

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CHRISTOPHE STRICKER

Prolongement des semi-martingales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 104-111

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__104_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

c) pour tout ensemble prévisible A , la suite $(1_A \cdot X)_n$ converge en probabilité lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration : Meyer a établi l'implication a) \implies b) dans l'article

[7]. Réciproquement si X est une quasimartingale, il existe deux surmartingales positives X' et X'' telles que $X = X' - X''$. On remarque alors aisément que les temps d'arrêt $T_n = \inf\{t, X'_t \geq n \text{ ou } X''_t \geq n\}$ tendent stationnairement vers $+\infty$ et les surmartingales $(X')^{T_n}$ et $(X'')^{T_n}$ appartiennent à la classe D , donc à \mathcal{M}^1 . L'implication a) \implies c) est bien connue. La démonstration de la réciproque est plus délicate et se fera en plusieurs étapes.

Nous noterons X^n la semimartingale X arrêtée à l'instant n . D'après un résultat de Dellacherie [1], il existe une loi Q équivalente à P telle que toutes les semimartingales X^n appartiennent à l'espace normé $\mathcal{M} \oplus G$: autrement dit, pour la loi Q , X^n est spéciale de décomposition canonique $X^n = M^n + A^n$, M^n appartenant à l'espace vectoriel \mathcal{M} des martingales de carré intégrable muni de la norme $\|M^n\|_{\mathcal{M}}^2 = E[M^n, M^n]_{\infty}$, A^n appartenant à l'espace vectoriel G des processus à variation intégrable muni de la norme $\|A^n\|_G = E[\int_0^{\infty} |dA^n|]$. $\tilde{\mathcal{P}}$ désigne la tribu quotient de la tribu prévisible \mathcal{P} par la relation d'équivalence: $A \sim B$ si et seulement si pour tout n , $1_A \cdot X^n = 1_B \cdot X^n$. On pose:

$$\|X^n\| = \|M^n\|_{\mathcal{M}} + \|A^n\|_G$$

$$d(A, B) = \sum_n \frac{\|(1_A - 1_B) \cdot X^n\|}{2^n(1 + \|X^n\|)} \quad \text{pour tout } A, B \in \tilde{\mathcal{P}}$$

$$J^n(A) = (1_A \cdot X^n)_{\infty} \quad \text{pour tout } A \in \tilde{\mathcal{P}}$$

$$J(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} J^n(A), \quad \text{la limite étant prise en probabilité.}$$

On désigne par L^0 l'espace vectoriel topologique des variables aléatoires p.s. finies, muni de la topologie de la convergence en probabilité avec la quasinnorme $\|U\|_{L^0} = E[1_{\wedge} |U|]$.

Le lemme suivant est analogue au lemme 1 d'Emery [3] avec une démonstration un peu différente.

LEMME 1. d est une distance sur $\tilde{\mathcal{P}}$ pour laquelle $\tilde{\mathcal{P}}$ est complet. Les applications J^n de $\tilde{\mathcal{P}}$ dans L^0 sont continues pour tout n et J est aussi continue.

Démonstration : d est évidemment une distance sur $\tilde{\mathcal{P}}$. Si (A_n) est une suite de Cauchy pour d , c'est aussi une suite de Cauchy dans

$$L^2(\mathcal{P}, \Sigma, \frac{d[M^n, M^n]dQ}{2^n(1+\|X^n\|)}) \cap L^1(\mathcal{P}, \Sigma, \frac{|dA^n|dQ}{2^n(1+\|X^n\|)}).$$

Donc (1_{A_n}) converge dans $L^2(\dots) \cap L^1(\dots)$ vers l'indicatrice d'un ensemble prévisible A . Par conséquent (A_n) converge aussi vers A dans $\tilde{\mathcal{P}}$. Les applications J^n sont lipschitziennes, donc continues. Il en résulte que J admet aussi un point de continuité. Comme J est additive, on vérifie aisément que J est continue partout.

Nous abordons maintenant la deuxième étape de notre démonstration.

LEMME 2. La variable aléatoire $X^* = \sup |X_s|$ est finie p.s.

Démonstration : Par hypothèse, les variables aléatoires $J^n(A)$ convergent dans L^0 vers $J(A)$. En prenant $A = \mathbb{R}^+ \times \Omega$, on constate que la suite $X_\infty^n = X_n$ converge en probabilité lorsque $n \rightarrow +\infty$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la convergence a lieu p.s. Notons $T_n = \inf\{t \geq n, |X_t| \geq |X_n| + 1\}$. Sur l'ensemble $T_n < +\infty$, $|J([n, T_n])| \geq 1$. D'après le lemme 1 cette suite de variables aléatoires tend vers 0 dans L^0 . Donc $P[T_n < +\infty]$ tend vers 0. Mais on a l'inclusion : $\{T_n < +\infty\} \supset \{X^* = +\infty\}$. Donc $P[X^* = +\infty] = 0$ et le

lemme est établi.

Notons que le résultat du lemme 2 subsiste si on remplace X par l'intégrale stochastique (sur $]0, +\infty[$) $1_A \cdot X$ pour tout ensemble prévisible A . On peut alors invoquer un résultat de Lenglart [4] ou donner une démonstration directe pour la dernière étape. Rappelons que nous avons choisi pour le lemme 1 une loi Q équivalente à P telle que toutes les semimartingales X^n soient dans $\mathcal{M} \oplus \mathcal{G}$. Compte tenu du lemme 2, on peut exiger de plus que $E_Q[X] < +\infty$. Nous fixons désormais la loi Q et toutes les intégrales se rapporteront à cette loi. Comme la semimartingale X^n est dans $\mathcal{M} \oplus \mathcal{G}$, elle est spéciale, de décomposition canonique $X^n = M^n + A^n$. Il existe un processus prévisible ϵ à valeurs dans $\{-1, 1\}$ tel que $\epsilon dA^n = |dA^n|$ pour tout n . Posons : $\sigma = 1_{\{\epsilon=1\}}$, $\sigma' = 1_{\{\epsilon=-1\}}$. Soit $T_p = \inf\{t, |(\sigma \cdot X)_t| \vee |(\sigma' \cdot X)_t| \geq p\}$. Les processus $\sigma \cdot X$ et $\sigma' \cdot X$ arrêtés à l'instant T_p sont bornés par $p + X^*$ car $\Delta(\sigma \cdot X)_{T_p} = \sigma_{T_p} \Delta X_{T_p}$. Nous noterons encore $\sigma \cdot X$ (resp. $\sigma' \cdot X$) les processus arrêtés à l'instant T_p . D'après le lemme 2, $(\sigma \cdot X)^*$ est aussi fini p.s. et la suite (T_p) tend stationnairement vers $+\infty$. Pour établir que X est une semimartingale jusqu'à l'infini, il suffit de montrer que les semimartingales arrêtées $\sigma \cdot X$ et $\sigma' \cdot X$ sont dans \mathcal{H}^1 . Or $\sigma \cdot A^n$ est un processus croissant intégrable et $\sigma \cdot M^n$ est une martingale de carré intégrable que nous pouvons supposer nulle en 0. Dans ce cas $E[\sigma \cdot A_\infty^n] = E[\sigma \cdot X_\infty^n] \leq p + E[X^*]$. Grâce au lemme de Fatou, on en déduit que $E[\sigma \cdot A_\infty] < +\infty$. Comme $(\sigma \cdot M^n)^* \leq (\sigma \cdot X)^* + \sigma \cdot A_\infty$, on en déduit que la martingale $\sigma \cdot M$ appartient à \mathcal{H}^1 et le théorème 1 est établi.

On a un théorème analogue pour le prolongement en 0 des semimartingales dans $]0, +\infty[$. Nous dirons d'après [6] et [8] qu'un processus X est une semimartingale dans $]0, +\infty[$ si pour tout n , $X 1_{\frac{1}{n}, +\infty[}$ est une semimartingale au sens habituel.

THEOREME 2. Soit X une semimartingale dans $]0, +\infty[$. Alors X est la restriction à $]0, +\infty[$ d'une semimartingale si et seulement si pour tout ensemble prévisible A , les variables aléatoires $\int_{1/n}^1 1_A dX$ convergent dans L^0 .

Ce théorème est analogue au théorème 1 et on peut transcrire la démonstration précédente mais c'est beaucoup plus pénible... En particulier l'équivalent du lemme 2 utilise un résultat de Mertens explicité dans [9] et qui nous a été communiqué par Meyer.

C'est pourquoi nous allons établir un résultat plus général avec une méthode différente faisant appel à l'analyse fonctionnelle.

UN THEOREME GENERAL DE PROLONGEMENT.

Dans l'étude en 0 et $+\infty$ nous étions amenés à introduire les semimartingales jusqu'à l'infini $X^n = 1_{]1/n, 1]} \cdot X$ (resp. $X^n = 1_{[0, n]} \cdot X$). Voici le résultat général qui englobe les théorèmes 1 et 2.

THEOREME 3. Soient (A_n) une suite croissante d'ensembles prévisibles de réunion A et (X^n) une suite de semimartingales jusqu'à l'infini telles que : $X^n = 1_{A_n} \cdot X^{n+1}$ et pour tout ensemble prévisible K la suite $(1_K \cdot X^n)_\infty$ converge dans L^0 vers une v.a. notée $J(K)$. Alors la suite (X^n) converge pour la topologie des semimartingales vers une semimartingale X telle que $1_{A^c} \cdot X = 0$.

Démonstration : La démonstration se fait aussi en plusieurs étapes. Rappelons d'abord un très joli résultat dû à Maurey et Pisier [5].

THEOREME 4. Pour tout $\alpha \in]0, 1[$ il existe $\delta \in]0, 1[$ tel que pour toute famille finie Z_1, \dots, Z_n de v.a. et toute suite finie de réels c_1, \dots, c_n bornés par 1 :

$$Q\left[\left|\sum_{i=1}^n c_i Z_i\right| \geq 1\right] \leq \alpha + K \sup_{\epsilon} Q\left[\left|\sum_{i=1}^n \epsilon_i Z_i\right| \geq \delta\right]$$

où ϵ parcourt l'ensemble $\{-1, 1\}^n$, K étant une constante universelle.

Soit I l'algèbre engendrée par les intervalles stochastiques dyadiques. Comme l'ensemble des v.a. de la forme $J[(A \setminus A_n) \cap B]$, B parcourant I , est dénombrable, on peut supposer que toutes ces v.a. appartiennent à $L^1(Q)$ (cf [1]). Notons que $J(A_n \cap B) = (1_B \cdot X^n)_\infty$ est aussi intégrable pour tout n . Nous nous proposons de montrer maintenant que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un réel $c \in \mathbb{R}$ tel que $Q[|J(f)| \geq c] \leq \frac{\epsilon}{3}$ pour tout $f \in \bar{I}$, \bar{I} désignant l'enveloppe convexe de I . Fixons $\epsilon > 0$ et prenons $\alpha = \frac{\epsilon}{3}$. Il lui correspond d'après le théorème 4 un certain $\delta > 0$. Par ailleurs il existe $\eta > 0$ tel que $d(B, \emptyset) < \eta$ implique $Q[|J(B)| > \frac{\delta}{2}] < \frac{\epsilon}{3K}$. Rappelons que $A = \cup A_n$ et que la suite (A_n) est croissante. Ainsi il existe n_0 tel que $d(A \setminus A_{n_0}, \emptyset) < \eta$. Notons \bar{J} la "restriction" de J à $A \setminus A_{n_0}$ c'est-à-dire : $\bar{J}(B) = J(B \cap (A \setminus A_{n_0}))$ pour tout $B \in \tilde{\mathcal{P}}$. Alors pour tout B prévisible $Q[|\bar{J}(B)| > \frac{\delta}{2}] < \frac{\epsilon}{3K}$. Tout élément f de \bar{I} s'écrit sous la forme :

$$f = \sum_{p=1}^n \lambda_p 1_{D_p}$$

où les (D_p) appartiennent à I , sont deux à deux disjoints et $0 \leq \lambda_p \leq 1$ pour tout p . Or $\sum_{p=1}^n \pm 1_{D_p} = 1_D - 1_{D'}$ avec $D, D' \in I$ car les (D_p) sont deux à deux disjoints. Donc $Q[|\bar{J}(\sum_{p=1}^n \pm 1_{D_p})| \geq \delta] \leq Q[|\bar{J}(D)| \geq \frac{\delta}{2}] + Q[|\bar{J}(D')| \geq \frac{\delta}{2}] \leq 2\frac{\epsilon}{3}$. Le théorème de Maurey et Pisier implique que $Q[|\bar{J}(f)| \geq 1] \leq \epsilon$ pour tout $f \in \bar{I}$. Comme $J(A_{n_0} \cap B) = (1_B \cdot X^{n_0})_\infty$ pour tout $B \in \mathcal{P}$ et que la semimartingale X^{n_0} est une semimartingale jusqu'à l'infini, il existe $c' \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $f \in \bar{I}$, $Q[|J(A_{n_0} \cap f)| \geq c'] \leq \epsilon$. Or $J(\cdot) = \bar{J}(\cdot) + J(A_{n_0} \cap \cdot)$. Donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $f \in \bar{I}$, $Q[|J(f)| > c] \leq 2\epsilon$. On sait d'après un résultat de Dellacherie - Mokobodski dont la démonstration a été améliorée par Yan [11] qu'il existe une loi Q' équivalente à Q telle que $\sup_{f \in \bar{I}} E_{Q'}[J(f)] < +\infty$.

Il en résulte que $X_T = J([0, T])$ est une Q' -quasimartingale dont on peut choisir une version càdlàg (il suffit de reprendre la démonstration du théorème 1.5 de [9]). Après le choix de la bonne version, $X_T = J([0, T])$ a encore lieu pour tout temps d'arrêt dyadique T . A l'aide du lemme 1 et du théorème de convergence dominée pour les intégrales stochastiques, on voit que l'ensemble des $B \in \mathcal{F}$ qui vérifient $J(B) = (1_B \cdot X)_\infty$ est une classe monotone. Comme il contient l'algèbre engendrée pour les temps d'arrêt dyadiques, cette égalité a lieu pour tout B prévisible. Comme $X^n = 1_{A_n} \cdot X$, on en déduit que la suite (X^n) converge pour la topologie des semimartingales vers X . Il en résulte aussi que $1_{A^c} \cdot X = 0$ puisque $1_{A^c} \cdot X^n = 0$ pour tout n .

Remarques :

- a) La convergence pour la topologie des semimartingales entraîne en particulier le résultat suivant : si (H^n) est une suite de processus prévisibles uniformément bornés tendant simplement vers un processus (prévisible) H , alors $H^n \cdot X^n$ converge pour la topologie des semimartingales vers $H \cdot X$. Bien entendu, on ne peut pas remplacer la condition de borniture uniforme par la condition plus faible : $H^n \in L(X^n)$ pour tout n .
- b) Les applications aux mesures semimartingales sont développées dans [8].
- c) Une version plus faible du théorème 2 figure dans [3] et [10].

RECTIFICATION SUR LES EPREUVES. Dans l'énoncé du th.4, ajouter que les c_i sont bornés par 1 en valeur absolue, et remplacer la formule par

$$Q\left[\left|\sum_{i=1}^n c_i Z_i\right| \geq 1\right] \leq \alpha + K \sup_{\varepsilon} \left(\inf\left\{ \lambda : Q\left[\left|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i Z_i\right| \geq \lambda\right] \leq \delta \right\} \right)$$

Dans la démonstration, ligne 9, choisir η tel que $Q[|J(B)| \geq \frac{\varepsilon}{6K}] \leq \frac{\delta}{2}$.

Ligne 13, pour B prévisible $Q[|\bar{J}(B)| \geq \frac{\varepsilon}{6K}] \leq \frac{\delta}{2}$. Enfin, lignes 16-17

$Q[|\bar{J}(\sum_p \pm 1_{D_p})| \geq \frac{\varepsilon}{3K}] \leq Q[|\bar{J}(D)| \geq \frac{\varepsilon}{6K}] + Q[|\bar{J}(D')| \geq \frac{\varepsilon}{6K}] \leq \delta$. Sans changement ensuite.

REFERENCES

-:-:-:-:-

- [1] DELLACHERIE C.: Quelques applications du lemme de Borel-Cantelli à la théorie des semimartingales. Séminaire de Probabilités XII, p. 742, L.N. 649, Springer Verlag 1978.
- [2] DELLACHERIE C. et MEYER P.A.: Probabilités et Potentiels. Chapitre VI, n° 50b.
- [3] EMERY M.: Un théorème de Vitali-Hahn-Saks pour les semimartingales. A paraître dans Z.W.
- [4] LENGART E.: Article à paraître.
- [5] MAUREY et PISIER G.: Un théorème d'extrapolation et ses conséquences. CRAS Paris, T. 277, série A, 1973, p. 39-41.
- [6] MEYER P.A.: Sur un résultat de Laurent Schwartz. Dans ce volume.
- [7] MEYER P.A.: Sur un théorème de C. Stricker. Séminaire de Probabilités XI, p. 482-489, L.N. 581, Springer Verlag 1977.
- [8] MEYER P.A. et STRICKER C.: Sur les semimartingales au sens de L. Schwartz. A paraître dans *Advances in Mathematics*.
- [9] STRICKER C.: Mesure de Föllmer en théorie des quasimartingales. Séminaire de Probabilités IX, p. 408-420, L.N. 465, Springer Verlag 1975.
- [10] STRICKER C.: Thèse de Doctorat 1979, page 114.
- [11] YAN J.A.: Caractérisation d'une classe d'ensembles convexes dans L^1 ou \mathbb{H}^1 , a paraître dans ce volume.

Laboratoire associé au C.N.R.S n° 1
7 rue René Descartes
67084 STRASBOURG CEDEX