Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Michel Émery

Compensation de processus à variation finie non localement intégrables

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 152-160
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__152_0>

Séminaire de Probabilités

Volume XIV

COMPENSATION DE PROCESSUS V.F. NON LOCALEMENT INTEGRABLES

par M. Emery

L'intégration stochastique de processus prévisibles non nécessairement bornés par rapport aux semimartingales, étudiée par Jacod, est présentée dans ce volume du Séminaire dans un exposé de Chou, Meyer et Stricker [2]. Ces auteurs jugent vraisemblable qu'il puisse exister une martingale locale M et un élément H de $L(M)$ (c'est-à-dire un processus prévisible intégrable par rapport à M) tels que l'intégrale $H{\cdot}M$ ne soit pas une martingale locale. Nous allons en apporter la preuve par un exemple, puis, en utilisant une remarque de Stricker selon laquelle les intégrales de ce type forment exactement la classe (Σ_m) introduite par Chou dans [1], établir pour cette classe des propriétés analogues à celles des martingales locales.

Pour l'exemple annoncé, on prend pour Ω le produit $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$; on appelle $\underline{\underline{F}}$ sa tribu borélienne, S et T ses applications coordonnées, P la probabilité qui fait de S et T des v.a. indépendantes de même loi exponentielle de paramètre 1, $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0}$ la plus petite filtration habituelle faisant de S et T deux temps d'arrêt. On pose

$$A = I_{[\![T,\infty[\![} - I_{[\![S,\infty[\![}$$

$$B = \text{projection duale prévisible de } A$$

(B est continu, et $dB_t = \begin{cases} 0 \text{ avant } S\wedge T \text{ et après } S\vee T \\ \operatorname{signe}(T-S)\,dt \text{ entre } S\wedge T \text{ et } S\vee T \end{cases}$) ;

$$M = A-B \; ; \; H_t = \frac{1}{t} .$$

Par rapport à M, H est intégrable au sens de Stieltjes, car M est nulle avant le temps p.s. strictement positif $S\wedge T$. Mais le processus v.f.

$H\bullet M$ n'est pas une semimartingale spéciale, car sa variation n'est pas localement intégrable : Soit R un temps d'arrêt non identiquement nul ; puisqu'il ne se passe rien avant $S\wedge T$, R est constant sur $\{R<S\wedge T\}$, et il existe $\varepsilon>0$ tel que $R\geq S\wedge T$ sur $\{S\wedge T<\varepsilon\}$, donc que $R\geq S\wedge T\wedge\varepsilon$; pourtant, comme $S\wedge T$ suit une loi exponentielle, $\int_0^{S\wedge T\wedge\varepsilon}|H_s||dM_s| = \frac{1}{S\wedge T}I_{\{S\wedge T<\varepsilon\}}$ n'est pas dans L^1.

Dans toute la suite, on se place sur un espace filtré $(\Omega,\underline{\underline{F}},P,(\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0})$ vérifiant les conditions habituelles. Voici d'abord pourquoi nous avons fait intervenir deux temps d'arrêt dans l'exemple ci-dessus :

PROPOSITION 1. <u>Soient</u> M <u>une martingale locale à sauts</u> ≥ 0 <u>et</u> H <u>un processus prévisible intégrable par rapport à</u> M. <u>Alors</u> $H\bullet M$ <u>est une martingale locale</u>.

<u>Démonstration</u>. En remplaçant H par $|H|$, on se ramène au cas $H\geq 0$. Comme les sauts du processus v.f. de la décomposition canonique d'une semimartingale spéciale à sauts ≥ 0 sont aussi ≥ 0, le théorème 1 de [2] permet d'écrire $M = V+N$, avec N martingale locale v.f. à sauts ≥ 0, où $H\bullet V$ existe au sens des martingales locales et $H\bullet N$ au sens de Stieltjes. Il reste à vérifier que $H\bullet N$ est une martingale locale.

Soit $A_t = \Sigma_{s\leq t}\Delta N_s$. Le compensateur de A est le processus croissant $B = A-N$. De $\int H_s dA_s \leq \int H_s|dN_s|$, on déduit que H est intégrable, au sens de Stieltjes, par rapport à A et à B. Le processus croissant $H\bullet B$ est prévisible, donc localement intégrable. Le processus croissant $H\bullet A$ détermine la même mesure sur la tribu prévisible, il est donc aussi localement intégrable. Comme $H^2\bullet[N,N]\leq (H\bullet A)^2$, $(H^2\bullet[N,N])^{\frac{1}{2}}$ est localement intégrable. ▬

Une conséquence, que l'on peut aussi vérifier directement, est que si $(\Omega,\underline{\underline{F}},P,(\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0})$ est l'espace naturel d'un processus de Poisson, l'espace des martingales locales (qui sont toutes les intégrales stochastiques par rapport à la martingale fondamentale) est fermé dansl'espace des semimartingales.

Nous allons maintenant établir que les intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales (respectivement semimartingales spéciales) sont exactement les semimartingales de la classe (Σ_m) (respectivement (Σ)) étudiée dans [1]. La proposition ci-dessous reste vraie si l'on y remplace l'exposant 1 par $p \in [1,\infty[$, les martingales locales par les martingales localement dans $\mathbf{M}^p$ et les semimartingales spéciales par les semimartingales localement dans $\mathbf{S}^p$ (les notations $\mathbf{M}^p$ et $\mathbf{S}^p$ désignant respectivement les espaces $\mathbf{H}^p$ de martingales et de semimartingales).

PROPOSITION 2. *Soit* X *une semimartingale. Les six assertions suivantes sont équivalentes* :

(i) X *s'écrit* $H \cdot M$ *où* M *est une martingale locale* (*resp. une semimartingale spéciale*) *et où* H *est dans* $L(M)$;

(ii) X *s'écrit* $H \cdot M$ *où* M *est dans* $\mathbf{M}^1$ (*resp.* $\mathbf{S}^1$) *et où* H *est dans* $L(M)$ *et strictement positif* ;

(iii) *il existe une partition dénombrable prévisible* (A_n) *de* $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ *telle que chacun des processus* $I_{A_n} \cdot X$ *soit une martingale locale* (*resp. une semimartingale spéciale*) ;

(iv) *il existe une partition dénombrable prévisible* (B_n) *de* $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ *telle que chacun des processus* $I_{B_n} \cdot X$ *soit dans* $\mathbf{M}^1$ (*resp.* $\mathbf{S}^1$) ;

(v) *il existe* K *dans* $L(X)$, *ne s'annulant pas, tel que* $K \cdot X$ *soit une martingale locale* (*resp. une semimartingale spéciale*) ;

(vi) *il existe* K *prévisible borné strictement positif, tel que* $K \cdot X$ *soit dans* $\mathbf{M}^1$ (*resp.* $\mathbf{S}^1$).

Démonstration. Nous la ferons pour les semimartingales, le cas des martingales étant analogue.

(i) ⇒ (iii) : Prendre $A_n = \{n \leq |H| < n+1\}$.

(iii) ⇒ (iv) : D'après Dellacherie [3], il existe une suite croissant vers l'infini de temps d'arrêt prévisibles T_k tels que, pour chaque k et chaque n , $(I_{A_n} \cdot X)^{T_k} I_{\{T_k > 0\}}$ soit dans $\mathbf{S}^1$. Il existe donc une partition dénombrable prévisible (C_m) de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ telle que, pour chaque couple (m,n) , $I_{C_m} \cdot (I_{A_n} \cdot X)$ soit dans $\mathbf{S}^1$. Ceux des ensembles $C_m \cap A_n$ qui ne sont pas vides fournissent la partition cherchée.

(iv) ⇒ (ii) : Soit (c_n) une suite décroissant vers zéro de réels > 0

telle que $\sum_n c_n \|I_{B_n} \cdot X\|_{\underline{\underline{S}}^1} < \infty$. On pose $M = \sum_n c_n (I_{B_n} \cdot X)$, $H = \sum_n \frac{1}{c_n} I_{B_n}$.
Comme $HI_{\{H \leq k\}} \cdot M = (\sum_{n \leq n_k} I_{B_n}) \cdot X$, où $n_k = \sup\{n : c_n \geq \frac{1}{k}\}$ tend vers l'infini avec k , on obtient à la limite $X = H \cdot M$.

(ii) $\Rightarrow$ (vi) : Soit $J = \frac{1}{H}$. Puisque $JI_{\{J \leq n\}} \cdot X = I_{\{H \geq \frac{1}{n}\}} \cdot M$ tend vers M quand n tend vers l'infini, on a $J \cdot X = M$. Il suffit de prendre $K = J \wedge 1$ pour que $K \cdot X = \frac{K}{J} \cdot M$ soit dans $\underline{\underline{S}}^1$.

(vi) $\Rightarrow$ (v) est trivial.

(v) $\Rightarrow$ (i) est analogue à (ii) $\Rightarrow$ (vi). ▬

Chou a déjà observé que les classes (Σ_m) et (Σ) décrites par la proposition 2 sont des espaces vectoriels (cela se voit, par exemple sur le point (vi)). Comme (Σ_m) — et a fortiori (Σ) — contient les martingales locales, une semimartingale $X = M + A$ est dans (Σ_m) (resp. (Σ)) si et seulement si A y est.

PROPOSITION 3. <u>Soient</u> A <u>un processus v.f.</u>, C <u>un processus v.f. prévisible</u>. <u>Les cinq propositions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) $A - C$ <u>est dans</u> (Σ_m) <u>et nul en zéro</u> ;

(ii) <u>il existe une partition dénombrable prévisible</u> (B_n) <u>de</u> $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ <u>telle que chacun des</u> $I_{B_n} \cdot A$ <u>soit à variation localement intégrable</u>, <u>de compensateur prévisible</u> $I_{B_n} \cdot C$;

(iii) <u>même assertion que (ii)</u>, <u>mais en supprimant le mot « localement »</u> ;

(iv) <u>il existe</u> K <u>dans</u> $L(A) \cap L(C)$, <u>ne s'annulant pas</u>, <u>tel que</u> $K \cdot A$ <u>soit à variation localement intégrable</u>, <u>de compensateur prévisible</u> $K \cdot C$;

(v) <u>il existe un processus prévisible borné strictement positif</u> K <u>intégrable au sens de Stieltjes par rapport à</u> A <u>et à</u> C , <u>tel que</u> $K \cdot A$ <u>soit à variation intégrable</u>, <u>de compensateur prévisible</u> $K \cdot C$.

<u>Un processus v.f.</u> A <u>étant donné</u>, <u>il existe au plus un processus v.f. prévisible</u> C <u>vérifiant ces conditions</u>.

<u>Démonstration</u>. D'après la proposition 2, $A - C$ est dans (Σ_m) et nul en 0 ss'il existe une partition dénombrable prévisible (B_n) telle que chacun des

$I_{B_n} \cdot (A-C)$ soit une martingale locale nulle en 0, c'est-à-dire ssi (ii) est réalisée. Les implications (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (ii) se vérifient comme dans la proposition 2 (pour (iii) $\Rightarrow$ (v), il faut utiliser, au lieu de $\underline{\underline{S}}^1$, l'espace de Banach des processus à variation intégrable). L'unicité de C se déduit de (v). ▬

DEFINITION. <u>Lorsque les conditions de la proposition 3 sont réalisées, on dira que le processus v.f.</u> A <u>est</u> compensable, <u>et que</u> C <u>est son</u> compensateur.

L'exemple du début montre que la classe des processus v.f. compensables est en général strictement plus vaste que celle des processus à variation localement intégrable ; pour ces derniers, la définition ci-dessus coïncide avec la compensation ordinaire. Le point (v) montre que les processus compensables forment un espace vectoriel, sur lequel la compensation est une opération linéaire.

La condition (i) de la proposition 3 peut être reformulée ainsi : <u>Pour qu'un processus v.f. nul en zéro</u> X <u>soit dans</u> (Σ_m), <u>il faut et il suffit qu'il soit le compensé d'un processus compensable</u> A ; <u>lorsque c'est le cas, on peut prendre</u> $A_t = \Sigma_{s\leq t}\, \Delta X_s$.

La condition (v) aussi peut être réécrite : Soit $A = A^+ - A^-$ la décomposition canonique du processus v.f. A en différence de deux processus croissants ; on notera μ^+ et μ^- les mesures correspondantes sur la tribu optionnelle[1], et ν_+ et ν_- leurs restrictions respectives à la tribu prévisible (contrairement à μ^+ et μ^-, ν_+ et ν_- peuvent ne pas être étrangères). Dire que A est compensable, c'est dire que ν_+ et ν_- sont σ-finies, et que leur différence $\nu_+ - \nu_-$ est finie sur des ensembles $[\![0,T_n]\!] \cap \mathbb{R}_+ \times \{T_n>0\}$ qui croissent vers $\mathbb{R}_+ \times \Omega$. Elle est alors associée à un processus v.f. prévisible C, qui est bien sûr le compensateur de A. En particulier, <u>si</u> A <u>est un processus croissant</u> (ou plus généralement un processus v.f. tel que ν_+ et ν_- soient étrangères), <u>alors pour que</u> A <u>soit compensable, il faut et il suffit qu'il soit à variation localement intégrable</u>. Ceci est à rapprocher de la proposition 1 sur les martingales à sauts positifs.

---

(1) $\mu^+(\Gamma) = E[\int_0^\infty I_\Gamma(s)\, dA_s^+]$; de même pour μ^-.

Les processus v.f. compensables sont tous dans la classe (Σ) . La réciproque n'est pas vraie : Si $\Omega = \mathbb{R}_+$ est muni de sa tribu borélienne, d'une loi exponentielle, et de la plus petite filtration habituelle faisant de l'application identique T un temps d'arrêt, le processus $\frac{1}{T} I_{[\![T,\infty[\![}$ est dans (Σ) (car c'est une intégrale par rapport à la semimartingale spéciale $I_{[\![T,\infty[\![}$) mais n'est pas compensable (car il est croissant et à variation non localement intégrable). Voici un critère plus général : Si $(\Omega,\underline{\underline{F}},P,(\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0})$ est tel que la classe (Σ_m) est strictement plus grosse que celle des martingales locales, il existe dans (Σ) des processus v.f. non compensables. Soit en effet $H\cdot M$ une intégrale stochastique par rapport à une martingale locale, qui ne soit pas une martingale locale. Le théorème 1 de [2] fournit une martingale locale v.f. B telle que $H\cdot(M-B)$ existe au sens des martingales locales, et que $A = H\cdot B$ existe au sens de Stieltjes sans être une martingale locale, donc sans être à variation localement intégrable. Soit $A^+ - A^-$ la décomposition canonique de A en différence de deux processus croissants. L'un au moins d'entre eux, par exemple A^+ , n'est pas localement intégrable, donc pas compensable. Mais A est dans (Σ) , donc, grâce au théorème de [1], on a pour tout temps d'arrêt T $E[|\Delta A_T|\ |\underline{\underline{F}}_{T-}] < \infty$, d'où $E[|\Delta A^+_T|\ |\underline{\underline{F}}_{T-}] < \infty$, et le processus croissant A^+ , bien que non compensable, est dans (Σ) .

De même que, pour un processus v.f. A , on a, sans réciproque, les implications

$$A \text{ localement intégrable} \Rightarrow A \text{ compensable} \Rightarrow A \in (\Sigma) \quad ,$$

de même un ensemble de semimartingales vient se coincer strictement entre les semimartingales spéciales et la classe (Σ) :

DEFINITION. Une semimartingale sera dite *presque spéciale* si elle est la somme d'une martingale locale et d'un processus v.f. compensable.

PROPOSITION 4. Soit X une semimartingale. Les cinq conditions suivantes sont équivalentes :

(i) X est presque spéciale ;

(ii) <u>pour toute décomposition</u> $X = R+B$, <u>où</u> R <u>est dans</u> (Σ_m) <u>et où</u> B <u>est v.f.</u>, B <u>est compensable</u> ;

(iii) <u>il existe une décomposition</u> $X = S+C$, <u>où</u> S <u>est un processus de</u> (Σ_m) <u>nul en zéro et</u> C <u>un processus v.f. prévisible</u> ;

(iv) <u>le processus v.f.</u> $U_t = \Sigma_{s\leq t} \Delta X_s I_{\{|\Delta X_s| \geq 1\}}$ <u>est compensable</u> ;

(v) <u>le processus v.f.</u> $V_t = \sup_{s\leq t} X_s^+ - \sup_{s\leq t} X_s^-$ <u>est compensable</u>.

<u>Lorsque ces conditions sont réalisées, la décomposition (iii) est unique, et pour toute décomposition du type (ii) où</u> $R_0 = 0$, C <u>est le compensateur de</u> B (la décomposition (iii) sera dite <u>canonique</u>).

<u>Démonstration</u>. (i) $\Rightarrow$ (iii) : Si $X = M+A$ où M est une martingale locale et A un processus v.f. compensable, il suffit de prendre pour C le compensateur de M_0+A .

(iii) $\Rightarrow$ (ii) et unicité de C : Le processus v.f. B est la somme de $C-R_0$, qui est son propre compensateur, et du processus v.f. de (Σ_m) nul en zéro $S-R+R_0$, qui est le compensé de la somme de ses sauts, donc de compensateur nul. Ainsi, B est compensable, de compensateur $C-R_0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) est trivial.

(i) $\Leftrightarrow$ (iv) : Il résulte de (i) et (ii) qu'un processus v.f. est compensable ssi c'est une semimartingale presque spéciale. Comme $X-U$ est spéciale, donc presque spéciale, X est presque spéciale ssi U est presque spéciale, c'est-à-dire compensable.

(i) $\Leftrightarrow$ (v) se démontre de même : il suffit de vérifier que $X-V$ est spéciale. Posons $T = \inf\{t : |X_t| \geq n\}$. Sur $[\![0,T[\![$, les processus $|X|$ et $|V|$ sont bornés par n ; sur $\{X_T \geq n\}$, $|X_T - V_T| = \sup_{s<T} X_s^-$ est majoré par n ; sur $\{X_T \leq -n\}$, $|X_T - V_T| = \sup_{s<T} X_s^+$ est majoré par n . Donc $(X-V)^T$ est bornée, et $X-V$ est localement bornée. —

Toute semimartingale de (Σ) s'écrit $H\cdot X$, où X est spéciale, de décomposition canonique $M+A$; le théorème de Jeulin (théorème 2 de [2]) dit que $H\cdot X$ est spéciale ssi H est intégrable par rapport à M au sens des martingales locales et à A au sens de Stieltjes. La proposition ci-dessous montre que $H\cdot X$ est presque spéciale ssi H est intégrable par rapport à M et A au sens de Jacod.

PROPOSITION 5. <u>Soient</u> X <u>une semimartingale presque spéciale de décomposition canonique</u> $S+A$ <u>et</u> H <u>un processus prévisible intégrable par rapport à</u> X . <u>Pour que</u> $H\cdot X$ <u>soit presque spéciale, il faut et il suffit que</u> H <u>soit dans</u> $L(S)$ <u>et</u> $L(A)$.

<u>Démonstration</u>. Si H est intégrable par rapport à S et A , $H\cdot X$ est presque spéciale, de décomposition canonique $H\cdot S+H\cdot A$. Réciproquement, supposons $H\cdot X$ presque spéciale, de décomposition canonique $R+C$. Soit K un processus prévisible >0 tel que K et HK soient tous deux bornés. Alors $(KH)\cdot X$ est presque spéciale, de décomposition canonique $(KH)\cdot S+(KH)\cdot A$; de même, $K\cdot(H\cdot X)$ est presque spéciale, de décomposition canonique $K\cdot R+K\cdot C$. En vertu de l'associativité de l'intégration stochastique, ces deux semimartingales sont égales, d'où $(KH)\cdot A=K\cdot C$. Mais $\frac{1}{K}$ est intégrable par rapport à $K\cdot C$, d'intégrale C . Toujours par associativité, il s'ensuit que $H=\frac{1}{K}(KH)$ est intégrable par rapport à A (et d'intégrale C), donc aussi par rapport à $X-A=S$. ▬

REMARQUES. 1) Le fait que l'inclusion des semimartingales presque spéciales dans la classe (Σ) soit stricte montre qu'en général une semimartingale de (Σ) ne peut pas être décomposée en un processus de (Σ_m) et un processus v.f. compensable. La seule chose que l'on puisse dire est la trivialité suivante : Pour toute décomposition d'un processus de (Σ) en une martingale locale et un processus v.f., ce dernier est dans (Σ) .

2) (P.A. Meyer) On est tenté d'introduire une nouvelle classe : les <u>semimartingales presque v.f.</u>, qui s'écrivent $H\cdot A$, avec A à variation finie et H dans $L(A)$. Mais si A est prévisible, $H\cdot A$ est v.f. ; il ne semble donc pas que l'on puisse obtenir ainsi de nouvelles décompositions.

REFERENCES

[1] CHOU C.S. Caractérisation d'une classe de semimartingales. Séminaire de Probabilités XIII p. 250, Lecture Notes N°721, Springer.

[2] CHOU C.S., P.A. MEYER, C. STRICKER. Sur les intégrales stochastiques de processus prévisibles non bornés. Dans ce volume.

[3] C. DELLACHERIE. Quelques applications du lemme de Borel-Cantelli à la théorie des semimartingales. Séminaire de Probabilités XII p. 742, Lecture Notes N°649, Springer.