SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

J. AUERHAN
DOMINIQUE LÉPINGLE
MARC YOR

Construction d'une martingale réelle continue de filtration naturelle donnée

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 200-204
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__200_0>

CONSTRUCTION D'UNE MARTINGALE REELLE CONTINUE, DE FILTRATION NATURELLE DONNEE.

J. AUERHAN, D. LEPINGLE ET M. YOR

Position du problème et résumé.

On construit à l'aide de différents procédés une martingale continue réelle dont la filtration naturelle est celle d'un nombre fini ou infini (mais dénombrable) de mouvements browniens réels indépendants.

1. Notations et préliminaires.

$(\Omega, F, (\mathcal{F}_t), P)$ est l'espace de probabilité filtré de référence. $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ vérifie les conditions habituelles, ainsi que toutes les filtrations utilisées dans la suite. $\mathcal{P}$ est la tribu prévisible, sur $\Omega \times]0,\infty[$, associée à $(\mathcal{F}_t)$.

Si $Z : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^p$ $(p \leq \infty)$ est un processus $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes F$ mesurable, on note $\mathcal{F}(Z)$ la filtration naturelle de Z, c'est à dire : $(\mathcal{F}_t^0(Z) = \sigma\{Z_s, s \leq t\}, t \geq 0)$ rendue (F,P) complète, et continue à droite.

Si Z et Z' sont deux tels processus, on dit que :

- Z domine Z' (ou : Z' est dominé par Z) si $\mathcal{F}(Z') \subseteq \mathcal{F}(Z)$.
- Z équivaut à Z' (ou : Z et Z' sont équivalents) si $\mathcal{F}(Z') = \mathcal{F}(Z)$.

Rappelons, d'après un résultat classique d'approximation, que :

(1) Si M et N sont deux martingales continues, telles que M domine N, alors M domine également $\langle M,N \rangle$.

Le lemme suivant - qui joue un rôle fondamental au paragraphe 2 - est dû à Dellacherie et Stricker ([1], p. 366 et 367).

Lemme : Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $L^1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ est séparable

(ii) il existe une sous-tribu séparable $\mathcal{H}$ de $\mathcal{F}_\infty$ telle que tout ensemble de $\mathcal{F}_\infty$ soit P p.s égal à un ensemble de $\mathcal{H}$

(iii) il existe un processus strictement croissant, continu à gauche borné par 1 et $(\mathcal{F}_t)$ adapté, A, tel que tout ensemble de $\mathcal{P}$ soit P-indistinguable d'un ensemble de $\sigma(A)$.

Remarque : Rappelons que pour tout $(\mathcal{F}_t)$t-a T, et tout ensemble $\Gamma \in \mathcal{F}_{T-}$, il existe un processus $(\mathcal{F}_t)$ prévisible Z tel que $1_\Gamma = Z_T$, P p.s sur $(T<\infty)$.

On en déduit immédiatement que, si l'assertion (iii) est vérifiée, l'égalité $\mathcal{F}=\mathcal{F}(A)$ s'ensuit.

2. Une construction générale.

Le théorème suivant résoud en particulier le problème posé en début d'article.

Théorème : Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) Il existe une martingale locale continue M, dont la filtration naturelle est égale à $\mathcal{F}$, et telle que :
$P(d\omega)$ p.s, $d\langle M,M\rangle_t(\omega)$ est équivalente à (dt).

2) Il existe un $(\mathcal{F}_t)$ mouvement brownien réel et $L^1(\Omega,\mathcal{F}_\infty,P)$ est séparable.

Démonstration : 1) $\Longrightarrow$ 2) :

- Si $\frac{d\langle M,M\rangle_t}{dt} = H_t$ $(H\in\mathcal{P})$, alors, d'après un théorème classique de Paul Lévy,

$$\beta_t = \int_0^t 1/\sqrt{H_s}\, dM_s \text{ est un } (\mathcal{F}_t) \text{ mouvement brownien réel.}$$

- D'autre part, l'assertion (ii) du lemme est vérifiée avec $\mathcal{H}=\sigma\{M_u, u\in\mathbb{Q}_+\}$.

2) $\Longrightarrow$ 1). On note $(\beta_t)_{t\geq 0}$ un $(\mathcal{F}_t)$ mouvement brownien.

D'après (1), appliqué avec $M=N$, la martingale $M_t = \int_0^t A_s\, d\beta_s$ satisfait à 1), dès que A vérifie l'assertion (iii) du lemme.

Corollaire : Supposons que $(\mathcal{F}_t)$ soit la filtration naturelle d'un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^p (p\leq\infty)$. Il existe une martingale continue réelle admettant $(\mathcal{F}_t)$ pour filtration naturelle.

3. Construction explicite d'une martingale continue réelle, dont la filtration naturelle est celle d'un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^n (n\leq\infty)$.

On se propose ici de décrire différentes solutions "élémentaires" au problème posé, ne faisant pas intervenir le processus croissant générique A (voir le lemme). On note $B=(B^i)_{i\leq n(\leq\infty)}$ le mouvement brownien donné.

Remarquons tout d'abord que l'on peut toujours supposer $B_0 = 0$. En effet, s'il n'en est pas ainsi, la tribu $\sigma(B_0)$ est séparable, et il existe donc une variable réelle bornée, soit m, qui l'engendre. Si $(M_t, t\geq 0)$ est une solution, nulle en 0, du problème posé avec $(B_t-B_0, t\geq 0)$, alors $(m+M_t, t\geq 0)$ est une solution du problème relatif à $(B_t, t\geq 0)$. On suppose donc, dans la suite, $B_0 = 0$.

1° n fini.

a) Première méthode. Soit $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+\setminus\{o\}$, une fonction continue, engendrant la tribu borélienne (par exemple : $\Phi(x) = 2 + \frac{x}{1+|x|}$).

On définit :

$$\begin{aligned} M^{(1)} &= B^1. \\ M^{(2)} &= \int_0^\cdot \Phi(M_s^{(1)})dB_s^2 \\ &\vdots \\ M^{(p+1)} &= \int_0^\cdot \Phi(M_s^{(p)})dB_s^{p+1} \\ &\vdots \\ M^{(n)} &= \int_0^\cdot \Phi(M_s^{(n-1)})dB_s^n. \end{aligned}$$

A l'aide de (1), appliqué successivement à $M=N=M^{(i)}$, on montre par itération que, pour tout i, $M^{(i)}$ équivaut à $(B^1,\dots,B^i)$. $M^{(n)}$ est donc une solution au problème.

b) Seconde méthode. Rappelons que si M est une martingale continue nulle en 0, et si l'on note $S = \sup_{s\le\cdot} M_s$, le processus $Y = S-M$ équivaut à M. (Utiliser l'identité : $S_t = \int_0^t 1_{(Y_s=0)}dY_s$). On définit encore une suite de martingales $(M^{(p)}, 1\le p\le n)$ de la façon suivante :

$$M^{(1)} = B^1, \text{ et si l'on note } S^{(p)} = \sup_{s\le\cdot} M_s^{(p)},$$

$$M^{(p+1)} = \int_0^\cdot (S_s^{(p)}-M_s^{(p)})dB_s^{p+1}.$$

A l'aide du rappel précédent et de (1), on obtient l'équivalence pour tout $p\in[2,(n-1)]$ des processus $M^{(p+1)}$ et $(M^{(p)},B^{p+1})$. Par itération, $M^{(n)}$ et B sont équivalents.

c) Troisième méthode. A toute composante B^i du mouvement brownien B, on associe : $\sigma^i = \sup_{s\le\cdot} B_s^i$. L'identité suivante découle de la formule d'Ito, et de ce que la mesure aléatoire $d\sigma_s^i(\omega)$ est portée $\{s \,/\, \sigma_s^i(\omega) = B_s^i(\omega)\}$:

(2) $$(\sigma_t^i-B_t^i)^2 = t - 2\int_0^t (\sigma_s^i-B_s^i)dB_s^i.$$

Une légère modification (utilisant la formule (2)) de la démonstration du théorème 2 de [2], avec A matrice $n\times n$, diagonale, dont les éléments diagonaux sont n nombres réels distincts, non nuls, $(\lambda_i)_{i\le n}$, permet de montrer que la martingale :

$$M_t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_0^t (\sigma_s^i - B_s^i) dB_s^i$$

équivaut au processus $(\sigma^i - B^i, i \leq n)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, et donc à B, d'après le rappel fait en b).

2° n **infini**.

On s'inspire beaucoup de la troisième méthode du cas : n fini.
Remarquons tout d'abord que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la série : $\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \int_0^t (\sigma_s^i - B_s^i) dB_s^i$ converge normalement dans L^1 : en effet, il résulte aisément de la formule (2) que la somme des normes dans L^1 de ces variables est majorée par $\sum_i 2^{-i}\, t < \infty$.
Ainsi, d'après l'inégalité maximale de Doob, il existe une martingale continue $(M_t)_{t \geq 0}$ telle que, pour tout t :

$$M_t = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \int_0^t (\sigma_s^i - B_s^i) dB_s^i, \quad P \text{ p.s.}$$

Nous allons montrer que M est solution du problème posé.
Toujours d'après le raisonnement fait pour n fini, dans la démonstration du théorème 2 de [2], on obtient aisément, en posant $\lambda_i = 2^{-i}$, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les processus $Z_t^{(n)} = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^n (\sigma_t^i - B_t^i)^2$ sont dominés par M.
En appliquant à $Y^i = \sigma^i - B^i$ la remarque faite au début de b), il nous reste à montrer que, pour tout i, $(\sigma^i - B^i)^2$ est dominé par M. Ce résultat découle des remarques suivantes :

Soit $(x_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres positifs tels que $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i < \infty$ (on note toujours $\lambda_i = 2^{-i}$). Nous allons montrer que l'on peut exprimer la suite (x_i) mesurablement en fonction de la suite (f_n) définie par :

$$f_n = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^n x_i = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_n^i x_i .$$

En effet, la fonction $\ell(z) = \sum_{i=1}^{\infty} z^i x_i$ est holomorphe pour $|z| < 1/_2$, et donc :

$$x_i = \frac{1}{i\,!} \frac{d^i \ell}{dz^i}(o)$$

Or, puisque $\lambda_n \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0$, on a :

$$x_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{\lambda_n}, \quad x_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n - x_1 \lambda_n}{\lambda_n^2},$$

puis , de façon générale :

$$x_p = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n^p} \Big(f_n - \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_n^i x_i\Big),$$ d'où le résultat cherché, par récurrence.

4. En guise de conclusion.

Revenons à la situation générale étudiée dans les paragraphes 1 et 2. Supposons maintenant qu'il existe un $(\mathcal{F}_t)$ processus de Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$ et que, en outre, $L^1(\Omega,\mathcal{F}_\infty,P)$ soit séparable.

Si A désigne un processus continu, $(\mathcal{F}_t)$ adapté, satisfaisant à la condition (iii) du lemme (paragraphe 1), il est immédiat que la martingale $M_t = \int_0^t A_s\, d(N_s-s)$ a pour filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)$ (remarquer que : $\int_0^t A_s\, dN_s = \sum_{(s\leq t)} \Delta M_s$).

En rapprochant ce résultat du théorème du paragraphe 2, il est naturel de se poser la question suivante :

si $(\mathcal{F}_t)$ est une filtration telle que $L^1(\Omega,\mathcal{F}_\infty,P)$ soit séparable, existe-t-il une martingale réelle (M_t) dont la filtration naturelle soit identique à $(\mathcal{F}_t)$?

Ne sachant pas répondre en toute généralité à ce problème, signalons toutefois que son analogue "discret" admet une réponse positive :
en effet, si $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une filtration telle que $L^1(\Omega,\mathcal{F}_\infty,P)$ soit séparable, il existe pour tout $n\in\mathbb{N}$, une variable $Z_n\in b(\mathcal{F}_n)$, qui engendre, aux ensembles négligeables près, la tribu $\mathcal{F}_n$.

La martingale $M_n = Z_0 + (Z_1 - E(Z_1/\mathcal{F}_0)) +\ldots+ (Z_n - E(Z_n/\mathcal{F}_{n-1}))$ est alors une solution au problème.

REFERENCES :

[1] C. DELLACHERIE & C. STRICKER : Changements de temps et intégrales stochastiques. Sém. Proba. Strasbourg XI. Lect. Notes in Maths. 581. Springer (1977).

[2] M. YOR : Les filtrations de certaines martingales du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^n$. Sém. Proba. Strasbourg XIII. Lect. Notes in Maths. 721 Springer (1979).