Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Michel Émery

Équations différentielles stochastiques. La méthode de Métivier-Pellaumail

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 118-124
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__118_0>

Séminaire de Probabilités

Volume XIV

EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES : LA METHODE DE METIVIER ET PELLAUMAIL

par M. Emery

Les travaux de Métivier et Pellaumail sur l'intégration stochastique les ont conduits à développer une méthode de résolution d'équations différentielles séduisante à plus d'un titre : Elle contient une jolie caractérisation de l'espace des semimartingales et de sa topologie ; elle s'étend très aisément au cas des processus à valeurs dans un espace de Hilbert. Nous allons en exposer les aspects relatifs à la théorie des semimartingales, renvoyant à [2], [3], [4] et surtout [5] pour les aspects que nous négligerons, en particulier l'étude proprement dite des équations différentielles.

On se place sur un espace filtré $(\Omega,\underline{\underline{F}},P,(\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0})$ vérifiant les conditions habituelles. On convient que, si X est un processus càdlàg, $X_{0-}=0$; que les processus croissants sont adaptés et à valeurs dans $[0,\infty[$. Les processus que nous considérons sont à valeurs réelles. Métivier et Pellaumail caractérisent les semimartingales à l'aide de la relation (*) qu'ils appellent π^*-domination.

THEOREME. <u>Soit</u> X <u>une semimartingale</u>. <u>Il existe un processus croissant</u> A <u>qui</u> contrôle X <u>au sens suivant</u> : <u>Pour tout temps d'arrêt</u> T <u>et tout processus prévisible borné</u> H ,

$$(*)\qquad E\,[\sup_{t<T}(\int_0^t H_s\,dX_s)^2] \leq E\,[A_{T-}\int_0^{T-} H_s^2\,dA_s] \quad .$$

<u>Démonstration</u>. 1) Si A contrôle X et B contrôle Y ,

$$\begin{aligned}(H\cdot(X+Y))^{*2}_{T-} &\leq ((H\cdot X)^*_{T-}+(H\cdot Y)^*_{T-})^2\\ &\leq 2\,((H\cdot X)^{*2}_{T-}+(H\cdot Y)^{*2}_{T-}) \quad ,\end{aligned}$$

donc

$$E\,[(H\cdot(X+Y))^{*2}_{T-}] \leq 2\,E\,[A_{T-}\,H^2\cdot A_{T-}+B_{T-}\,H^2\cdot B_{T-}]$$

$$E\,[(H\cdot(X+Y))^{*2}_{T-}] \leqq 2E\,[(A+B)_{T-}\ H^2\cdot(A+B)_{T-}] \quad ,$$

et $\sqrt{2}(A+B)$ contrôle $X+Y$. Toute semimartingale étant somme d'une martingale locale à sauts bornés et d'un processus à variation finie, on est ramené à démontrer le théorème séparément pour ces deux classes de processus.

2) Si X est à variation finie, soit $A_t = \int_0^t |dX_s|$. Grâce à l'inégalité de Schwarz, $(H\cdot X)^{*2}_{T-} \leq (|H|\cdot A_{T-})^2 \leqq A_{T-}\ H^2\cdot A_{T-}$, donc A contrôle X .

3) Pour traiter le cas des martingales de carré intégrable, nous admettrons une inégalité de martingales qui constitue le coeur de la démonstration du théorème :

LEMME. Soit M une martingale de carré intégrable. Pour tout temps d'arrêt T , on a
$$E[M^{*2}_{T-}] \leq 4E[[M,M]_{T-} + \langle M,M\rangle_{T-}] \quad .$$

Maintenant, si X est une martingale de carré intégrable, soit $B = 4[X,X] + 4\langle X,X\rangle$.

Pour H prévisible borné, le lemme appliqué à $M = H\cdot X$ donne
$$E[(H\cdot X)^{*2}_{T-}] \leq E[(H^2\cdot B)_{T-}] \quad .$$

Il ne reste qu'à chercher un A tel que $H^2\cdot B \leqq A\,H^2\cdot A$. Le processus $A = 1 + B$ convient, ou encore, si l'on préfère conserver l'homogénéité des formules, le processus $A = \sqrt{2B}$ (car alors $dB = \frac{1}{2}(A + A_-)dA$).

4) Si X est une martingale locale à sauts bornés, ou plus généralement une martingale locale localement de carré intégrable, la même expression $A = 1 + 4[X,X] + 4\langle X,X\rangle$ ou $A = (8[X,X] + 8\langle X,X\rangle)^{\frac{1}{2}}$ contrôle X. Soient en effet T_n des temps d'arrêt croissant vers l'infini tels que X^{T_n} soit de carré intégrable. Pour tout T ,
$$E\,[((H\cdot X)^{T_n})^{*2}_{T-}] \leqq E[A^{T_n}_{T-} \int_{[\![0,T_n]\!]\cap[\![0,T[\![} H_s^2\, dA_s] \quad ,$$
et on a le résultat par limite croissante. ▬

RECIPROQUE. Soit X un processus càdlàg adapté. On suppose qu'il existe un processus croissant A tel que, pour tout processus prévisible borné élémentaire H et pour tout temps d'arrêt T, (*) ait lieu. Alors X est une semimartingale.

Démonstration. Soit $T_n = \inf\{t>0 : A_t \geq n\}$. Les processus arrêtés X^{T_n-} vérifient, pour tout processus prévisible élémentaire H borné par 1,

$$(E[|\int_0^\infty H_s \, dX_s^{T_n-}|])^2 \leq E[(\int_0^{T_n-} H_s \, dX_s)^2]$$
$$\leq E[A_{T_n-} \int_0^{T_n-} H_s^2 \, dA_s] \leq n^2 ,$$

donc $\mathrm{var}(X^{T_n-}) \leq \sup_H \|\int_0^\infty H_s \, dX_s^{T_n-}\|_{L^1} \leq n < \infty$, où le sup est pris sur tous les processus prévisibles élémentaires bornés par 1. Ainsi, pour chaque n, X^{T_n-} est une quasimartingale, donc une semimartingale. Comme les temps T_n tendent vers l'infini, par recollement, X est une semimartingale. ▬

Pour les processus réels, la possibilité de contrôle par des processus croissants caractérise la classe des semimartingales. Pour les processus à valeurs hilbertiennes, les processus contrôlés par un processus croissant (que Métivier et Pellaumail appellent les π^*-processus) forment une classe strictement plus grosse que la classe des semimartingales. Ceci est essentiellement dû au fait que les fonctions à variation finie sont trop peu nombreuses ; on peut déjà l'observer dans le cas déterministe où Ω n'a qu'un point (voir [4], exemple 4). Cette classe élargie est susceptible d'un calcul stochastique permettant en particulier la résolution d'équations différentielles.

Pour étudier la stabilité de la solution d'une équation différentielle stochastique lorsqu'on perturbe les processus qui y figurent, Métivier et Pellaumail introduisent, sur l'espace des π^*-processus, une topologie métrisable telle que X^n tend vers X si et seulement si il existe des processus croissants A^n qui contrôlent respectivement les processus $X^n - X$ et tels que, pour tout t, A_t^n tend vers zéro en probabilité. Comme cette topologie est complète, il n'est pas difficile de vérifier, à l'aide du théorème du graphe fermé, que, dans le cas des processus à valeurs réelles, cette topologie est la même que la topologie des semimartingale étudiée dans [1]. Nous allons donner de ce fait une autre démonstration, qui repose sur une équivalence de normes quadratiques pouvant avoir son intérêt propre.

Nous sommes donc dans le cas des processus réels. Nous utiliserons l'espace $\underline{\underline{H}}^2$ de semimartingales (voir [6]).

LEMME 1. Il existe deux constantes universelles c et C telles que, pour toute semimartingale X, on ait

$$c\,\|X\|_{\underline{\underline{H}}^2} \leq \inf_{A \text{ contrôle } X} \|A_\infty\|_{L^2} \leq C\,\|X\|_{\underline{\underline{H}}^2} .$$

Démonstration. Les constantes changent de ligne en ligne. Commençons par l'inégalité de gauche. Si A contrôle X, on peut écrire grâce à [7], le sup portant sur tous les processus prévisibles H bornés par 1,

$$\|X\|^2_{\underline{\underline{H}}^2} \leq c \sup_H \sup_{t>0} \|\int_0^t H_s\, dX_s\|^2_{L^2}$$

$$\leq c \sup_H E[(H\cdot X)^{*2}_\infty]$$

$$\leq c \sup_H E[A_\infty \int_0^\infty H_s^2\, dA_s] \leq c\; E[A_\infty^2] .$$

Passons maintenant à l'inégalité de droite. Soit X une semimartingale de $\underline{\underline{H}}^2$; écrivons sa décomposition canonique $X = M + V$. Nous avons vu dans la démonstration du théorème précédent que X est contrôlé par

$$A = \sqrt{2}\int |dV_s| + 4\,([M,M] + \langle M,M\rangle)^{\frac{1}{2}} ,$$

qui vérifie

$$\|A_\infty\|_{L^2} \leq C\,\left(\|\int_0^\infty |dV_s|\,\|_{L^2} + E[[M,M]_\infty + \langle M,M\rangle_\infty]^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$\leq C\,\left(\|\int_0^\infty |dV_s|\,\|_{L^2} + \|M\|_{\underline{\underline{H}}^2} \right) \leq C\;\|X\|_{\underline{\underline{H}}^2} .$$

Ceci achève la démonstration du lemme 1. ▬

LEMME 2. Soient X une semimartingale et S un temps d'arrêt.

a) Si A contrôle X, A^{S-} contrôle X^{S-}.

b) Si X est nulle sur $[\![0,S[\![$, il existe un processus croissant A nul sur $[\![0,S[\![$ et qui contrôle X.

Démonstration. Le a) est évident sur la relation (*). Pour le b), en remarquant que X est la somme du processus à variation finie $\Delta X_S\, I_{[\![S,\infty[\![}$ contrôlé par $|\Delta X_S|\, I_{[\![S,\infty[\![}$, et d'une semimartingale nulle sur $[\![0,S]\!]$, on se ramène au cas où X est nulle sur $[\![0,S]\!]$. Soit alors A un processus croissant qui contrôle X ; nous allons vérifier que $B = A\, I_{[\![S,\infty[\![}$ contrôle lui aussi X. Si H est un processus prévisible borné par 1 et T un temps d'arrêt,

$$\begin{aligned} E[(H\cdot X)^{*2}_{T-}] &= E[(H\, I_{]\!]S,\infty[\![}\cdot X)^{*2}_{T-}] \\ &\leq E[A_{T-}\ (H^2 I_{]\!]S,\infty[\![})\cdot A_{T-}] \quad ; \end{aligned}$$

mais $(H^2 I_{]\!]S,\infty[\![})\cdot A_{T-}$ est nul sur $\{T \leq S\}$ et est majoré par $H^2\cdot B_{T-}$ sur $\{T > S\}$, donc $A_{T-}\ (H^2 I_{]\!]S,\infty[\![})\cdot A_{T-} \leq B_{T-}\ H^2\cdot B_{T-}$, et B contrôle X . ▬

L'énoncé qui suit et sa démonstration font appel aux propriétés de la topologie des semimartingales étudiées dans [1] . Pour tout processus croissant A, on pose $r_{cp}(A) = \sum_{n>0} 2^{-n} E[A_n \wedge 1]$, en sorte que $r_{cp}(A^n)$ tend vers zéro si et seulement si pour tout t A^n_t tend vers zéro en probabilité.

THEOREME. <u>Une suite</u> (X^n) <u>de semimartingales tend vers zéro pour la topologie des semimartingales si et seulement si les</u> X^n <u>sont respectivement contrôlés par des processus croissants</u> A^n <u>tels que</u> $\lim_n r_{cp}(A^n) = 0$.

<u>Démonstration</u>. En notant d_{sm} une distance qui définit la topologie des semimartingales, il s'agit de démontrer que $d_{sm}(X^n,0) \longrightarrow 0$ si et seulement si $\inf_{A^n \text{ contrôle } X^n} r_{cp}(A^n) \longrightarrow 0$. Par identification de la limite, on peut donc, dans chaque sens, ne le démontrer que pour une sous-suite.

Si A^n contrôlent X^n avec $r_{cp}(A^n) \longrightarrow 0$, il existe ([1] prop. 1) des temps d'arrêt T_k qui croissent vers l'infini et une sous-suite $A^{n'}$ tels que, pour tout k, $A^{n'}_{T_k-}$ tend vers zéro dans L^2. Mais $(X^{n'})^{T_k-}$ est contrôlé par $(A^{n'})^{T_k-}$, et tend donc vers zéro dans $\underline{\underline{H}}^2$ pour tout k (lemme 1). Le théorème 2 de [1] entraîne que la suite $X^{n'}$ tend vers zéro pour la topologie des semimartingales.

Réciproquement, si $d_{sm}(X^n,0) \longrightarrow 0$, on peut, en extrayant une sous-suite, supposer que X^n tend vers zéro " localement " dans $\underline{\underline{H}}^2$: étant donné ε positif, il existe un temps d'arrêt T assez grand pour que $P(T < 1/\varepsilon) < \varepsilon$, et qui soit tel que $(X^n)^{T-}$ tende vers zéro dans $\underline{\underline{H}}^2$ ([1] théorème 2). Grâce au lemme 1, il existe des B^n qui contrôlent $(X^n)^{T-}$ tels que $B^n_\infty \longrightarrow 0$ dans L^2 ; grâce au lemme 2, il existe des C^n nuls sur $[\![0,T[\![$ qui contrôlent $X^n-(X^n)^{T-}$. Posons $A^n = \sqrt{2}\,(B^n+C^n)$; les processus A^n contrôlent les X^n et sont tels que $A^n_{T-} \longrightarrow 0$ dans L^2. Comme $A^n-(A^n)^{T-}$ est nul sur $[\![0,T[\![$, $r_{cp}(A^n-(A^n)^{T-})$ est majoré par $\varepsilon' = \varepsilon + 2^{1-1/\varepsilon}$ qui tend vers zéro avec ε, et l'on a

$$\begin{aligned} r_{cp}(A^n) &\leq r_{cp}((A^n)^{T-}) + r_{cp}(A^n-(A^n)^{T-}) \\ &\leq \|A^n_{T-}\|_{L^2} + \varepsilon' \quad , \end{aligned}$$

d'où $\overline{\lim}_n\, r_{cp}(A^n) \leq \varepsilon'$, et, ε' étant arbitrairement petit,

$$\lim_n \inf_{A^n \text{ contrôle } X^n} r_{cp}(A^n) = 0 \ . \ \blacksquare$$

REMARQUE. On peut chercher à étendre l'équivalence du lemme 1 aux exposants p autres que 2. Voici un résultat partiel : Pour $2 \leq p < \infty$, l'inégalité de droite subsiste, avec la même démonstration ; pour $1 \leq p \leq 2$, l'inégalité de gauche se déduit du cas $p=2$ à l'aide de la relation de domination de Lenglart [8]

Pour donner au lecteur l'envie de se reporter à [5], voici en quelques mots comment tout ceci est utilisé pour la résolution d'équations différentielles stochastiques. L'équation étudiée est du type $X = H + FX \cdot M$, où l'inconnue X est un processus càdlàg adapté, et où les données sont une semimartingale (1) M, un processus càdlàg adapté H, et une opération $X \longmapsto FX$ qui transforme les processus càdlàg adaptés en processus prévisibles localement bornés, qui est "prévisible" au sens où, pour tout temps d'arrêt T, $(FX)^T$ ne dépend que de X^{T-}, et qui est lipschitzienne.

Si l'on connaît la solution X de l'équation sur un intervalle stochastique $[\![0,S[\![$, on appelle T un temps d'arrêt tel que, k étant une constante de Lipschitz de F et A un processus croissant qui contrôle M, $A^2_{T-} - A^2_S \leq \frac{1}{2k}$, d'où $A_{T-} \int_{]\!]S,T[\![} dA_s \leq \frac{1}{2k}$. La prévisibilité de F permet de prolonger la solution X à l'intervalle $[\![0,S]\!]$; une méthode de point fixe, qui repose sur l'inégalité

(1) Ou un π^*-processus, mais le silence éternel des espaces infinis m'effraie.

$$
\begin{aligned}
E\,[(FY\cdot M - FZ\cdot M)^{*2}_{T-}] &= E\,[(FY-FZ)\cdot M^{*2}_{T-}] \\
&\leq E\,[A_{T-} \int_0^{T-} (FY-FZ)^2\, dA_s] \\
&\leq E\,[A_{T-} \int_{]\!]S,T[\![} k(Y-Z)^2\, dA_s] \\
&\leq \tfrac{1}{2}\, E\,[(Y-Z)^{*2}_{T-}] \quad ,
\end{aligned}
$$

où Y et Z coincident avec la solution X sur $[\![0,S]\!]$, permet de prolonger la solution à $[\![0,T[\![$. Tout ceci pouvant se faire en contrôlant la solution X au fur et à mesure qu'on la construit, Métivier et Pellaumail obtiennent un théorème de stabilité de la solution lorsqu'on perturbe les données H, F et M.

REFERENCES

[1] M. EMERY. Une topologie sur l'espace des semimartingales. Séminaire de Probabilités XIII, p. 257.

[2] M. METIVIER et J. PELLAUMAIL. Une formule de majoration pour martingales ; et sur une équation stochastique assez générale. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 285, pp.685 et 921.

[3] M. METIVIER et J. PELLAUMAIL. On a stopped Doob's inequality and general stochastic equations. Ecole Polytechnique de Paris, rapport interne n° 28, 1978.

[4] J. PELLAUMAIL. Stabilité d'équations différentielles stochastiques hilbertiennes. C. R. Acad. Sc. Paris, t.288, p. 157.

[5] M. METIVIER et J. PELLAUMAIL. Stochastic integration. Ecole Polytechnique de Paris, rapport interne n° 44, 1979.

[6] P.A. MEYER. Inégalités de normes pour les intégrales stochastiques. Séminaire de Probabilités XII, p. 757.

[7] M. YOR. Inégalités entre processus minces et applications. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 286, p. 799.

[8] E. LENGLART. Sur l'inégalité de Metivier-Pellaumail Séminaire de Probabilités XIV, p. 125