JIA-AN YAN

Remarques sur l'intégrale stochastique de processus non bornés

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 148-151
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__148_0>

REMARQUES SUR L'I.S. DE PROCESSUS NON BORNES

par Yan Jia-An

Il existe jusqu'ici deux méthodes présentant la théorie de l'i.s. de processus prévisibles généraux par rapport aux semimartingales. L'une, due à Jacod, utilise une caractérisation des sauts des semimartingales. L'autre, due à Chou, Meyer et Stricker (exposé précédent), utilise la topologie des semimartingales d'Emery. Cet exposé comporte aussi une présentation très rapide de certains résultats, à partir de la <u>définition élémentaire</u> de l'i.s. (voir ci-dessous). Nous allons montrer ici que la définition élémentaire <u>entraîne simplement les autres résultats</u>, tels que l'invariance par changement de loi, le résultat partiel sur les changements de filtration, etc, et qu'elle constitue donc la meilleure approche de la question, d'un point de vue pédagogique. Nous n'insisterons pas sur les points traités en détail dans l'exposé précédent[1].

RAPPELS ET NOTATIONS

$\underline{\underline{S}}$ est l'espace des semimartingales

$\underline{\underline{S}}_p$ semimartingales spéciales

$\underline{\underline{V}}$ processus à variation finie adaptés

$\underline{\underline{M}}_{o,loc}$ martingales locales nulles en 0

Soit $X\varepsilon\underline{\underline{S}}$. Il est bien connu que $X\varepsilon\underline{\underline{S}}_p$ si et seulement si $[X,X]^{1/2}$ est localement intégrable. De même, si $A\varepsilon\underline{\underline{V}}$ et $|\Delta A|$ est borné, A est à variation localement intégrable.

Soit $X\varepsilon\underline{\underline{S}}$. Un processus prévisible H est dit X-<u>intégrable</u> (on écrit alors $H\varepsilon L(X)$) s'il existe une décomposition $X=M+A$ ($M\varepsilon\underline{\underline{M}}_{o,loc}$, $V\varepsilon\underline{\underline{V}}$), dite H-<u>décomposition</u>, telle que $H\cdot M$ et $H\cdot A$ existent au sens usuel. Alors la somme $H\cdot M+H\cdot A$ ne dépend pas de la H-décomposition utilisée, et on la note $H\cdot X$. C'est la "définition élémentaire" de l'exposé précédent.

En voici des conséquences immédiates :

1) $(H\cdot X)^c = H\cdot X^c$, $\Delta(H\cdot X)=H\Delta X$.
2) Pour tout temps d'arrêt T, on a $(H\cdot X)^T=H\cdot X^T=(HI_{[0,T]})\cdot X$ et $(H\cdot X)^{T-}=H\cdot X^{T-}$.
3) Pour tout $Y\varepsilon\underline{\underline{S}}$, on a $[H\cdot X,Y]=H\cdot[X,Y]$ (i.s. de Stieltjes).
4) Si $Y\varepsilon\underline{\underline{S}}$ est tel que $H\varepsilon L(X)\cap L(Y)$, on a $H\varepsilon L(X+Y)$ et $H\cdot(X+Y)=H\cdot X+H\cdot Y$.
5) Si K est un processus prévisible tel que $|K|\leq|H|$, on a $K\varepsilon L(X)$.

Le premier résultat non évident que nous démontrons est le théorème de Jeulin (théorème 2 de l'exposé précédent). La démonstration n'est pas difficile, et ce théorème est vraiment au centre de la théorie de l'i.s..

1. Nous remercions P.A. Meyer d'avoir corrigé une erreur de la démonstration du th. 3.

Théorème 1 . Soit $X\in\underline{\underline{S}}_p$, et soit $H\in L(X)$. Alors $H\cdot X\in\underline{\underline{S}}_p$ si et seulement si la décomposition canonique $X=M+A$ ($M\in\underline{\underline{M}}_{o,loc}$, $A\in\underline{\underline{V}}$ prévisible) est une H-décomposition.

Démonstration. Supposons $H\cdot X$ spéciale. Comme on a $H^2\cdot[X,X]=[H\cdot X,H\cdot X]$, le processus $(H^2\cdot[X,X])^{1/2}$ est localement intégrable. Soit $X=N+B$ une H-décomposition. On a $H\cdot X=H\cdot N+H\cdot B$ de sorte que $H\cdot B$ est à variation localement intégrable. A étant le compensateur de B, $H\cdot A$ existe au sens de Stieltjes (et on a $H\cdot A=(H\cdot B)^{\sim}$). Comme $H\cdot A$ est prévisible, donc spéciale, le processus croissant $[H\cdot A,H\cdot A]^{1/2}=(H^2[A,A])^{1/2}$ est localement intégrable. D'autre part, on a

$$(H^2\cdot[M,M])^{1/2} \leq (H^2\cdot[X,X])^{1/2} + (H^2\cdot[A,A])^{1/2}$$

le côté gauche est donc aussi localement intégrable, et $H\cdot M$ existe au sens des martingales locales. Cela montre que $X=M+A$ est une H-décomposition. La réciproque est évidente.

Nous en déduisons immédiatement une remarque, qui remplace le théorème 1 de l'exposé précédent.

Remarque. Soient $X\in\underline{\underline{S}}$ et $H\in L(X)$. Soit K un ensemble optionnel, qui n'a qu'un nombre fini de points sur tout intervalle fini, et contient tous les s tels que $|H_s\Delta X_s|>1$ ou $|\Delta X_s|>1$. Posons $U_t=\Sigma_{s\leq t}\ \Delta X_s I_{\{(s,.)\in K\}}$ et $Z=X-U$. Alors Z est spéciale , $H\in L(U)\cap L(X)\subset L(Z)$, et $H\cdot Z$ est spéciale, donc la décomposition canonique $Z=N+B$ de Z est une H-décomposition de Z, et $X=N+(B+U)$ est une H-décomposition de X.

Comme dans l'exposé précédent, on en tire les conséquences suivantes au sujet de l'i.s. :

6) linéarité : $H,K \in L(X) \Rightarrow H+K\in L(X)$ et $(H+K)\cdot X = H\cdot X+K\cdot X$.

7) associativité : si $H\in L(X)$ et K est prévisible, $K\in L(H\cdot X)\Leftrightarrow KH\in L(X)$, et on a $K\cdot(H\cdot X) = (KH)\cdot X$.

8) théorème de convergence dominée : soient $H\in L(X)$, K^n et K des processus prévisibles majorés en valeur absolue par $|H|$, K^n convergeant simplement vers K. Alors $K^n,K \in L(X)$, et $K^n\cdot X \to K\cdot X$ uniformément en probabilité sur tout intervalle fini (i.e. $(K^n\cdot X-K\cdot X)^*_t \to 0$ en pr. pour $t<\infty$).

A titre d'exemple, détaillons une propriété de localisation :

9) Soient $X\in\underline{\underline{S}}$, H un processus prévisible, T_n une suite de temps d'arrêt croissant vers $+\infty$. Si $H\in L(X^{T_n})$ pour tout n , alors $H\in L(X)$.

Démonstration. Il est clair que $H^2\cdot[X,X]$ existe et est à variation finie. Prenons $K=\{s : |\Delta X_s|>1$ ou $|H_s\Delta X_s|>1\}$, et construisons U, $Z=X-U$, $Z=N+B$ comme dans la remarque. On a $H\in L(U)$, d'autre part $H\in L(N^{T_n})$, $H\in L(B^{T_n})$ pour tout n, car $N^{T_n}+B^{T_n}$ est la décomposition canonique de Z^{T_n}. D'après les propriétés des i.s. usuelles, cela entraîne $H\in L(N)$, $H\in L(B)$, et enfin $H\in L(X)$.

Nous prouvons maintenant l'invariance de l'i.s. par changement de loi.

Théorème 2. Soient $X \in \underline{\underline{S}}$ et $H \in L(X)$. Si Q est une loi telle que $Q \ll P$, H est X-intégrable sous Q, et $H \underset{P}{\cdot} X$ est une version de $H \underset{Q}{\cdot} X$.

Démonstration. Posons $U_t = \Sigma_{s \leq t} \Delta X_s I_{\{|\Delta X_s|>1 \text{ ou } |H_s \Delta X_s|>1\}}$, $Z=X-U$, de décomposition canonique $Z=N+B$ sous la loi P. On se trouve ramené à démontrer que $H \in L_Q(N)$ et que $H \underset{P}{\cdot} N$ est une version de $H \underset{Q}{\cdot} N$. Mais en fait cette seconde propriété résulte aussitôt de la première : elle est bien connue pour H borné, et il suffit de tronquer H à n, et de faire tendre n vers l'infini en appliquant le théorème de convergence dominée ci-dessus.

Remarquons que les sauts de Z et de $H \cdot Z$ sont bornés en valeur absolue par 1 ; passant aux décompositions canoniques, on voit que les sauts de N et de $H \cdot N$ sont bornés en valeur absolue par 2 . Introduisons la martingale $M_t = E[\frac{dQ}{dP} | \underline{\underline{F}}_t]$; comme N est à sauts bornés, $\langle N,M \rangle$ existe et N admet la décomposition canonique de Girsanov relativement à Q[1]

$$N_t = Y_t + C_t \qquad \text{où } C_t = \int_0^t \frac{1}{M_{s-}} d\langle N,M \rangle_s \text{ , } Y_t = N_t - C_t$$

Comme $H \cdot N$ existe au sens usuel sous la loi P, $H \cdot \langle N,M \rangle = \langle H \cdot M, N \rangle$ existe au sens de Stieltjes sous P, et donc aussi sous Q. Alors

$$\int_0^t |H_s| \, |dC_s| = \int_0^t \frac{1}{M_{s-}} |H_s| \, |d\langle M,N \rangle_s| < +\infty \text{ p.s. sous la loi Q}$$

puisque $1/M_-$ est p.s. à trajectoires bornées sous la loi Q. Donc $H \cdot C$ existe au sens de Stieltjes sous Q ; c'est une semimartingale spéciale, donc $(H^2 \cdot [C,C])^{1/2}$ est localement intégrable sous la loi Q, et il en est de même de

$$(H^2 \cdot [Y,Y])^{1/2} \leq (H^2 \cdot [N,N])^{1/2} + (H^2 \cdot [C,C])^{1/2}$$

donc $H \underset{Q}{\cdot} Y$ existe, et le théorème est établi.

Passons à l'invariance par changement de filtration.

Théorème 3. <u>Soit</u> $X \in \underline{\underline{S}}$. <u>Soit</u> $(\underline{\underline{G}}_t)$ <u>une filtration satisfaisant aux conditions habituelles</u> , <u>contenant</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$ <u>et telle que</u> X <u>soit encore une semimartingale par rapport à</u> $(\underline{\underline{G}}_t)$. <u>Soit</u> H <u>un processus prévisible par rapport à</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$, <u>donc par rapport à</u> $(\underline{\underline{G}}_t)$. <u>Si</u> H <u>est</u> X-<u>intégrable par rapport à</u> $(\underline{\underline{G}}_t)$, <u>il l'est par rapport à</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$, <u>et les deux i.s. sont égales</u>.

Démonstration. Il suffit de montrer que H est X-intégrable : l'égalité des deux i.s. résulte alors du cas borné et du théorème de convergence dominée. Reprenons les notations $X=Z+U$, du début de la démonstration précédente ; il est clair que Z est adapté à $(\underline{\underline{F}}_t)$, et il suffit de montrer

1. Voir par ex. Lenglart, ZW 39, 1977, théorème 2 (p. 67).

que $H \in L(Z)$ relativement à $(\underline{\underline{F}}_t)$. Nous pouvons supposer que la loi P a été remplacée par une loi équivalente telle que les semimartingales Z et H·Z appartiennent à la classe $\underline{\underline{H}}^1$ de semimartingales de la filtration $(\underline{\underline{G}}_t)$, sur tout intervalle fini (Dellacherie, Sém. Prob. XII, p. 744). Si l'on considère alors les décompositions canoniques de Z et H.Z par rapport à $(\underline{\underline{G}}_t)$

$$Z = N+B \quad , \; Z'=N'+B'$$

les processus N et N' sont de vraies martingales, tandis que B et B' sont à variation intégrable sur tout intervalle fini. D'après le théorème 1, on a $B' = H \cdot B$, donc $E[\int_0^t |H_s||dB_s|] < \infty$ pour t fini.

Soit $\tilde{B}$ la projection duale prévisible de B sur $(\underline{\underline{F}}_t)$. Comme H est prévisible/$(\underline{\underline{F}}_t)$, la propriété précédente entraîne $E[\int_0^t |H_s||d\tilde{B}_s|] < \infty$. D'autre part, il est facile de voir que la décomposition canonique de Z par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$ est $Z=Y+\tilde{B}$, où $Y=N+B-\tilde{B}$. Nous avons vu que $H \cdot \tilde{B}$ existe au sens de Stieltjes, et l'inégalité

$$(H^2 \cdot [Y,Y])^{1/2} \leq (H^2 \cdot [Z,Z])^{1/2} + (H^2 \cdot [\tilde{B},\tilde{B}])^{1/2}$$

montre que H·Y existe par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$.

<u>Remarque</u>. Le type de décomposition que l'on vient d'utiliser doit pouvoir rendre service dans d'autres questions de changement de filtrations.

Institut de Recherche Mathématique
Academia Sinica
Pékin, Chine