SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN PELLAUMAIL

Remarques sur l'intégrale stochastique

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 209-219
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__209_0>

Séminaire de Probabilités
Volume XIV (1978/79)

REMARQUES SUR L'INTEGRALE STOCHASTIQUE

J. PELLAUMAIL (*)

1. INTRODUCTION

Le but de l'exposé qui suit est de donner quelques remarques très simples, en liaison avec la construction de l'intégrale stochastique et l'étude des équations différentielles stochastiques. Le théorème 2 donné au § 5 ci-après, quoique d'un énoncé extrêmement simple, généralise les principaux théorèmes d'existence et d'unicité d'équations différentielles stochastiques dans le cas lipschitzien. Cet exposé s'adresse à des lecteursfamiliarisés avec la terminologie classique : notamment on ne redonne pas la définition de termes tels que adapté, martingale, prévisible, temps d'arrêt, etc... Rappelons seulement ce qui suit :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$ une base stochastique avec $T = [0, t_m]$.
Deux processus X et Y définis sur cette base stochastique sont dits P-équivalents si $P\{\omega : \exists\, t,\ X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\} = 0$

Un processus X est dit prélocalement borné sur $[0,u[$ s'il existe une suite croissante $(u(k))_{k>0}$ de temps d'arrêt telle que $\lim_{k\to\infty} P([u(k) < u]) = 0$ et, pour tout entier k, $X.1_{[0,u(k)[}$ est uniformément borné.

2. SUR LA DEFINITION DE L'INTEGRALE STOCHASTIQUE

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$ une base stochastique et H un espace de Banach séparable. Considérons le problème de la définition de l'intégrale stochastique $\int YdX$ d'un processus prévisible réel uniformément borné Y par rapport à un processus X à valeurs dans H. On peut faire plusieurs sortes d'hypothèses sur le processus X, notamment :

a) Le processus X est un R-π-processus,(resp. R-π^*-processus), c'est-à-dire qu'il existe un processus Q cadlag adapté croissant tel que pour tout temps d'arrêt u et pour tout processus prévisible réel Y uniformément borné, on ait :

(*) Université de Rennes

$$E\{\|\int_{]0,u[} YdX\|^2\} \text{ (resp. } E\{\sup_{t<u} \|\int_{]0,t]} YdX\|^2\}) \leqslant E\{Q_{u^-} \cdot \int_{]0,u[} |Y|_t^2 \, dQ_t\}$$

b) Le processus X est O-sommable c'est-à-dire que l'application $A \longrightarrow \int 1_A \, dX$ est une mesure définie sur la tribu des prévisibles et à valeurs dans l'espace $L_0^H(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.

c) Le processus X est une semi-martingale, c'est-à-dire la somme d'une martingale locale et d'un processus à variation bornée.
Dans le cas particulier où H est un espace vectoriel de dimension finie, les trois propriétés ci-dessus a), b), et c) sont équivalentes (cf. MeP-2).
Notons à ce sujet, que le fait que b) implique c) (théorème de Dellacherie, Meyer, Mokobodski) repose sur un lemme topologique essentiellement dû à Nikishin (cf. [Nik]).
Dans le cas où H n'est pas de dimension finie, on a c) implique a) et a) implique b) mais ceci n'est pas réciproque.

La condition c) a été introduite et étudiée systématiquement par l'école de Strasbourg. La condition b) est évidemment la condition naturelle pour avoir une "bonne définition" de l'intégrale stochastique : il faut noter que si cette condition est satisfaite, on peut prouver la formule de Ito ; Par contre, la condition b) ne semble pas suffisante pour prouver l'existence et l'unicité des solutions d'équations différentielles stochastiques ; pour obtenir de tels résultats, la "bonne hypothèse" semble de supposer que X est un π^*-processus.
Il faut aussi remarquer que la condition a) est très commode pour construire et étudier l'intégrale stochastique ; c'est cette condition qui est utilisée au début dans [MeP-2], pour des motifs pédagogiques : la condition b) est plus générale mais sa mise en oeuvre nécessite l'utilisation de théorèmes difficiles sur les mesures vectorielles.
De plus, la condition a) permet de définir l'intégrale stochastique $\int YdX$ pour une classe très vaste de processus Y. Plus précisément, on a le théorème suivant sous une forme qui m'a été suggérée par M. Meyer :

3. INTEGRALE STOCHASTIQUE MAXIMALE

Théorème 1 : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$ une base stochastique avec $T = [0, t_m]$.

Soit X un π-processus à valeurs dans un espace de Banach H séparable, dominé par le processus Q c'est-à-dire que, pour tout temps d'arrêt u et pour tout processus prévisible réel Y, on a :

$$E\{\|\int_{]0,u[} Y\, dX\|^2\} \leqslant E\{Q_{u^-} \cdot \int_{]0,u[} |Y|_t^2 \, d\, Q_t\}$$

Soit v un temps d'arrêt.

Soit U un processus réel prévisible tel que le processus $W_t = \int_{]0,t]} |U|_s^2 \cdot dQ_s$ soit fini pour $t < v$, ce qui est notamment le cas si U est prélocalement borné sur $[0,v[$.

Alors, le processus intégrale stochastique $Z_t = \int_{]0,t]} Y\, dX$ est bien défini sur l'intervalle $[0,v[$.

Preuve :

Pour tout k, on pose $w(k) := v \wedge \inf. \{t : W_t > k\}$.

L'intégrale stochastique Z se construit comme une intégrale L^2 ordinaire sur $[0,w(k)[$ (cf. [MeP-2]) et on a un processus intégrale stochastique Z^k sur $[0,w(k)[$; ensuite, l'unicité de l'intégrale stochastique permet de définir Z sur $[0,v[$ par $Z.1_{[0,w(k)[} = Z^k.1_{[0,w(k)[}$

4. DONNEES ET NOTATIONS

Dans la suite, on considère :

- T un intervalle borné $[0,t_m]$ de l'axe réel
- H un espace vectoriel topologique muni d'une distance d, compatible avec sa topologie, pour laquelle H est séparable et complet ; on posera $\|h\| = d(h,0)$.
- $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}) = B^I$ une base stochastique complète, la famille $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ étant supposée continue à droite : quand on parlera de processus adapté, de temps d'arrêt, etc..., ce sera toujours par rapport à cette base de processus.

On notera S (resp. S_b) l'espace des processus (resp. des processus uniformément bornés) cadlag adaptés à la base B^I, à valeurs dans H et définis à une P-équivalence près. On notera C l'ensemble des processus croissants positifs cadlag adaptés à la base B^I.

5. THEOREME D'EXISTENCE ET D'UNICITE

Théorème 2 : Soit f une application de S_b dans S satisfaisant aux deux conditions suivantes :

(i) f est non anticipative au sens suivant : pour tout temps d'arrêt u, $X \in S_b$, $Y \in S_b$ et $X.1_{[0,u[} = Y.1_{[0,u[}$ implique $f(X).1_{[0,u]} = f(Y).1_{[0,u]}$

(ii) pour tout réel d > 0 il existe un élément Q^d de C tel que, si X et Y sont deux éléments de S uniformément bornés par d, on a, pour tout temps d'arrêt u :

$$E\{\sup_{t<u} . ||f(X)_t - f(Y)_t||^2\} \leqslant E\{Q^d_{u-} . \int_{]0,u[} \sup_{s<t} ||X_s - Y_s||^2 \, . \, d\, Q^d_t\}$$

Alors il existe un temps d'arrêt prévisible v et un processus X définis sur $[0,v[$ tels que, si on pose $w(k) := v \wedge \inf. \{t : ||X_t|| > k\}$, on a :

(iii) $X.1_{[0,w(k)]} = f(X).1_{[0,w(k)]}$

(iv) pour tout entier k, $P([w(k) < v < t_m]) = P([v < t_m])$

(v) $w(k) \uparrow v$

De plus, $X.1_{[0,v[}$ est unique à une P-équivalence près.

Preuve :

Tout d'abord, soit $(u(n))_{n>0}$ une suite de temps d'arrêt croissant vers un temps d'arrêt u. Soit X un processus appartenant à S tel que, pour tout entier n, $X.1_{[0,u(n)[}$ soit uniformément borné par n. Alors f(X) est défini, à une P-équivalence près, sur le domaine $U = \bigcup_{n>0} [0,u(n)]$ (compte-tenu de la condition (i)). Notamment le processus $f(X)$ est défini, à une P-équivalence près, pour tout processus X prélocalement borné.

De plus, si u est un temps d'arrêt et si X est un processus défini sur $[0,u[$ tel que $X.1_{[0,u[}$ appartienne à S et soit prélocalement borné, alors $f(X.1_{[0,u[})$ est défini sur $[0,u[$; dans ce cas, par abus de notation, on pose $f(X) := f(X.1_{[0,u[})$ sur $[0,u[$.

La preuve du théorème ci-dessus, à quelques détails formels près, est exactement la même que celle proposée en [MeP-1] ; voir aussi [MeP-2] . Nous la reproduisons dans le contexte ici proposé pour la commodité du lecteur.

Cette preuve se décompose en trois étapes :

- unicité (§ 6)
- extension d'une solution (§ 7)
- solution maximale (§ 8).

6. UNICITE

On se place sous les hypothèses du théorème 2. Soit v et v' deux temps d'arrêt et X et X' deux processus définis respectivement sur $[0,v[$ et $[0,v'[$ et tels que $X = f(X)$ sur $[0,v[$ et $X' = f(X')$ sur $[0,v'[$. Alors, X est P-équivalent à X' sur $[0,v \wedge v'[$.

Preuve :

On pose : $u := v \wedge v' \wedge \inf.\{t : ||X_t - X'_t|| > 0\}$.

Si $P[u < (v \wedge v')] = 0$, l'unicité est démontrée. On suppose donc $P[u < (v \wedge v')] > 0$. Les processus X et X' étant cadlag, il existe un nombre positif d et un temps d'arrêt w' tels que

$$\sup_{u \leqslant s < w'} (||X_s|| + ||X'_s||) \leqslant d$$

$$P([w' > u]) > 0 \text{ et } w' \leqslant (v \wedge v')$$

Soit Q^d le processus intervenant dans la condition (ii).

Soit w le temps d'arrêt défini par

$$w := w' \wedge \inf.\{t : t \geq u,\ Q_t^d(Q_t^d - Q_u) > \tfrac{1}{2}\}$$

On pose $h := E\{\sup_{u \leq s < w} .\ ||X_s - X'_s||^2\}$ et on a :

$$h = E\{\sup_{u \leq s < w} ||f(X)_s - f(X')_s||^2\}$$

$$\leq E\ \{Q_{w-}^d . \int_{]0,w[} \sup_{s<t} .||X_s - X'_s||^2 . d\,Q^d\}$$

$\leq 1/2\ h$ ce qui implique $h = 0$ et $P[u < (v \wedge v')] = 0$.

7. EXTENSION D'UNE SOLUTION

On se place sous les hypothèses du théorème 2. Soit X un processus défini sur $[0,u[$ tel que $X.1_{[0,u[}$ appartient à S et tel que $X = f(X)$ sur $[0,u[$. On suppose que :

$$P\ \{\omega : u(\omega) < t_m \text{ et } \lim_{t \uparrow u(\omega)} ||X_t(\omega)|| < +\infty\} = a > 0$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un temps d'arrêt v et un processus Y tels que :

(i)' $P[v > u] \geq a - 2\varepsilon$

(ii)' *$Y.1_{[0,v[}$ appartient à S et Y est P-équivalent à f(Y) sur $[0,v[$*

(iii)' *X est P-équivalent à Y sur $[0,u[$*

Preuve :

Soit $d > 0$ tel que, si on pose $u' := u \wedge \inf.\{t : ||X_t|| > \frac{1}{2} d\}$ on a $P[u' = u < t_m] \geq a - \varepsilon$. On pose $X^o := X.1_{[0,u'[}$, $X^1 := f(X^o)$,

$$u(1) := \inf.\{t : t \geq u',\ Q_t^d.(Q_t^d - Q_{u'}^d) > \tfrac{1}{8},\ ||X_t^1 - X_t^o|| > (\tfrac{1}{4} d \wedge \tfrac{\sqrt{\varepsilon} d}{32})\ .$$

La continuité à droite de Q^d, X^o et X^1 implique que l'on a $P[u(1) > u'] = P[u' < t_m]$. On construit alors la suite $(u(k))_{k>1}$ de temps d'arrêt et la suite associée de processus $(X^k)_{k>0}$ de la façon suivante :

pour $k \geq 1$, $X^{k+1} := f(X^k).1_{[0,u(k)[}$

$$u(k+1) := u(k) \wedge \inf.\{t : ||X_t^{k+1} - X_t^k|| > 2^{-(k+2)}.\, d\}$$

La suite de temps d'arrêt $(u(k))_{k>0}$ décroit vers un temps d'arrêt w et, pour tout k on a $||X_t^{k+1}|| \leq d$ sur $[0,u(k+1)[$.

On pose $h_k := E\{\sup_{t<u(k+1)} ||X_t^{k+1} - X_t^k||^2\}$ et on a :

$$h_k = E\{\sup_{t<u(k+1)} ||f(X^k)_t - f(X^{k-1})_t||^2\}$$

$$\leq E\{Q^d_{u(k)-} \int_{]0,u(k)[} \sup_{s<t} .||X_s^k - X_s^{k-1}||^2 .\, d\, Q_t^d\}$$

$$\leq \frac{1}{8} h_{k-1} \leq (\frac{1}{8})^{k-1} h_1 \leq (\frac{1}{8})^{k+2} \varepsilon\, d^2$$

Or $P[u(k+1) < u(k)] \leq h_k.4^{(k+2)} d^{-2} \leq 2^{-(k+2)}.\varepsilon$ puisque $u(k+1) < u(k)$ implique $||X^{k+1} - X^k||^2 \geq 4^{-(k+2)} d^2$

On a donc $P[w < u(1)] \leq \varepsilon$ donc
$P[w > u \text{ et } u < t_m] \geq a - 2\varepsilon$

Par ailleurs, la suite $(X^k)_{k>0}$ est de Cauchy uniformément par trajectoires sur $[0,w[$ (lemme de Borel-Cantelli) et uniformément bornée par d, cette suite converge donc, sur $[0,w[$, vers un processus cadlag Z tel que $Z = f(Z)$ sur $[0,w[$ puisque $\lim_{k\to\infty}.E\{\sup_{t<w}.||X_t^k - Z_t||^2\} = 0$.

Le lemme d'extension est alors démontré en prenant $Y = X$ sur $[0,u[$ et $Y = Z$ sur $[0,w[$ (par construction, $Y = Z$ sur $[0, u \wedge w[$).

8. SOLUTION MAXIMALE

On se propose maintenant de prouver le théorème 2 en utilisant les deux lemmes précédents.

On considère la famille A des temps d'arrêt u tels qu'il existe X avec $X = f(X)$ sur $[0,u[$. On désigne par v le sup. essentiel (pour P) des éléments de A. Si u et u' appartiennent à A, X et X' étant les processus associés, on peut poser

$$X'' := X.1_{[0,u[} + X'.1_{[u,u \vee u'[}$$

et on a $X'' = f(X'')$ sur $[0,u \vee u'[$ (condition (i) du théorème 1). On peut donc extraire de A une suite croissante $(u(n))_{n>0}$ de temps d'arrêt telle que $v = \lim_{n\to\infty}.u(n)$ Pour tout n, soit X^n tel que $X^n = f(X^n)$ sur $[0,u(n)[$; on peut alors définir le processus X sur $[0,v[$ en posant

$X.1_{[0,u(n)[} = X^n.1_{[0,u(n)[}$ (compte-tenu du lemme d'unicité).

On considère alors la suite de temps d'arrêt :
$w(n,k) := u(n) \wedge \inf.\{t : ||X_t|| > k\}$
$w(k) := \sup_n w(n,k)$

On a $w(k) \leqslant v$ et on veut prouver que

$$P([w(k) = v < t_m]) = 0$$

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il exsiste un entier k tel que

$$P([w(k) = v < t_m]) = 2\varepsilon > 0$$

Par construction, $X = f(X)$ sur $[0,w(k)[$. De plus, comme le processus X est borné par k sur $[0,w(k)[$, $f(X)=f\circ f(X)$ sur $[0,w(k)]$. Le lemme d'extension nous permet alors de dire qu'il existe un temps d'arrêt w' qui appartient à A et tel que :

$$P([w' > w(k)]) > P([w(k) < t_m]) - \varepsilon$$

ceci implique $P([w' > v]) > \varepsilon$, ce qui contredit la définition de v.

On a donc prouvé que, pour tout entier k,

$$P([w(k) = v < t_m]) = 0$$

La suite $(w(k))_{k>0}$ est donc une suite qui "annonce" v et v est un temps d'arrêt prévisible ce qui achève la preuve du théorème 2.

9. GENERALISATIONS

Pour alléger l'exposition, on s'est volontairement placé dans un cadre simple à formaliser. Quoique le cadre considéré ici soit déjà très général, il est évidemment possible d'affaiblir les diverses hypothèses :

1°) Dans la condition (ii) du théorème 2, on peut remplacer (dans les deux membres) $||.||^2$ par tout autre fonction croissante de $||.||$.

2°) Il n'est pas nécessaire que f(X) soit un processus partout défini quand X est uniformément borné : il suffit que X soit défini jusqu'à un temps d'arrêt u tel que $\lim\limits_{t\uparrow u} ||X_t|| = +\infty$ si $u < t_m$

3°) Dans la condition (ii), il suffit d'avoir une majoration de la forme

$$\leqslant E\ \{\hat{Q}^d_{u-} \int_{]0,u[} \sup_{s<t} .||X_s - Y_s||^2 . d\ Q^d_t\}$$

où $\hat{Q}^d$ appartient à C et Q^d est une mesure aléatoire positive "continue à droite".

4°) Si le processus "dominant" Q est prévisible, il suffit d'avoir la majoration (ii) le saut en u compris : on utilise le fait que, si $v := \inf.\{t : Q_t > d\}$, v est prévisible est donc peut-être annoncé par une suite de temps d'arrêt strictement plus petits que v ; plus généralement, il suffit, par exemple, que l'on ait :

$$E\{\sup_{t<u} .\ ||f(X)_t - f(Y)_t||^2$$

$$\leqslant E\{Q^d_{u-} . \int_{]0,u[} \sup_{s<t} ||X_s - X_s||^2\ .\ d\ Q^d_t\}$$

$$+ E\{\hat{Q}^d_u\ . \int_{]0,u]} \sup_{s<t} ||X_s - Y_s||^2\ .\ d\ \hat{Q}^d_t\}$$

avec Q^d élément de C comme avant et $\hat{Q}^d$ élément de C <u>et</u> prévisible.

La technique évoquée plus haut a été utilisée par Jacod.

5°) On peut évidemment mélanger les diverses généralisations ci-dessus.

10. STABILITE

Dans le cadre considéré ici, l'étude de la stabilité de la solution X de $X = f(X)$ quand on "perturbe légèrement" f peut s'étudier exactement comme dans [MeP-2]. Plus précisément, on considère deux fonctionnelles f et f' comme dans le théorème 2. Pour simplifier, on suppose qu'il existe un élément Q de C tel que, pour tout temps d'arrêt u et pour tout couple (X,Y) d'éléments de S_b, on a :

$$E\{\sup_{t<u} . ||(f(X))_t - (f(Y))_t||^2\} \leq E\{Q_{u^-} . \int_{]0,u[} \sup_{s<t} . ||X_s - Y_s||^2 . \, d\, Q_t\}$$

et de même en remplaçant f par f' (avec le même processus Q).

Soit $d > 0$ et $v := \inf.\{t : Q_t > d\}$. Soit Z une solution de $f(Z) = Z$ sur $[0,v[$; Z est la solution dans le cas "non perturbé". On pose

$$\gamma(f') = E\{\sup_{t<v} . ||f(Z)_t - f'(Z)_t||^2\}$$

$$\delta(f') = E\{\sup_{t<v} . ||Z_t - Z'_t||^2\}$$

où Z' est la solution de $Z' = f'(Z')$ sur $[0,v[$ (Z' est la solution dans le cas perturbé).

On a alors $\lim\limits_{\gamma(f')\downarrow 0} . \delta(f') = 0$

Ceci peut se vérifier exactement comme dans [MeP-2].

BIBLIOGRAPHIE

[Del] C. DELLACHERIE, *Capacités et processus stochastiques,* Ergebn. der Math., vol. 67, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1972.

[Dol] C. DOLEANS-DADE, *On the existence and unicity of solutions of stochastic integral equations,* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Werw. Gebiete, 36 (1976), 93-101.

[Eme] M. EMERY, *Stabilité des solutions des équations différentielles stochastiques, Application aux intégrales multiplicatives stochastiques,* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Werw. Geb., 41, (1978), 241-262.

[GrP] B. GRAVEREAUX, J. PELLAUMAIL, *Formule de Ito pour des processus à valeurs dans des espaces de Banach,* Ann. Inst. H. Poincaré, 10, n°4 (1974), 339-422.

[MeP-1] M. METIVIER, J. PELLAUMAIL, *Notions de base sur l'intégrale stochastique,* Séminaire de Rennes, 1975.

[MeP-2] M. METIVIER, J. PELLAUMAIL, *Stochastic integration,* à paraître.

[MeP-3] M. METIVIER, J. PELLAUMAIL, *Mesures stochastiques à valeurs dans des espaces L_o,* Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Werw. Geb., 40 (1977), 101-114.

[Mey] P.A. MEYER, *Un cours sur les intégrales stochastiques,* Séminaire de probabilités X, Lecture Notes in Mathematics, n° 511, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976.

[Nik] E.M. NIKISHIN, *Resonance theorems and superlinear operators,* Transl. of Uspekhi Mat. Nauk. Vol XXV n° 6, Nov-Déc. 1970

[Pro] Ph. E. PROTTER, *On the existence, uniqueness, convergence and explosions of solutions of systems of stochastic integral equations,* Ann. of Probability, 5, n° 2 (1977), 243-261.