Paul-André Meyer

Sur un résultat de L. Schwartz

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 102-103
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__102_0>

Séminaire de Probabilités
Volume XIV (1978/79)

SUR UN RESULTAT DE L. SCHWARTZ

par P.A. Meyer

Dans un travail récent sur les semimartingales à valeurs dans les variétés, et les martingales conformes à valeurs dans les variétés analytiques complexes (**volume 780 de la collection des Lecture** Notes), L. Schwartz a montré l'intérêt de la notion de semimartingale dans un ouvert aléatoire. La définition adoptée par Schwartz n'est pas absolument satisfaisante, car elle n'est pas locale (un processus peut être une semimartingale dans deux ouverts aléatoires, sans l'être dans leur réunion). On se propose ici de la modifier légèrement, pour la rendre locale, et de généraliser un résultat de Schwartz, suivant lequel un processus, qui est une semimartingale dans chacun des ouverts d'une famille (A_n) recouvrant $\overline{\mathbb{R}}_+\times\Omega$, est une semimartingale (jusqu'à l'infini) au sens usuel.

D'autres résultats sur les semimartingales au sens de Schwartz, établis en collaboration avec Stricker, paraîtront dans un volume spécial dédié à L. Schwartz (Advances in Mathematics, 1980). Mais nous avons préféré laisser cette petite note dans le volume XIV, afin d'attirer l'attention de nos lecteurs habituels sur l'intérêt des notions introduites par Schwartz. Toutes les définitions générales figurent dans cet article ; voici le théorème en langage ordinaire :

THEOREME. Soient X un processus optionnel, K un compact aléatoire optionnel, recouvert par une famille (A^n) d'ouverts aléatoires. On suppose que, pour tout n, il existe une semimartingale Y^n telle que $X=Y^n$ sur A^n. Alors il existe une semimartingale Y telle que $X=Y$ sur K .

REMARQUES. a) Les A^n ne sont pas supposés optionnels, mais le gain de généralité est illusoire : l'intérieur de $\{X=Y^n\}$ est un ouvert optionnel contenant A^n.

b) L'extension aux fermés est immédiate : appliquer le résultat au compact aléatoire $K\cap[0,n]$, ce qui fournit une semimartingale Y_n , et définir Y par $Y=Y_n$ sur $[n,n+1[$ (remarque de Lenglart).

c) Dans le cas traité par Schwartz, l'ensemble d'indices est $\overline{\mathbb{R}}_+$, le compact aléatoire est $\overline{\mathbb{R}}_+\times\Omega$, et la conclusion affirme que X lui même est une semimartingale jusqu'à l'infini.

d) Stricker a donné une autre démonstration (plus élémentaire) de ce théorème, qui permet de construire une semimartingale Y telle que $X=Y$ sur un voisinage droit de K. Elle figure dans notre article.

e) Nous dirons que X est une <u>semimartingale dans un ouvert aléatoire</u> A s'il existe des ouverts aléatoires A^n, des semimartingales Y^n, tels que $A=\cup_n A_n$ et $X=Y^n$ dans A^n pour tout n. Alors le théorème s'exprime ainsi : si X est une semimartingale dans A, pour tout fermé optionnel $F\subset A$ il existe une semimartingale Y telle que X=Y sur F.

DEMONSTRATION. Considérons l'ensemble dénombrable Π des suites finies

$$\pi=(r_1,s_1\ ;\ \dots\ ;\ r_n,s_n,\ a_1,\dots,a_n)$$

où n est un entier, $a_1,\dots,a_n$ sont des entiers, et les r_i,s_i sont des nombres rationnels tels que $r_i<s_i$. On désigne par G_π l'ensemble des $\omega\in\Omega$ tels que

- pour tout i , $[r_i,s_i[$ est contenu dans la coupe $A^{a_i}(\omega)$
- les intervalles $]r_i,s_i[$ recouvrent la coupe $K(\omega)$ (si $r_i=0$, remplacer $]r_i,s_i[$ par $[r_i,s_i[$).

D'après Borel-Lebesgue, les intervalles rationnels [1] $]r,s[$ tels que $[r,s[$ soit contenu dans l'une des coupes $A^n(\omega)$ recouvrant le compact $K(\omega)$, il existe pour tout $\omega\in\Omega$ un π tel que $\omega\in G_\pi$. Montrons que pour tout π il existe une semimartingale Z^π telle que $X=Z^\pi$ sur $(\cup_i\ [r_i,s_i[)\times G_\pi$. Pour cela, nous représentons $\cup_i\ [r_i,s_i[$ comme une réunion d'intervalles $[u_k,v_k[$ avec $u_1<v_1\leq u_2<v_2\dots\leq u_m<v_m$; chacun des $[u_k,v_k[$ est contenu dans une coupe $A^{a_i}(\omega)$, où i dépend seulement de k. Nous posons alors

$$Z^\pi = \Sigma_k\ I_{[u_k,v_k[}Y^{a_i} \quad .$$

L'ensemble Π étant dénombrable, il existe une <u>partition</u> (H_π) de Ω telle que $H_\pi\subset G_\pi$ pour tout π (ranger en une suite les éléments de Π, et procéder par récurrence). Soit alors $(\underline{\underline{G}}_t)$ le grossissement de la filtration initiale $(\underline{\underline{F}}_t)$, obtenu en adjoignant à $\underline{\underline{F}}_0$ tous les ensembles H_π . D'après un théorème de Jacod (Sém. XI p. 484-485 , Sém. XII p. 57), toute semimartingale/$(\underline{\underline{F}}_t)$ reste une semimartingale/$(\underline{\underline{G}}_t)$, et par conséquent le processus

$$Z_t(\omega) = \Sigma_\pi\ I_{H_\pi}(\omega)Z_t^\pi(\omega)$$

est une semimartingale/$(\underline{\underline{G}}_t)$, égale à X sur K . Pour redescendre sur $(\underline{\underline{F}}_t)$, l'idée naturelle est de prendre pour Y la projection optionnelle de Z sur $(\underline{\underline{F}}_t)$: en effet, K étant optionnel ainsi que X, la relation $XI_K=ZI_K$ entraîne $XI_K=YI_K$. Malheureusement, la projection d'une semimartingale n'est pas une semimartingale en général. Qu'à cela ne tienne : nous remplaçons P par une loi équivalente Q telle que Z soit une quasimartingale sur tout intervalle fini (Dellacherie : Sém. XII, p. 742-746) ; alors Y est une quasimartingale/$(\underline{\underline{F}}_t)$ (Stricker), donc une semimartingale.

1. Même convention que plus haut si r=0.