Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Ching Sung Chou

# Une caractérisation des semimartingales spéciales

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 14 (1980), p. 116-117
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__116_0>

Séminaire de Probabilités XIV
1978/79

# UNE CARACTERISATION DES SEMIMARTINGALES SPECIALES

par CHOU Ching-Sung

Soit X une semimartingale, et soit A un processus croissant ( pas forcément nul en 0 ). Nous dirons d'après Métivier et Pellaumail que X est <u>contrôlée</u> par A si l'on a, pour tout processus H prévisible borné et tout temps d'arrêt T

$$(1) \qquad E[\ \sup_{t<T} (\int_0^t H_s dX_s)^2] \leqq E[A_{T-} \int_0^{T-} H_s^2 dA_s\ ] \qquad (A_{0-}=0\ )$$

Les travaux importants de Métivier et Pellaumail sur cette notion ont été exposés au séminaire de Strasbourg par M. Emery **(ce volume, p. 118), qui a montré, d'après Métivier et Pellaumail que:**

THEOREME . <u>Toute semimartingale</u> X <u>est contrôlée par un processus croissant</u>.

PRINCIPE DE LA DEMONSTRATION : On écrit X=M+V, où M est une martingale locale à sauts bornés, nulle en 0, et V est un processus à variation finie. On montre alors que M est contrôlée par $4(\langle M,M\rangle+[M,M]+1)=A'$, V par $\int_0^t |dV_s| = A''_t$ , et X=M+V est contrôlé par $2(A'+A'')=A$ .

Nous voudrions faire la remarque suivante :

THEOREME. <u>Une semimartingale</u> X <u>peut être contrôlée par un processus croissant</u> A <u>localement intégrable si et seulement si</u> X <u>est spéciale</u>.

DEMONSTRATION. Si X est spéciale, on reprend la démonstration précédente : $\langle M,M\rangle$ est localement intégrable puisqu'il est prévisible, [M,M] aussi puisque M est à sauts bornés . D'autre part, X étant spéciale, V est localement intégrable, donc A est localement intégrable.

Inversement, supposons que dans (1) le processus A soit localement intégrable. Ecrivons la formule (1) avec H=1

$$E[(X^*_{T-})^2] \leqq E[A^2_{T-}]$$

Lenglart énonce cela en disant que le processus $(X^{*2}_{t-})$ est <u>dominé</u> par le processus croissant $(A^2_t)$. Il démontre alors ( voir par exemple Dellacherie et Meyer, chapitre VI, n°111 remarque b)) que l'on a pour toute fonction concave positive F, nulle en 0

$$E[F(X^{*2}_{T-}\ )] \leqq cE[F(A^2_{T-}\ )]$$

Prenons $F(x)=\sqrt{x}$ , nous obtenons

$$E[X^*_{T-}] \leqq cE[A_{T-}] \quad \text{puis} \quad E[X^*_T] \leqq cE[A_T]$$

Pour cette dernière inégalité, on passe à la limite dans l'inégalité $E[X^*_{T_n-}] \leqq cE[A_{T_n-}]$ , en prenant $T_n=(T+\frac{1}{n})\wedge \inf\{t>T : A_t-A_T \geqq \frac{1}{n}\}$ .

Ce résultat étant obtenu, on voit que si A est localement intégrable, il en est de même du processus croissant $(X^*_t)$, et cela entraîne que X est spéciale. Choisissons en effet des temps d'arrêt $U_n\uparrow+\infty$ tels que $E[X^*_{U_n} I_{\{U_n>0\}}] < \infty$ , et posons $S_t = ( \Sigma_{s\leqq t} \Delta X^2_s )^{1/2}$ , $V_n=\inf\{t : S_t\geqq n \}$, $T_n=U_n\wedge V_n$ . Nous avons sur $\{T_n>0\}$

$$S_{T_n} = S_{T_n-} + \Delta S_{T_n} \leqq n + 2X^*_{U_n}$$

Donc $E[S_{T_n} I_{\{T_n>0\}}] < \infty$ , et X est spéciale d'après le théorème 32 du cours sur les intégrales stochastiques de P.A. Meyer, sém. X p. 310.

Mathematics Department
National Central University
Chung-Li ( Taiwan )