donnée par $< \xi,Y > = E[[\xi,Y]_\infty]$ en général (qui vaut aussi $E[\xi Y]$ si $\xi\in B_+$. Les détails sont laissés aux lecteurs.

[1]. Meyer (P.A.). Sém. Prob. XIII, p.620-623 (LN 721, Springer 1979).
[2]. Jacod (J.). Calcul stochastique et problèmes de martingales. LN 714.

COMMENTAIRES DU SEMINAIRE

1) Détails de démonstration. Au bas de la page 1, il est clair que H n'est pas vide, car $0 \in H$. Le "d'après ce qui précède" est donc inutile. Page 2, de même, le fait que $0 \in K$ entraîne que les c_n sont $\geqq 0$.

2) Commentaires (C. Dellacherie). a) Tout élément de L^1_+ étant limite d'une suite d'éléments de B_+, on peut remplacer $\overline{K-B_+}$ par $\overline{K-L^1_+}$ (soit dit en passant, on ne peut ni ôter l'adhérence au $K-L^1_+$, ni omettre que $0 \in K$), et la condition $\zeta \in \overline{K-L^1_+}$ peut s'écrire

il existe des $k_n \in K$ tels que $(\zeta - k_n)^+ \to 0$ p.s.

b) La démonstration du théorème 1 par Mokobodzki permet de montrer que, étant donnée une suite (K_n) de convexes bornés en probabilité, il existe une même v.a. bornée Z, p.s. >0, telle que $\sup_{\xi \in K_n} E[Z\xi] < \infty$ pour tout n. Peut on démontrer ce résultat par la méthode de Yan ?

Réponse (P.A. Meyer) : ce résultat peut se déduire directement du théorème 1, et donc aussi bien de la démonstration de Yan que de celle de Mokobodzki ! En effet, soit pour $n \geqq 0$, $m \geqq 1$ un nombre $c_{nm} > 0$ tel que

$$\forall \xi \in K_n \ , \ P\{\xi > c_{nm}\} \leqq \frac{1}{m} 2^{-(n+1)}$$

Choisissons des $\lambda_n > 0$ tels que, pour tout m, on ait $c_m = \Sigma_n \lambda_n c_{nm} < \infty$. Posons $L_k = \Sigma_{p \leqq k} \lambda_p K_p$; nous formons ainsi une suite croissante de parties convexes de L^1, soit L leur réunion, qui est encore une partie convexe de L^1. Tout élément ξ de L est une somme (finie) $\Sigma_n \lambda_n \xi_n$, $\xi_n \in K_n$, et on a

$$P\{\ \xi \geqq c_m\ \} \leqq \Sigma_n P\{\xi_n \geqq c_{nm}\} \leqq \Sigma_n \frac{1}{m} 2^{-(n+1)} = \frac{1}{m}$$

donc L satisfait au théorème 1, et la v.a. Z construite pour L convient pour chacun des K_n (cette astuce d'enveloppe convexe non fermée est empruntée à une autre démonstration de Mokobodzki !).